Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 4. С. 58—65

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.958:550.3

Построение и анализ математических моделей для задач геомеханики

Ф. И. Иванов
Иркутский государственный университет

Аннотация. В статье дан обзор подходов к анализу данных и построению математических моделей в геомеханике, разрабатываемых автором и его коллегами. Представлена математическая модель сейсмического процесса Монголо-Байкальского сейсмического пояса в контексте современных требований: модель-алгоритм-программа.

Ключевые слова: динамические и статистические закономерности, математическая модель, нелинейное деформирование, очаг землетрясения, сейсмический процесс.

1. Введение

Основной задачей геомеханики является изучение состояния и процессов, протекающих в земной коре с целью предсказания развития напряженно-деформированного состояния различных ее участков. Область интересов автора сосредоточена в Байкальской рифтовой зоне, характеризующейся активными тектоническими движениями и, как следствие, высокой сейсмичностью. Исследование динамики сейсмической активности и сопоставление с результатами математического моделирования является сегодня основным инструментом решения задач в данной области.

Выбор подходов к построению математических моделей геомеханики определяется следующими общими соображениями.

Обозначив ряд землетрясений через $Q(t)$ можно построить корреляционную функцию:

$$C(s) = \frac{1}{< Q >^2} \int_0^\infty Q(t)Q(t+s)dt,$$

где радиус корреляции равен:

$$R = \int_0^\infty C(s)ds.$$

Если интеграл в этом уравнении сходится, получим:

1) переменная $Q(t)$ остается гауссовой для длительного периода времени;

2) кумулятивная переменная $q(t) = \int_0^t Q(s)ds$ характеризуется пределами:

$$< q^2 >\sim t \quad \text{для} \quad t \gg R,$$

$$< q^2 >\sim t^2 \quad \text{для} \quad t \ll R.$$

В случае, когда справедлив первый предел, мы утверждаем о статистической закономерности в процессе и, соответственно, аппаратом моделирования правомочно выбрать математический формализм стохастических систем. Для второго предела доступен аппарат классической механики или формализм детерминированных систем.

Можно предположить, что радиус корреляции бесконечен. В этом случае, допустима следующая запись:

$$< q^2 >\sim t^{2H},$$

где H — константа со значениями в диапазоне от 0,5 до 1. Это возможно, если принять, что процесс подобен для любых интервалов времени. Данный подход интенсивно развивается в последние десятилетия на базе математической теории фракталов. Мы в наших исследованиях этот аппарат использовали, но с большой осторожностью, поскольку существует опасность необоснованной экстраполяции ограниченного ряда наблюдений на бесконечные интервалы времени.

Необходимо подчеркнуть, что в механике сформированы общие достаточно жесткие требования к математическому моделированию:

– теоретические построения, которые принципиально не могут быть проверены на опыте, исключаются из рассмотрения;

– математические модели, объясняющие известные, но не способные предсказать новые факты, считаются неудовлетворительными.

В связи с данными требованиями все наши теоретические построения базируются преимущественно на собственных экспериментальных исследованиях деформационных свойств горных пород Прибайкалья [1–4].

2. Нелинейная модель очага землетрясения

В отличие от широко используемой в настоящее время динамической теории сейсмических источников, основанной на равновесии трещин в неоднородной геофизической среде и достаточно полно описывающей кинематику сейсмических волн, мы моделируем равновесие ансамбля частиц консолидированных сред (горных пород) в смысле обратимости динамических процессов. Для разработки полной динамической модели излучателей упругих волн (в том числе землетрясений) особенно важным является установление некоторых энергетических критериев предела стадии упругопластических (в противоположность упругим) деформаций. В наших исследованиях таким критерием установлена массовая скорость.

Модель базируется на следующих допущениях, установленных в экспериментах:

1) Деформационные свойства горных пород, представленных в Прибайкалье, с достаточной точностью могут описываться двумя независимыми параметрами: скоростью продольных волн (р-волны) и коэффициентом Пуассона. Диапазон изменения скоростей р-волн составляет 0,3–5,5 км/с и зависит преимущественно от пористости горных пород. Коэффициент Пуассона изменяется дискретно в диапазоне 0,25–0,5 и определяется свойствами заполнителя пустот (вода, воздух, лед).

2) Общий диапазон нелинейной реакции грунтов на воздействие, выраженное предельным значением массовой скорости в упругопластической стадии деформирования, составляет ***0,05–3,00 м/с***. Верхняя граница характеризует монолитные и слаботрещиноватые скальные породы, нижняя — обводненные грунты.

3) Добротность среды ($G = 120 - 150$) в зоне линейного деформирования слабо зависит от структуры и генезиса горных пород.

4) Характеристикой нелинейного деформирования в очаговой области землетрясения и локально в зонах транзитных землетрясений служат параметры поглощения сейсмической энергии. В соответствии с теоретическими предпосылками, экспериментально получена зависимость затухания от интенсивности нагрузок. Коэффициент затухания упругопластических волн пропорционален квадрату колебательной скорости.

Устойчивость границы перехода в стадию нелинейного деформирования для воздушно-сухих грунтов (***0,6–0,8 м/с***) определяет линейность шкалы интенсивности землетрясений в зонах транзитных землетрясений. Нелинейные эффекты, связанные с обводненностью грунта или другими факторами снижения прочности, могут рассматриваться как локальные.

Таким образом, используемое нами понятие «очаговая зона»; включает в себя собственно очаг, т.е. зону полностью необратимых деформаций (разрушения) и зону упругопластических деформаций, так что внешняя поверхность «очаговой зоны»; является излучателем упругой энергии. Массовая скорость на границе очаговой зоны составляет 0,7 м/с. Отсюда определяется размер очага и оценивается энергия землетрясения.

Экспериментальные данные по сейсмичности Прибайкалья систематизированы в терминах сейсмологии: магнитуда, энергетический класс землетрясения. Для перехода к задачам геомеханики, численными экспериментами установлен ряд соотношений, которые в случае однородного и изотропного пространства удобно представить в виде ***таблицы эквивалентности***:

R_0, ***км***	***K***	***M***	***lg(E, Дж)***	***lg***(E_0, ***Дж)***
0,11	7	1,7	11,10	13,17
0,18	8	2,2	11,77	13,86
0,31	9	2,8	12.44	14,57
0,54	10	3,3	13,09	15,28
0,92	11	3,9	13,70	15,99
1,60	12	4,4	14,50	16,76
2,70	13	5,0	15,10	17,39
4,60	14	5,6	15,87	18,07
7,9	15	6,1	16,60	18,80
17	16	6,7	17,35	19.50
23	17	7,2	17,99	20,17
40	18	7,8	18,70	20,88

Здесь: $\mathbf{R_0}$ — размер очага землетрясения, **K** — энергетический класс, **M** — магнитуда, **E** и $\mathbf{E_0}$ — энергия сейсмических волн и полная энергия в очаге землетрясения, соответственно.

Для решения задач прогноза сейсмической опасности в Монголо-Байкальском сейсмическом поясе, ранее нами обосновано соотношение в виде:

$$J = J_0 + 3,3 * lg\left(\frac{R_0(M)}{R_0(M)+R}\right), \quad \text{при} \quad R > R_0,$$

$$J \geq J_0, \quad \text{при} \quad R \leq R_0,$$

где $\mathbf{R_0}$ — размер очага землетрясения магнитуды **M** , $\mathbf{J_0 = 9}$ баллов по шкале С.В. Медведева, **R** — расстояние до гипоцентра землетрясения. Соответственно, в терминах массовых скоростей это соотношение принимает вид:

$$v = \frac{v_0 R_0}{R + R_0}, \quad \text{при} \quad R > R_0,$$

$$v_0 < v < v_{max}, \quad \text{при} \quad R < R_0$$

Здесь: $v_0 = 0,7$ м/с, $v_{max} = 3$ м/с.

Таким образом, таблица эквивалентности и последняя пара соотношений, обеспечивают переход от эмпирических соотношений сейсмологии к фазовому пространству классической механики с ее мощным аппаратом моделирования.

3. Стохастические модели сейсмичности Прибайкалья

Детерминированная модель нелинейного деформирования горных пород при землетрясении позволила оценить аддитивные инварианты сейсмического процесса: размер очага землетрясения и энергию сейсмических колебаний. Собственно, это и являлось основной задачей построения модели, инженерные приложения составили практически важную часть исследований только в первом приближении.

Количественная оценка энергии землетрясения, как аддитивного интеграла движения, позволяет с помощью простого преобразования

$$E_i + E_j \sim \lg[P(E_i)P(E_j)]$$

перейти к операторному представлению. Например, если в качестве представления рассматривается плотность распределения вероятностей, то:

$$P(E_i) \sim \exp(-E_i / < E >).$$

Подстановка на место энергии системы энергетической матрицы-гамильтониана H, приводит к построению матрицы плотности:

$$P(H_{ij}) \sim \exp(-H_{ij} / < H >).$$

Эти представления являются основными генераторами стохастических моделей механики.

Существенным здесь является то, что индивидуальная структура и механические свойства природного объекта являются функцией процесса. То есть, аналитические решения могут быть получены только для самых простых моделей. Такими моделями в геомеханике определены «равновесный сейсмический процесс» и «стационарный сейсмический процесс». Отличие данных моделей состоит в том, что в первом случае рассматривается полный баланс рассеянной в системе энергии, во втором исключаются процессы релаксации, в виде афтершоков сильных землетрясений.

Для случая ($E_i \gg< E >$) (катастрофические землетрясения), решения совпадают с классическим распределением Больцмана для обоих процессов:

$$P(E_i) \sim \exp(-E_i/ < E >).$$

Для слабых и сильных землетрясений ($E_i \ll< E >$), нами получены следующие решения: (здесь A и B — константы, определяемые при натурных наблюдениях в определенной сейсмоактивной зоне):

$$P(E_i) = \frac{A}{E_i} - \quad \text{равновесный сейсмический процесс,}$$

$$P(E_i) = \frac{B}{\sqrt{E_i}} - \quad \text{стационарный сейсмический процесс.}$$

Анализ полных рядов землетрясений в различных зонах Монголо-Байкальского сейсмического пояса дает следующую зависимость:

$$P(E_i) = \frac{C}{{E_i}^K},$$

где K принимает значения в диапазоне 0,5–1,0. Причем, приближение к верхней границе сопровождается существенными вариациями параметра «С». Соответственно, равновесный и стационарный процессы рассматриваются нами как мажоранта и миноранта реального сейсмического процесса, описываемого гамильтонианом $H = H(p, q, t)$.

Прогноз периодичности сильных землетрясений естественно должен строиться на основе миноранты сейсмического процесса, что накладывает дополнительное требование очистки временного ряда от процессов релаксации. Численные эксперименты методом Монте-Карло на автономных модельных системах $H = H(p, q)$, построенных на основе различных предположений об эффективных силах, действующих в земной коре, подтвердили устойчивость параметров стационарного процесса.

4. Алгоритм прогноза сейсмической опасности Прибайкалья

Инструментарий детерминированных систем реализован нами для решения зада прогноза интенсивности и сейсмического воздействия сильных землетрясений Прибайкалья. В модель включается вся цепочка «очаг землетрясения — зона линейного деформирования — приповерхностная структура грунтов — сооружение».

Полная вычислительная схема прогноза сейсмической опасности для выбранной территории включает в себя следующие программные модули:

1) Модуль спектрального анализа временного ряда на основе исторических и инструментальных данных.

2) Модуль прогноза массовых скоростей и их спектра в очаговой зоне и для транзитных землетрясений.

3) Модуль локализации зон нелинейного деформирования и численного эксперимента на основе нелинейных уравнений волновой динамики.

4) Модуль расчета резонансных частот неоднородного слоя и коэффициентов динамичности стандартных зданий.

В качестве примера реализации модели представлена таблица оценок цикличности землетрясений различной интенсивности для г. Иркутск.

Диапазон интенсивности	Менее 5 баллов	5-6 баллов	6-7 баллов	Более 7 баллов	Цикл Федотова
Период	3 года	8 лет	23 года	90 лет	140 лет

Список литературы

1. Джурик В.И. Сейсмические свойства скальных грунтов / В. И. Джурик, Ф. И. Иванов, В. А. Потапов. – Новосибирск : Наука, 1986. – 134 с.
2. Иванов Ф. И. Инженерная сейсмология: нелинейные приближения / Ф. И. Иванов, В. А. Потапов. – Иркутск : изд-во Ирк. ун-та, 1994. – 97 с.
3. Павлов О. В. Анализ колебаний грунтов при землетрясениях / О. В. Павлов, А. Ф. Дреннов, Ф. И. Иванов. – Новосибирск : Наука, 1983. – 97 с.
4. Потапов В. А. Дискретные и непрерывные модели в сейсмологии / В. А. Потапов, Ф. И. Иванов. – Иркутск : Институт земной коры СО РАН, 2005. – 196 с.
5. Садовский М. А. От сейсмологии к геомеханике / М. А. Садовский, В. Ф. Писаренко, В. Н. Родионов // Вестник АН СССР. – 1983. – № 1. – С. 32–38.

F. I. Ivanov

Construction and analysis of mathematical models in geomechanics

Abstract. The article present overview of approaches to data analysis and mathematical modeling in geomechanics, that was developed by author and his colleagues. Mathematical model of seismic process in Mongolian-Baikal seismic belt presents in context of the modern requirements: model-algorithm-program.

Keywords: dynamic and static principles, mathematical model, non-linear warping, earthquake source, seismic process

Иванов Федор Илларионович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664000, Иркутск, ул. К. Маркса, 1 тел.: (3952)242210 (`fivanov@math.isu.ru`)

Fedor Ivanov, professor, Irkutsk State University, 1, K. Marks St., Irkutsk, 664003 Phone: (3952)242210 (`fivanov@math.isu.ru`)