Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 4. С. 101—115

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.977.1, 517.922

Локальная R-управляемость в ноль нелинейных алгебро-дифференциальных систем *

П. С. Петренко
Институт динамики систем и теории управления СО РАН, Иркутск

Аннотация. Рассматривается управляемая система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенная относительно производной искомой вектор-функции и тождественно вырожденная в области определения. Допускается произвольно высокий индекс неразрешенности. Получены условия локальной R-управляемости в ноль (ноль-управляемости в пределах множества достижимости) такой системы по ее первому линейному приближению. Показано, что в линейном случае R-управляемость влечет за собой локальную R-управлемость в ноль.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения; нелинейная система; R-управляемость по первому приближению

1. Введение

Рассматривается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$F(t,x(t),x'(t),u(t))=0,\ \ t\in I=(a_0-\varepsilon,a_0+\varepsilon), \tag{1.1}$$

где n-мерная вектор-функция $F(t,x,y,u)$ определена в области

$$\mathcal{D}=\{(t,x,y,u):\ t\in I;\ \|x\|,\ \|y\|,\|u\|<K_0\}\subset\mathbf{R}^{2n+l+1};$$

$x(t)$ — искомая n-мерная вектор-функция; $u(t)$ — l-мерная функция управления; K_0, ε — положительные константы. Здесь и далее использованы обозначения: $\|*\|$ — одна из норм в евклидовом пространстве, $\phi'(t)=\dfrac{d}{dt}\phi(t)$, $\phi^{(i)}(t)=\left(\dfrac{d}{dt}\right)^i\phi(t)\ \ \forall\phi(t)\in\mathbf{C}^i(I)$.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 10-01-00132.

Предполагается, что $F(t,x,y,u)$ имеет в $\mathcal{D}$ достаточное число непрерывных частных производных по каждому из своих аргументов и

$$\det \frac{\partial F(t,x,y,u)}{\partial y} = 0 \quad \forall (t,x,y,u) \in \mathcal{D}\,.$$

Системы такого рода называются алгебро-дифференциальными (АДС). Мерой неразрешенности АДС относительно производной искомой вектор-функции служит целочисленная величина $r:\ 0 \le r \le n$, называемая индексом.

Анализ проводится при допущении, что функция F обладает свойством

$$F(t,0,0,0) = 0 \ \ \forall t \in I. \tag{1.2}$$

Работа посвящена исследованию локальной R-управляемости в ноль линейных и нелинейных АДС. R-управляемость (управляемость в пределах достижимого множества) означает возможность перехода АДС (1.1) из любого согласованного начального состояния в любое состояние из достижимого множества за счет выбора вектор-функции управления. Под достижимым множеством понимается объединение по всем возможным согласованным начальным векторам x_0 всех множеств состояний, в которые АДС может быть переведена из x_0 за конечный промежуток времени при соответствующих достаточно гладких управлениях. Под локальной R-управляемостью в ноль подразумевается возможность перехода АДС (1.1) из любого согласованного и достаточно малого по норме начального состояния в ноль за счет выбора управления, подчиняющегося некоторому условию близости к нулю.

Начальное состояние

$$x(t_0) = x_0 \tag{1.3}$$

($x_0 \in \mathbf{R}^n$ – заданный вектор) считается согласованным, если существует решение АДС (1.1), удовлетворяющее условию (1.3).

Исследование линейных и нелинейных АДС проводится в предположении существования структурной формы, называемой "эквивалентной" [1, 2], в которой разделены "алгебраическая" и "дифференциальная" подсистемы.

2. Определения и обозначения

Определение 1. *Система конечных уравнений*

$$\mathcal{F}_r(t,x,y,z_1,\ldots,z_r,u,v_1,\ldots,v_r) =$$
$$= \begin{pmatrix} F(t,x,y,u) \\ F_1(t,x,y,z_1,u,v_1) \\ \cdots \\ F_r(t,x,y,z_1,\ldots,z_r,u,v_1,\ldots,v_r) \end{pmatrix} = 0, \tag{2.1}$$

в которой $x, y, z_j \in \mathbf{R}^n$; $u, v_j \in \mathbf{R}^l$, *а функции* $F_j(t, x, y, z_1, \ldots, z_j, u, v_1, \ldots, v_j)$ $(j = \overline{1, r})$ *обладают свойством: для любых двух вектор–функций* $\phi(t) \in \mathbf{C}^{j+1}(I)$, $\psi(t) \in \mathbf{C}^j(I)$ *(n и l-мерной соответственно) таких, что* $(t, \phi(t), \phi'(t), \psi(t)) \in \mathcal{D}$ $\forall t \in I$,

$$F_j(t, \phi(t), \phi'(t), \phi''(t), \ldots, \phi^{(j+1)}(t), \psi(t), \ldots, \psi^{(j)}(t)) =$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\right)^j F(t, \phi(t), \phi'(t), \psi(t)),$$

называется r-продолженной системой по отношению к АДС (1.1).

Поставим в соответствие функции $F(t, x, y, u)$ следующие объекты: матрицу размеров $n(r+1) \times nr$

$$\Gamma_{r,z} = \Gamma_{r,z}(t, x, y, z_1, \ldots, z_r, u, v_1, \ldots, v_r) = \begin{pmatrix} \partial \mathcal{F}_r/\partial z_1 & \ldots & \partial \mathcal{F}_r/\partial z_r \end{pmatrix},$$

квадратную матрицу порядка $n(r+1)$

$$\Gamma_{r,y} = (\partial \mathcal{F}_r/\partial y \quad \Gamma_{r,z})$$

и матрицу размеров $n(r+1) \times n(r+2)$

$$\Gamma_{r,x} = (\partial \mathcal{F}_r/\partial x \quad \Gamma_{r,y}).$$

В соответствии с предположением (1.2) точка $t = a_0$, $x = y = z_j = 0$, $u = v_j = 0$ $(j = \overline{1, r})$ удовлетворяет продолженной системе (2.1). Обозначим эту точку $\alpha_r = (a_0, 0, \ldots, 0)$, тогда $\mathcal{F}_r(\alpha_r) = 0$. Если при этом $\operatorname{rank} \Gamma_{r,x}(\alpha_r) = n(r+1)$, то для системы (2.1) выполняются все условия теоремы о неявной функции [3, с. 66], согласно которой из (2.1) можно выразить $n(r+1)$ компонент вектора $\operatorname{colon}(x, y, z_1, \ldots, z_r)$ [1] (обозначим их буквой ξ) как функции переменных $t, u, v_1, \ldots, v_r$ и остальных n компонент этого вектора (будем обозначать их η):

$$\xi = \xi(t, \eta, u, v_1, \ldots, v_r), \quad (t, \eta, u, v_1, \ldots, v_r) \in \mathcal{W}, \tag{2.2}$$

где $\mathcal{W} = I_0 \times \tilde{\mathcal{W}}$; $I_0 = (a_0 - \varepsilon_0, a_0 + \varepsilon_0) \subseteq I$, $0 < \varepsilon_0 \le \varepsilon$; $\tilde{\mathcal{W}} \subset \mathbf{R}^{n+l(r+1)}$ — окрестность точки $\eta = 0, u = v_1 = \ldots = v_r = 0$;

$$\operatorname{colon}(\xi, \eta) = P \operatorname{colon}(x, y, z_1, \ldots, z_r),$$

$\xi \in \mathbf{R}^{n(r+1)}$, $\eta \in \mathbf{R}^n$, P – матрица перестановок строк.

Поскольку матрица $\Gamma_{r,x}$ имеет размеры $n(r+1) \times n(r+2)$, то в общем случае неособенный минор порядка $n(r+1)$ матрицы $\Gamma_{r,x}(\alpha_r)$, в соответствии с которым определяются функции (2.2), неединственен.

[1] $\operatorname{colon}(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \begin{pmatrix} c_1^\top & c_2^\top & \ldots & c_n^\top \end{pmatrix}^\top$.

Будем искать этот минор следующим образом. В матрице $\Gamma_{r,y}(\alpha_r)$ выберем $\varrho = \operatorname{rank}\Gamma_{r,y}(\alpha_r)$ ($\varrho \leq n(r+1)$) линейно независимых столбцов, в состав которых должно войти максимально возможное число первых n столбцов этой матрицы. Дополним эти столбцы $n(r+1)-\varrho$ линейно независимыми столбцами вычисленной в точке α_r матрицы $\partial\mathcal{F}_r/\partial x$, которая представляет собой первые n столбцов матрицы $\Gamma_{r,x}(\alpha_r)$. Полученные $n(r+1)$ линейно независимых столбцов составят искомый минор. При этом $\varrho \geq nr$.

Определение 2. *Описанный выше неособенный минор порядка $n(r+1)$ матрицы $\Gamma_{r,x}(\alpha_r)$ назовем разрешающим.*

Далее функции (2.2) будем считать соответствующими разрешающему минору.

Обозначим $\bar{\Gamma}_{r,z}(t,\eta,u,v_1,\ldots,v_r)$ матрицу, получающуюся при подстановке функций (2.2) в $\Gamma_{r,z}(t,x,y,z_1,\ldots,z_r,u,v_1,\ldots,v_r)$.

3. Эквивалентные формы

3.1. Нелинейная АДС

Пусть $F(t,x,y,u) \in \mathbf{C}^{r+1}(\mathcal{D})$. Кроме того, выполнены условия:
A) $\mathcal{F}_{r+1}(\alpha_{r+1}) = 0$, $\operatorname{rank}\Gamma_{r,x}(\alpha_r) = n(r+1)$;
B) $\operatorname{rank}\bar{\Gamma}_{r,z}(t,\eta,u,v_1,\ldots,v_r) = \rho = \mathrm{const}$ всюду в области $\mathcal{W}$;
C) разрешающий минор матрицы $\Gamma_{r,x}(\alpha_r)$ включает в себя ρ столбцов матрицы $\Gamma_{r,z}(\alpha_r)$ и n первых столбцов матрицы $\Gamma_{r,y}(\alpha_r)$.

Определение 3. *Наименьшее целое r, при котором выполнены условия A), B), C), будем называть индексом АДС (1.1).*

Определение 4. *Вектор-функцию $u(t) : I \to \mathbf{R}^l$ будем называть допустимым управлением для АДС (1.1), если $u(t) \in \mathbf{C}^r(I)$ и $\forall t \in I$* colon $\Big(u(t), u'(t), \ldots, u^{(r)}(t)\Big) \in \mathcal{U}$, *где $\mathcal{U}$ — некоторая окрестность нуля в пространстве $\mathbf{R}^{l(r+1)}$.*

Определение 5. *Пусть $u_*(t)$ — допустимое управление для АДС (1.1). Решением системы $F(t,x(t),x'(t),u_*(t)) = 0$, $t \in I$, называется n-мерная вектор-функция $x_*(t) \in \mathbf{C}^1(I)$, обращающая это уравнение в тождество на I при подстановке.*

В статье [2] показано, что при выполнении определенных условий АДС (1.1) эквивалентна в смысле решений системе

$$x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), u(t), u'(t), \ldots, u^{(r)}(t)), \tag{3.1}$$

$$x_2(t) = f_0(t, x_1(t), u(t), u'(t), \dots, u^{(r)}(t)), \quad t \in I_0 \subseteq I, \tag{3.2}$$

где функции $f_1 : \mathcal{W} \to \mathbf{R}^{n-d}$, $\ f_0 : \mathcal{W} \to \mathbf{R}^d$ определены и имеют в области $\mathcal{W}$ непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов; $\mathrm{colon}(x_1(t), x_2(t)) = Qx(t)$, Q — матрица перестановок строк. Там же указан способ построения системы (3.1), (3.2). Она получается как часть компонент неявной функции (2.2), удовлетворяющей r-продолженной системе (2.1).

Зафиксируем точку $t_0 \in I_0$ и зададим для АДС (3.1), (3.2) начальные данные

$$x_1(t_0) = x_{1,0}, \ \ x_2(t_0) = x_{2,0}, \tag{3.3}$$

где $x_{1,0} \in \mathbf{R}^{n-d}$, $\ x_{2,0} \in \mathbf{R}^d$.

Предположим, что существуют векторы $u_0, v_{1,0}, \dots, v_{r,0} \in \mathbf{R}^l$ такие, что выполняется равенство

$$x_{2,0} = f_0(t_0, x_{1,0}, u_0, v_{1,0}, \dots, v_{r,0}). \tag{3.4}$$

Тогда управление $u_*(t)$, удовлетворяющее ограничениям

$$u(t_0) = u_0, \ u^{(j)}(t_0) = v_{j,0}, \ j = \overline{1, r}, \tag{3.5}$$

можно, в частности, искать в виде $u_*(t) = \sum\limits_{i=0}^{r} b_i (t - t_0)^i$. Легко проверить, что коэффициенты $b_i \in \mathbf{R}^l$ найдутся единственным образом: $b_0 = u_0$, $b_j = \dfrac{1}{j!} v_{j,0}$. Очевидно, что при достаточно близких к нулю значениях $u_0, v_{j,0}$ это управление будет допустимым.

Если задача (3.1)–(3.3) имеет на I_0 решение $x_*(t)$, соответствующее допустимому управлению $u_*(t)$, то должно выполняться включение

$$\Big(x_*(t), x'_*(t), u_*(t)\Big) \in \mathcal{V} \quad \forall t \in I_0,$$

где $\mathcal{V} \subset \mathbf{R}^{2n+l}$ — некоторая окрестность точки $x = 0, y = 0, u = 0$. Для обеспечения этого условия векторы $x_{1,0}, x_{2,0}, u_0, v_{j,0}$ $(j = \overline{1, r})$ в (3.3)–(3.5) должны быть по норме достаточно близкими к нулю.

Теорема, сфомулированная ниже, представляет собой достаточный критерий локальной разрешимости задачи Коши (1.3) для АДС (1.1).

Теорема 1. [2] *Пусть:*
1) $F(t, x, y, u) \in \mathbf{C}^{r+2}(\mathcal{D})$*;*
2) выполнены условия A), B), C);
3) $\mathrm{rank}\, \Gamma_{r+1,y}(\alpha_{r+1}) = \mathrm{rank}\, \Gamma_{r,y}(\alpha_r) + n$.

Тогда $\forall t_0 \in I_0$ *найдутся* $\delta > 0$ *и* $\tau = \tau(t_0) > 0$ *такие, что для любых векторов* $x_0 \in \mathbf{R}^n$, $u_0, v_{j,0} \in \mathbf{R}^l$ $(j = \overline{1, r})$*, удовлетворяющих связи (3.4) и таких, что* $\|x_0\|, \|u_0\|, \|v_{j,0}\| < \delta$*, на интервале* $I_\tau = (t_0 - \tau, t_0 +$

$\tau) \subseteq I_0$ определено решение $x_*(t) \in \mathbf{C}^2(I_\tau)$ задачи (3.1), (3.2), (1.3), где $x_0 = Q^{-1}\operatorname{colon}(x_{1,0}, x_{2,0})$. При этом $x_*(t)$ является на I_τ решением задачи (1.1), (1.3). В (3.1), (3.2) и (1.1) $u(t) \in \mathbf{C}^r(I_\tau)$ — допустимое управление, удовлетворяющее ограничениям (3.5).

Определение 6. *АДС (3.1), (3.2) будем называть эквивалентной формой для системы (1.1) на интервале I_τ.*

Определение 7. *Начальное условие вида (1.3), удовлетворяющее соотношению (3.4), где $\operatorname{colon}(x_{1,0}, x_{2,0}) = Qx_0$, $u_0(t) = u(t_0)$, $v_{j,0} = u^{(j)}(t_0)$ $(j = \overline{1,r})$, будем называть согласованным с системой (1.1).*

3.2. Линейная АДС

Свойство (1.2) позволяет определить матрицы

$$A(t) = \frac{\partial F(t,x,y,u)}{\partial y}(t,0,0,0), \quad B(t) = \frac{\partial F(t,x,y,u)}{\partial x}(t,0,0,0),$$

$$U(t) = \frac{\partial F(t,x,y,u)}{\partial u}(t,0,0,0).$$

Тогда АДС

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) + U(t)u(t) = 0, \quad t \in I, \tag{3.6}$$

будет системой первого приближения для системы (1.1).

Матрицы

$$\mathbf{D}_{r,z}(t) = \begin{pmatrix} C_1^1 A(t) & O & \dots & O \\ C_2^1 A'(t) + C_2^2 B(t) & C_2^2 A(t) & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^1 A^{(r-1)}(t) + C_r^2 B^{(r-2)}(t) & C_r^2 A^{(r-2)}(t) + C_r^3 B^{(r-3)}(t) & \dots & C_r^r A(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{r,y}(t) = \begin{pmatrix} C_0^0 A(t) & O \\ \begin{pmatrix} C_1^0 A'(t) + C_1^1 B(t) \\ \vdots \\ C_r^0 A^{(r)}(t) + C_r^1 B^{(r-1)}(t) \end{pmatrix} & \mathbf{D}_{r,z}(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{D}_{r,x}(t) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} B(t) \\ B'(t) \\ \vdots \\ B^{(r)}(t) \end{pmatrix} & \mathbf{D}_{r,y}(t) \end{pmatrix}$$

являются соответственно аналогами матриц $\Gamma_{r,z}$, $\Gamma_{r,y}$ и $\Gamma_{r,x}$ для линейной системы (3.6). Здесь и далее C_i^j $(i,j = \overline{0,r})$ — биномиальные коэффициенты.

Определение 8. *Система линейных алгебраических уравнений*

$$\mathbf{D}_{r,x}(t)\,\mathrm{colon}(x, y, z_1, \ldots, z_r) + U_r(t)\,\mathrm{colon}(u, v_1, \ldots, v_r) = 0,$$

где $x, y, z_j \in \mathbf{R}^n$*;* $u, v_j \in \mathbf{R}^l$*,* $j = \overline{1, r}$*;*

$$U_r(t) = \begin{pmatrix} C_1^1 U(t) & O & \ldots & O \\ C_2^1 U'(t) & C_2^2 U(t) & \ldots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_r^1 U^{(r)}(t) & C_r^2 U^{(r-1)}(t) & \ldots & C_r^r U(t) \end{pmatrix},$$

называется r*–продолженной системой по отношению к системе (3.6).*

В статье [1] показано, что в некоторых предположениях существует определенный единственным образом линейный дифференциальный оператор

$$\mathcal{R} = R_0(t) + R_1(t)\frac{d}{dt} + \ldots + R_r(t)\left(\frac{d}{dt}\right)^r \tag{3.7}$$

с непрерывными на I коэффициентами, преобразующий систему (3.6) к виду

$$x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) + \sum_{j=0}^{r} H_j(t)u^{(j)}(t) = 0, \tag{3.8}$$

$$x_2(t) + J_2(t)x_1(t) + \sum_{j=0}^{r} G_j(t)u^{(j)}(t) = 0, \quad t \in I, \tag{3.9}$$

где $\mathrm{colon}\,(x_1(t), x_2(t)) = Qx(t)$, вектор-функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ имеют размерности $n - d$ и d соответственно;

$$\begin{pmatrix} H_0(t) & H_1(t) & \ldots & H_r(t) \\ G_0(t) & G_1(t) & \ldots & G_r(t) \end{pmatrix} = (R_0(t) \;\; R_1(t) \;\; \ldots \;\; R_r(t))U_r(t),$$

$$\begin{pmatrix} J_2(t) \\ J_1(t) \end{pmatrix} = (R_0 \; R_1 \; \ldots \; R_r)\mathrm{colon}\left(B, B', \ldots, B^{(r)}\right) Q \begin{pmatrix} E_{n-d} \\ O \end{pmatrix}.$$

Кроме того, в [1] получена формула для вычисления коэффициентов $R_j(t)$, $(j = \overline{1, r})$, и показано, что оператор (3.7) имеет левый обратный.

Теорема 2. [1] *Пусть:*
1) $A(t), B(t), U(t), u(t) \in \mathbf{C}^{2r+1}(I)$*,*
2) $\mathrm{rank}\mathbf{D}_{r,z}(t) = \rho = \mathrm{const}\ \forall t \in I$*,*
3) в матрице $\mathbf{D}_{r,x}(t)$ *имеется разрешающий минор,*
4) $\mathrm{rank}\mathbf{D}_{r+1,y}(t) = \mathrm{rank}\mathbf{D}_{r,y}(t) + n\ \forall t \in I$.

Тогда любое решение системы (3.6) будет решением системы (3.8), (3.9) и наоборот.

Определение 9. *Систему (3.8), (3.9) будем называть эквивалентной формой для АДС (3.6).*

Теорема 2 позволяет получить критерий существования и единственности решения задачи (3.6), (1.3).

Следствие 1. *Пусть выполнены все предположения теоремы 2. Для того, чтобы задача (3.6), (1.3) имела решение, необходимо и достаточно выполнения равенства*

$$x_{2,0} + J_2(t_0)x_{1,0} + \sum_{j=0}^{r} G_j(t_0)u^{(j)}(t_0) = 0, \tag{3.10}$$

где $\mathrm{colon}(x_{1,0}, x_{2,0}) = Qx_0$. *При этом, если решение задачи (3.6), (1.3) существует, то оно единственно.*

Определение 10. *Начальное условие (1.3), удовлетворяющее равенству (3.10), будем называть согласованным с системой (3.6).*

Вернемся к АДС (1.1). Пусть имеют место все предположения теоремы 1. Свойство (1.2) гарантирует, что в системе (3.1), (3.2)

$$f_1(t, 0, \ldots, 0) = 0, \quad f_0(t, 0, \ldots, 0) = 0 \quad \forall t \in I_0.$$

Построим для АДС (3.1), (3.2) систему первого приближения.

$$x_1'(t) - \tilde{J}_1(t)x_1(t) - \sum_{j=0}^{r} \tilde{H}_j(t)u^{(j)}(t) = 0, \tag{3.11}$$

$$x_2(t) - \tilde{J}_2(t)x_1(t) - \sum_{j=0}^{r} \tilde{G}_j(t)u^{(j)}(t) = 0, \quad t \in I_0, \tag{3.12}$$

где $\tilde{J}_1(t) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t, 0, \ldots, 0)$, $\tilde{J}_2(t) = \frac{\partial f_0}{\partial x_1}(t, 0, \ldots, 0)$, $\tilde{H}_0(t) = \frac{\partial f_1}{\partial u}(t, 0, \ldots, 0)$, $\tilde{H}_j(t) = \frac{\partial f_1}{\partial v_j}(t, 0, \ldots, 0)$, $\tilde{G}_0(t) = \frac{\partial f_0}{\partial u}(t, 0, \ldots, 0)$, $\tilde{G}_j(t) = \frac{\partial f_0}{\partial v_j}(t, 0, \ldots, 0)$, $j = \overline{1, r}$.

Приведенная ниже теорема утверждает, что операции линеаризации и перехода к эквивалентной форме перестановочны.

Теорема 3. [2] *Пусть:*
1) $F(t, x, y, u) \in \mathbf{C}^{2r+2}(\mathcal{D})$;
2) выполнены условия A, B, C;
3) $\operatorname{rank} \Gamma_{r+1,y}(\alpha_{r+1}) = \operatorname{rank} \Gamma_{r,y}(\alpha_r) + n$;
4) $F(t, 0, 0, 0) = 0 \;\; \forall t \in I$.
Тогда системы (3.8), (3.9) и (3.11), (3.12) совпадают на некотором достаточно малом интервале $I_0 = (a_0 - \varepsilon_0, a_0 + \varepsilon_0) \subseteq I, \;\; 0 < \varepsilon_0 \le \varepsilon$.

4. Условия локальной R-управляемости в ноль

Определение 11. *Система (3.8) называется полностью управляемой на отрезке $T = [t_0, t_1] \subset I$, если для любых векторов $x_0, x_1 \in \mathbf{R}^{n-d}$ найдется управление $u(t) \in \mathbf{C}^r(T)$ такое, что решение системы (3.8) будет удовлетворять условиям $x_1(t_0) = x_0,\ x_1(t_1) = x_1$.*

Определение 12. *Система (3.6) называется R-управляемой на отрезке $T \subset I$, если для любого согласованного вектора начальных данных x_0 и любой точки x_1 из множества достижимости M найдется управление $u(t)$ такое, что решение $x(t)$ системы (3.6) будет удовлетворять условиям: $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$.*

Вектор $x_1 \in \mathbf{R}^n$ называется достижимым в момент t_1 из вектора начальных данных $x_0 \in \mathbf{R}^n$, если существует такое достаточно гладкое управление $u(t)$, что решение задачи (3.6), (1.3) удовлетворяет условию $x(t_1) = x_1$.

Множество $M(x_0) \subseteq \mathbf{R}^n$ называется множеством достижимости из начального состояния $x_0 \in \mathbf{R}^n$, если оно состоит из векторов x_1 достижимых из точки x_0 в момент t_1. Заметим, если начальные данные не являются согласованными, то $M(x_0) = \emptyset$.

Множество достижимости M определяется как объединение всех множеств достижимости из всех возможных согласованных начальных состояний [4].

В условиях теоремы 2 системы (3.6) и (3.8), (3.9) эквивалентны в смысле решений. Согласно определению 12 любая АДС вида (3.6), в эквивалентной форме которой (3.8), (3.9) отсутствует невырожденная составляющая (3.8), всегда R-управляема. Если же подсистема (3.8) присутствует ($d < n$), то под R-управляемостью АДС (3.6) можно понимать полную управляемость системы (3.8).

Заметим, что в силу свойства (1.2) начальное условие $x(t_0) = 0$ является согласованным как с системой (1.1), так и с системой (3.1), (3.2). В условиях теоремы 1 для системы (1.1) можно сформулировать следующее определение.

Определение 13. *Система (1.1) (или система (3.1), (3.2)) называется локально R-управляемой в ноль на отрезке $T = [t_0, t_1] \subset I_\tau$, если существует $\delta > 0$ такое, что для любого вектора $x_0 \in \mathbf{R}^{n-d}$: $\|x_0\| < \delta$ найдется такое допустимое управление $u_0(t)$, что существует решение системы*

$$x_1'(t) = f_1(t, x_1(t), u_0(t), u_0'(t), \dots, u_0^{(r)}(t)),\ t \in T,$$

удовлетворяющее условиям $x_1(t_0) = x_0,\ \ x_1(t_1) = 0$.

Рассмотрим систему (3.1), (3.2). Предположим, что функции f_1 и f_0 определены и имеют непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов в $T \times \mathcal{V}$, где $\mathcal{V}$ — область изменения переменных $x_1, u, u', \dots, u^{(r)}$, представляющая собой некоторую окрестность точки $0 \in \mathbf{R}^{n+l(r+1)}$.

В обозначениях

$$J_1(t) = -\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(t,0,0,\dots,0), \ \ J_2(t) = -\frac{\partial f_0}{\partial x_1}(t,0,0,\dots,0),$$

$$H_i(t) = -\frac{\partial f_1}{\partial u^{(i)}}(t,0,0,\dots,0), \ \ G_i(t) = -\frac{\partial f_0}{\partial u^{(i)}}(t,0,0,\dots,0), \ \ i = \overline{0,r}, \tag{4.1}$$

АДС (3.8), (3.9) будет системой первого приближения для системы (3.1), (3.2).

Лемма 1. *Пусть:*
1) функции $f_1(t, x_1, u, u', \dots, u^{(r)})$ и $f_0(t, x_1, u, u', \dots, u^{(r)})$ определены и имеют непрерывные частные производные по каждому из своих аргументов в области $T \times \mathcal{V}$;
2) $f_1(t,0,0,\dots,0) = 0, \ \ f_0(t,0,0,\dots,0) = 0 \ \ \forall t \in T$;
3) система первого приближения (3.8), (3.9) для АДС (3.1), (3.2) R-управляема на отрезке T.

Тогда система (3.1), (3.2) локально R-управляема в ноль на отрезке T.

Доказательство. Рассмотрим систему (3.8). Выберем $(n-d)$-мерные векторы $p_i = \operatorname{colon}(0, \ \dots, \ \underline{0, \ \sigma_i, \ 0}, \ \dots, \ 0)$, где $\sigma_i \neq 0$ — i–ая компонента. Тогда векторы p_i, $i = \overline{1, n-d}$, будут линейно независимы в $\mathbf{R}^{n-d}$. Условие 3) леммы означает, что система (3.8) полностью управляема на отрезке T. По определению 11 для каждого $i = \overline{1, n-d}$ найдется управление $v_i(t) \in \mathbf{C}^r(T)$, гарантирующее существование единственного решения системы

$$x_1'(t) + J_1(t)x_1(t) + \sum_{j=0}^{r} H_j(t) v_i^{(j)}(t) = 0, \ \ t \in T, \tag{4.2}$$

удовлетворяющего условиям

$$x_1(t_0) = p_i, \quad x_1(t_1) = 0. \tag{4.3}$$

Формально построим управление

$$u(t,\mu) = \sum_{i=1}^{n-d} \mu_i v_i(t), \tag{4.4}$$

где $(\mu_1, \dots, \mu_{n-d}) = \mu$ — неизвестные параметры. Заметим, что при достаточно близких к нулю значениях μ_i управление (4.4) будет допустимым.

Очевидно, что решение $x_1(t,\mu)$ задачи

$$x_1(t_1) = 0$$

для системы

$$x_1'(t,\mu) = f_1(t, x_1(t), u(t,\mu), u'(t,\mu), \ldots, u^{(r)}(t,\mu)), \tag{4.5}$$

существует и единственно при любых достаточно близких к нулю значениях параметров. В частности, при $\mu = 0$, $x_1(t,0) \equiv 0$ на T. Кроме того, функция $x_1(t,\mu)$ в силу предположения 1) леммы будет иметь непрерывные частные производные по $\mu_1, \ldots, \mu_{n-d}$.

Покажем, что параметр μ в (4.4) можно выбрать таким образом, что решение системы (4.5) будет удовлетворять условию

$$x_1(t_0,\mu) = x_0 \tag{4.6}$$

при любом векторе $x_0 \in \mathbf{R}^{n-d}$ достаточно близком по норме к нулю. Тем самым теорема будет доказана.

Продифференцируем тождество (4.5) по μ

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial x_1(t,\mu)}{\partial \mu} = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\,\frac{\partial x_1(t,\mu)}{\partial \mu} + \sum_{j=0}^{r} \frac{\partial f_1}{\partial u^{(j)}}\,\frac{\partial u^{(j)}(t,\mu)}{\partial \mu} \tag{4.7}$$

.

Подставим в (4.7) значение $\mu = 0$. Принимая во внимание вытекающее из (4.4) равенство

$$\frac{\partial u^{(j)}}{\partial \mu}(t,0) = \left(v_1^{(j)}(t)\;\; v_2^{(j)}(t)\;\; \ldots\;\; v_{n-d}^{(j)}(t)\right)$$

и обозначения (4.1), получим

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial x_1}{\partial \mu}(t,0) + J_1(t)\frac{\partial x_1}{\partial \mu}(t,0) + \sum_{j=0}^{r} H_j(t)\left(v_1^{(j)}(t)\;\; v_2^{(j)}(t)\;\; \ldots\;\; v_{n-d}^{(j)}(t)\right) = 0. \tag{4.8}$$

Из (4.8) следует, что столбцы ξ_i матрицы

$$\frac{\partial x_1}{\partial \mu}(t,0) = (\xi_1(t)\;\; \xi_2(t)\;\; \ldots\;\; \xi_{n-d}(t))$$

являются решениями системы (4.2). В силу выбора в этой системе управлений $v_i(t)$ упомянутые решения должны удовлетворять аналогам условий (4.3), т. е.

$$\xi_i(t_0) = p_i, \;\; \xi_i(t_1) = 0, \;\; i = \overline{1, n-d}.$$

Поэтому матрица

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial \mu}(t_0, 0)\right) = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-d}) \tag{4.9}$$

является неособенной.

Обратимся к равенству (4.6), которое будем рассматривать как систему $n-d$ уравнений с $n-d$ неизвестными μ. Как было отмечено выше, значения $x_0 = 0,\ \mu = 0$ удовлетворяют этой системе. В силу неособенности матрицы (4.9) для системы (4.6) выполняются все условия теоремы о неявной функции, согласно которой при любых достаточно близких к нулю значениях x_0 найдется решение этой системы $\mu_* = \phi_1(x_0)$. □

Теорема 4. *Пусть выполнены все предположения теоремы 2. Если система (3.6) R-управляема на отрезке $T = [t_0, t_1]$, то она локально R-управляема в ноль на этом отрезке.*

Доказательство. Непосредственно из теоремы 2 следует, что если АДС (3.6) R-управляема или локально R-управляема в ноль на отрезке T, то система (3.8), (3.9) обладает тем же свойством. Справедливо и обратное, т. е. при наличии соответствующего свойства управляемости у системы (3.8), (3.9), то же свойство присуще и системе (3.6).

Очевидно, что любое решение системы (3.8) должно удовлетворять соотношению

$$x_1(t_1) = \Omega(t_1)x_1(t_0) + \Omega(t_1)) \int_{t_0}^{t_1} \Omega^{-1}(\tau) \left(\sum_{j=0}^{r} H_j(\tau)u^{(j)}(\tau)\right) d\tau,$$

где $\Omega(t)$ — матрицант системы (3.8), т. е. решение матричной задачи Коши

$$\Omega'(t) + J_1(t)\Omega(t) = 0,\ \ \Omega(t_0) = E_{n-d}.$$

Локальная R-управляемость в ноль АДС (3.6) или (3.8), (3.9) означает, что существует допустимое управление $u(t)$, обеспечивающее выполнение равенства

$$0 = \Omega(t_1)x_{1,0} + \Omega(t_1) \int_{t_0}^{t_1} \Omega^{-1}(\tau) \left(\sum_{j=0}^{r} H_j(\tau)u^{(j)}(\tau)\right) d\tau \tag{4.10}$$

при любом векторе $x_{1,0} \in \mathbf{R}^{n-d}$ достаточно близком по норме к нулю.

В соответствии с изложенным выше R-управляемость АДС (3.6) равносильна полной управляемости системы (3.8). Известно [5], что система (3.8) вполне управляема на отрезке T, если и только если для любого ненулевого вектора $h \in \mathbf{R}^{n-d}$ на T выполняется условие

$$h^\top \Omega^{-1}(t) \left(H_0(t)\ H_1(t)\ \ldots\ H_r(t)\right) \not\equiv 0. \tag{4.11}$$

В (4.10) управление будем искать в виде

$$u(t) = \sum_{j=0}^{r} \gamma_j (t-c)^{s+j},$$

где $c \notin T$ — фиксированное значение, $s \geq 0$ — достаточно большое целое число, $\gamma_j \in \mathbf{R}^l$ — неизвестные коэффициенты. Тогда

$$\operatorname{colon}\left(u(t), u'(t), \ldots, u^{(r)}(t)\right) = \mathcal{E}_r(t) \operatorname{colon}(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_r), \tag{4.12}$$

где $\mathcal{E}_r(t) =$

$$= \begin{pmatrix} \frac{s!}{s!}(t-c)^s E_l & \frac{(s+1)!}{(s+1)!}(t-c)^{s+1} E_l & \ldots & \frac{(s+r)!}{(s+r)!}(t-c)^{s+r} E_l \\ \frac{s!}{(s-1)!}(t-c)^{s-1} E_l & \frac{(s+1)!}{s!}(t-c)^{s} E_l & \ldots & \frac{(s+r)!}{(s+r-1)!}(t-c)^{s+r-1} E_l \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{s!}{(s-r)!}(t-c)^{s-r} E_l & \frac{(s+1)!}{(s+1-r)!}(t-c)^{s+1-r} E_l & \ldots & \frac{(s+r)!}{s!}(t-c)^{s} E_l \end{pmatrix}.$$

Умножив (4.10) слева на матрицу $\Omega(t_1)^{-1}$ и подставив (4.12), получим

$$-x_{1,0} = \int_{t_0}^{t_1} \Omega^{-1}(\tau) \left(H_0(\tau) \ \ldots \ H_r(\tau)\right) \mathcal{E}_r(\tau) \operatorname{colon}(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_r).$$

В силу того, что матрица $\mathcal{E}_r(t)$ обратима $\forall t \in T$, с учетом условия (4.11) и непрерывности матричных коэффициентов системы (3.8) можно показать, что при достаточно большом значении s для всех ненулевых $h \in \mathbf{R}^{n-d}$ выполняется соотношение $h^\top N \neq 0$, где

$$N = \int_{t_0}^{t_1} \Omega^{-1}(\tau) \left(H_0(\tau) \ H_1(\tau) \ \ldots \ H_r(\tau)\right) \mathcal{E}_r(\tau) d\tau.$$

Последнее означает полноту строчного ранга матрицы N. Таким образом, при достаточно большом s система (4.10) разрешима относительно неизвестных $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_r$ при любом векторе $x_{1,0}$:

$$\operatorname{colon}(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_r) = -N^\top \left(N N^\top\right)^{-1} x_{1,0}. \tag{4.13}$$

Все матрицы, фигурирующие в формулах (4.12), (4.13), либо постоянны, либо непрерывны на T, а следовательно, ограничены на T. Поэтому, выбирая значения $x_{1,0}$ таким образом, чтобы $\|x_{1,0}\| < \delta$ при достаточно малом $\delta > 0$, можно добиться того, чтобы построенное управление $u(t)$ было допустимым. □

Теорема 5. *Пусть:*
1) $F(t,x,y,u)\in \mathbf{C}^{2r+2}(\mathcal{D}), u(t)\in \mathbf{C}^{2r+1}(I)$*;*
2) $F(t,0,0,0)=0\ \forall t\in I$*;*
3) выполнены условия A), B), C);
4) $\operatorname{rank}\Gamma_{r+1,y}(\alpha_{r+1})=\operatorname{rank}\Gamma_{r,y}(\alpha_r)+n$.

Если система 1-го приближения (3.6) R-управляема или локально R-управляема в ноль на отрезке $T=[t_0,t_1]\subset I_\tau$*, то АДС (1.1) является локально R-управляемой в ноль на этом отрезке.*

Доказательство. В сделанных предположениях имеет место теорема 1, согласно которой на интервале I_0 АДС (1.1) эквивалентна системе (3.1), (3.2). По отношению к системе (3.1), (3.2) АДС (3.11), (3.12) является системой 1-го приближения.

Согласно лемме 1, если система (3.11), (3.12) R-управляема на некотором отрезке $T=[t_0,t_1]$, то система (3.1), (3.2) будет локально R-управляемой в ноль на этом же отрезке.

Из теоремы 1 следует, что решения системы (3.1), (3.2) на некотором интервале I_0 будут также решениями системы (1.1) с начальными условиями $x(t_0)=0, x(t_1)=x_1$ при одинаковом управлении. Это означает, что из R-управляемости или локальной R-управляемости в ноль системы (3.11), (3.12) следует локальная R-управляемость в ноль системы (1.1).

С другой стороны, система (3.6) является системой 1-го приближения для АДС (1.1). Система (3.6) и ее эквивалентная форма (3.8), (3.9) обладают одними и теми же свойствами управляемости. По теореме 3 система (3.8), (3.9) и система (3.11), (3.12) совпадают на некотором интервале $I_\tau\subset I_0$. Следовательно, они обладают свойствами R-управляемости и локальной R-управляемости в ноль одновременно.

Отсюда следует, что R-управляемость или локальная R-управляемость в ноль системы (3.6) на отрезке $T\subset I_\tau$ влечет за собой локальную R-управляемость в ноль системы (1.1) на этом отрезке. □

Список литературы

1. Щеглова А. А. Преобразование линейной алгебро-дифференциальной системы к эквивалентной форме / А. А. Щеглова // Тр. IX Четаев. Междунар. конф. «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением». – Иркутск : Изд-во ИДСТУ СО РАН, 2007. – Т. 5. – С. 298–307.
2. Щеглова А. А. Управляемость нелинейных алгебро-дифференциальных систем / А. А. Щеглова // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 10. – С. 57–80.
3. Шилов Г. Е. Математический анализ (функции нескольких вещественных переменных) / Г. Е. Шилов. – Ч. 1–2. – М. : Наука, 1972.

4. Dai L. Singular control system / L. Dai// Lecture notes in control and information sciences. – Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg ; N. Y, 1989. – Vol. 118.
5. Mehrmann V. Descriptor systems: a general mathematical framework for modelling, simulation and control / V. Mehrmann, T. Stykel // Automatisierungstechnik. – 2006. – N 8. – P. 405–415.

P. S. Petrenko

Local R-controllability to zero of nonlinear algebraic-differential systems

Abstract. We consider a control system of nonlinear ordinary differential equations unsolved with respect to the derivative of the desired vector function and identically degenerate in the domain of definition. An arbitrarily high index of unsolvability is allowed. The conditions of local R-controllability to zero (zero-controllability within the reachable set) of such system are obtained in terms of the first order linear approximation. In the linear case, it is shown that R-controllability implies local R-controllability to zero.

Keywords: differential-algebraic equations; nonlinear system; R-controllability in terms of the first order linear approximation

Аспирант, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова 134 (petrenko_p@mail.ru)

Post-graduate student, Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 664033, Russia, Irkutsk, Lermontov Str., 134 (petrenko_p@mail.ru)