Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 4. С. 39—44

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
*Иркутского государственного университета*

УДК 519.1

# Комбинаторное тождество из теории интегральных представлений в $\mathbb{C}^n$

Г. П. Егорычев
*Сибирский федеральный университет*

**Аннотация.** В этой заметке с помощью метода коэффициентов Егорычева интегрального представления и вычисления комбинаторных сумм, развитого им к концу 1970-х гг., коротко вычислено несколько кратных комбинаторных сумм, частные случаи которых ранее возникли в работах других авторов в теории интегральных представлений в $\mathbb{C}^n$, квантовой физике и теории дилатаций.

**Ключевые слова:** комбинаторные суммы; метод коэффициентов; интегральные представления.

В конце 1970-х гг. Г. П. Егорычев [1] разработал метод коэффициентов, который нашел успешное применение при вычислении комбинаторных сумм различного типа ([1, 7]; см. также [5, 2]). В работе [3] развита теория интегральных представлений для голоморфных функций в линейно выпуклых областях $D \subset \mathbb{C}^n$ с кусочно-регулярной границей, что позволило В. П. Кривоколёско в [4] найти серию комбинаторных тождеств для определённого семейства параметров интегральной области $D$. В их числе следующее тождество

$$\alpha_1^{s_1+1}\sum_{k=0}^{s_2}\sum_{l=0}^{s_3}\frac{(s_1+k+l)!}{s_1!k!l!}\alpha_2^k\alpha_3^l+\alpha_2^{s_2+1}\sum_{k=0}^{s_1}\sum_{l=0}^{s_3}\frac{(s_2+k+l)!}{s_2!k!l!}\alpha_1^k\alpha_3^l+$$
$$+\alpha_3^{s_3+1}\sum_{k=0}^{s_1}\sum_{l=0}^{s_2}\frac{(s_3+k+l)!}{s_3!k!l!}l\alpha_1^k\alpha_2^l=1, \tag{1}$$

где числовые параметры $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ удовлетворяют равенству $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$. В. П. Кривоколеско поставил вопрос о нахождении простого доказательства следующего тождества (2), обобщающего тождество (1):

$$z_1^{s_1+1}\sum_{j_2=0}^{s_2}\cdots\sum_{j_n=0}^{s_n}\binom{s_1+\sum_{i\neq 1}j_i}{s_1,j_2,\ldots,j_n}z_2^{j_2}\cdots z_n^{j_n}+\ldots+$$

$$+z_n^{s_n+1}\sum_{j_1=0}^{s_1}\dots\sum_{j_{n-1}=0}^{s_{n-1}}\binom{s_n+\sum_{i\neq n}j_i}{s_n,j_1,\dots,j_{n-1}}z_1^{j_1}\cdots z_{n-1}^{j_{n-1}}=1, \tag{2}$$

для любых значений параметров $s_1,\dots,s_n=0,1,2,\dots$, где числовые параметры $z_1,\dots,z_n$ удовлетворяют равенству

$$z_1+\ldots+z_n=1. \tag{3}$$

Частными случаями (2) являются тождества В. Л. Шелковича в квантовой теории поля [6] и вероятностные тождества Д. Зейлбергера в теории дилатаций (the wavelet theory) [8].

Здесь в теореме 1 с помощью метода коэффициентов найдена изящная формула интегрального представления (производящая функция) для суммы (4), которая является естественным обобщением суммы в левой части тождества (2). Это позволило найти короткое аналитическое доказательство искомого тождества (2) (лемма 2). Кроме того, найдено несколько интересных рекуррентных соотношений для вычисления кратных комбинаторных сумм различного типа (леммы 3 и 4).

**Теорема 1.** *Пусть сумма*

$$S_s(z;\alpha):=z_1^{s_1+1}\sum_{j_2=0}^{s_2}\dots\sum_{j_n=0}^{s_n}\binom{\alpha+s_1+\sum_{i\neq 1}j_i}{\alpha,s_1,j_2,\dots,j_n}z_2^{j_2}\cdots z_n^{j_n}+\ldots+$$

$$+z_n^{s_n+1}\sum_{j_1=0}^{s_1}\dots\sum_{j_{n-1}=0}^{s_{n-1}}\binom{\alpha+s_n+\sum_{i\neq n}j_i}{\alpha,s_n,j_1,\dots,j_{n-1}}z_1^{j_1}\cdots z_{n-1}^{j_{n-1}}, \tag{4}$$

*где действительный параметр $\alpha\geq 0$, а комплексные параметры $z_1,\dots,$ $z_n$ удовлетворяют соотношению (3). Тогда производящая функция*

$$T_\alpha(t):=\sum_{s_i\geq 0}S_s(z;\alpha)\,t_1^{s_1}\dots t_n^{s_n} \tag{5}$$

*для последовательности $\{S_s(z;\alpha)\}_{s_i\geq 0}$ имеет вид*

$$T_\alpha(t)=(1-\sum_i z_it_i)^{-\alpha}\prod\nolimits_i(1-t_i)^{-1}. \tag{6}$$

*Доказательство.* Следуя схеме вычислений метода коэффициентов найдём вначале интегральное представление для каждого слагаемого $R_k(z)$, $k=1,...,n$ в $(4)$. Например,

$$R_1(z):=z_1^{s_1+1}\sum_{j_2=0}^{s_2}\dots\sum_{j_n=0}^{s_n}\binom{\alpha+s_1+\sum_{i\neq 1}j_i}{\alpha,s_1,j_2,\dots,j_n}z_2^{j_2}\cdots z_n^{j_n}=$$

$$= z_1^{s_1+1} \sum_{j_2=0}^{s_2} \dots \sum_{j_n=0}^{s_n} \binom{\alpha + s_1 + \sum_{i\neq 1}(s_i - j_i)}{\alpha, s_1, s_2 - j_2, \dots, s_n - j_n} z_2^{s_2-j_2} \cdots z_n^{s_n-j_n} =$$

$$= z_1 \sum_{j_2=0}^{s_2} \dots \sum_{j_n=0}^{s_n} \mathbf{res}_x \frac{(1-\sum_i z_i x_i)^{-\alpha-1}}{x_1^{s_1+1} x_2^{s_2-j_2+1} \dots x_n^{s_n-j_n+1}} =$$

(правило линейности для оператора $\mathbf{res}_x$ : занесение знака сумм под знак $\mathbf{res}_x$)

$$= z_1 \mathbf{res}_x \{ \sum_{j_2=0}^{\infty} \dots \sum_{j_n=0}^{\infty} \frac{(1-\sum_i z_i x_i)^{-\alpha-1}}{x_1^{s_1+1} x_2^{s_2-j_2+1} \dots x_n^{s_n-j_n+1}} \} =$$

(суммирование по индексам $j_2, \dots, j_n$ по формуле суммы геометрической прогрессии)

$$= z_1 \mathbf{res}_x (1-\sum_i z_i x_i)^{-\alpha-1} \prod\nolimits_{i\neq 1} (1-x_i)^{-1} \times \prod\nolimits_i x_i^{-s_i-1}.$$

Отсюда

$$P_1(t,z) := \sum_{s_i \geq 0} R_1(z)\, t_1^{s_1} \dots t_n^{s_n} =$$

$$= z_1 \sum_{s_i\geq 0} \mathbf{res}_x (1-\sum_i z_i x_i)^{-\alpha-1} \prod_{i\neq 1} (1-x_i)^{-1} \times \prod\nolimits_i x_i^{-s_i-1} t_i^{s_i} =$$

(суммирование по индексам $s_1, \dots, s_n$ : правило подстановки для оператора $\mathbf{res}$, замены $x_i = t_i$, $i = 1, ..., n$)

$$= z_1 (1-\sum_i z_i t_i)^{-\alpha-1} \prod_{i\neq 1} (1-t_i)^{-1} = \frac{z_1(1-t_1)}{1-\sum_i z_i t_i} \prod_i (1-t_i)^{-1}.$$

Таким образом,

$$T(t,z) := \sum_i P_i(t,z) = \frac{z_1(1-t_1) + \ldots + z_n(1-t_n)}{(1-\sum_i z_i t_i)^{\alpha+1}} \prod_i (1-t_i)^{-1} =$$

$$= \frac{\sum_i z_i - \sum_i z_i t_i}{(1-\sum_i z_i t_i)^{\alpha+1}} \prod_i (1-t_i)^{-1}, \qquad (7)$$

и с учётом (3) мы получаем требуемую формулу (6):

$$T_\alpha(t) := [T(t,z)]_{z_1+\ldots z_n=1} = \frac{1-\sum_i z_i t_i}{(1-\sum_i z_i t_i)^{\alpha+1}} \prod_i (1-t_i)^{-1} =$$

$$= (1-\sum_i z_i x_i)^{-\alpha} \prod_i (1-t_i)^{-1}.$$

□

**Лемма 1.** *Тождество (2) справедливо.*

*Доказательство.* Если обозначить выражение в левой части тождества (2) через $S_s(z)$, то $S_s(z) := S_s(z;0)$, и в соответствии с (6) мы имеем для всех $s_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n,$

$$S_s(z) := \mathbf{res}_t T_0(t)\, t_1^{-s_1-1} \ldots t_n^{-s_n-1} = \mathbf{res}_t \prod_i (1-t_i)^{-1}\, t_1^{-s_i-1} =$$

$$\mathbf{res}_t (1 + \sum_{j_1=1}^{\infty} t_1^{j_1}) \ldots (1 + \sum_{j_n=1}^{\infty} t_n^{j_n}) \prod_i t_1^{-s_i-1} = 1.$$

□

**Лемма 2.** *Справедлива следующая формула суммирования для чисел* $S_s(z;\alpha)$ :

$$S_s(z;\alpha+1) - z_1 S_{s_1-1,s_2,\ldots,s_n}(z;\alpha+1) - \ldots -$$

$$-z_n S_{s_1,s_2,\ldots,s_n-1}(z;\alpha+1) = S_s(z;\alpha),\ \ \alpha = 0,1,2,\ldots. \qquad (8)$$

*В частности, из* (8) *при* $\alpha = 0$ *с учётом леммы 1 и соотношения* $S_s(z;0) := S_s(z) = 1$ *справедлива следующая рекуррентная формула:*

$$S_s(z;1) = 1 + z_1 S_{s_1-1,s_2,\ldots,s_n}(z;1) + \ldots + z_n S_{s_1,s_2,\ldots,s_n-1}(z;1). \qquad (9)$$

*Доказательство.* Согласно (5) и (6) для любых $s_i = 0, 1.2, \ldots$мы имеем

$$S_s(z;\alpha) := \mathbf{res}_t T_\alpha(t)\, (\prod\nolimits_i t_i^{-s_i-1}) =$$

$$= \mathbf{res}_{t_1,\ldots,t_n} (1 - \sum_i z_i t_i)^{-\alpha} \prod\nolimits_i (1-t_i)^{-1}\, t_i^{-s_i-1} = \qquad (10)$$

$$= \mathbf{res}_{t_1,\ldots,t_n} \{(1 - \sum_i z_i t_i)^{-\alpha-1} \prod\nolimits_i (1-t_i)^{-1}\}(1 - \sum_i z_i t_i)(\prod\nolimits_i t_i^{-s_i-1}) =$$

$$= \mathbf{res}_{t_1,\ldots,t_n} T_{\alpha+1}(t)\, (1 - \sum_i z_i t_i)(\prod\nolimits_i t_i^{-s_i-1}) =$$

(по линейности оператора $\mathbf{res}_t$)

$$= \mathbf{res}_{t_1,\ldots,t_n} T_{\alpha+1}(t) \prod\nolimits_i t_i^{-s_i-1} - z_1 \mathbf{res}_{t_1,\ldots,t_n} T_{\alpha+1}(t)\, t_1^{-(s_1-1)-1} (\prod\nolimits_{i\neq 1} t_i^{-s_i-1}) -$$

$$- \ldots - z_n \mathbf{res}_{t_1,\ldots,t_n} T_{\alpha+1}(t)\, t_n^{-(s_n-1)-1} (\prod\nolimits_{i\neq n} t_i^{-s_i-1})$$

(согласно определения (10))

$$= S_s(z;\alpha+1) - z_1 S_{s_1-1,s_2,\ldots,s_n}(z;\alpha+1) - \ldots - z_1 S_{s_1,s_2,\ldots,s_n-1}(z;\alpha+1).$$

□

**Лемма 3.** *Пусть $S_s(z;\alpha,\beta)$ есть числа, определяемые формулой (4), где параметр $\alpha \geq 0$, а комплексные параметры $z_1,\ldots,z_n,\beta$ удовлетворяют соотношению*

$$z_1+\ldots+z_n=\beta. \tag{11}$$

*Очевидно,*

$$S_s(z;\alpha,1):=S_s(z;\alpha),\ S_s(z;0,1):=S_s(z), \tag{12}$$

$$S_s(z_1,\ldots z_n;\alpha,\beta)=S_s(z_1/\beta,\ldots z_n/\beta;\alpha),\ if\ \beta\neq 0. \tag{13}$$

*Тогда производящая функция*

$$T_{\alpha,\beta}(t):=\sum_{s_i\geq 0} S_s(z;\alpha,\beta)\, t_1^{s_1}\ldots t_n^{s_n} \tag{14}$$

*для последовательности $\{S_s(z;\alpha,\beta)\}_{s_i\geq 0}$ имеет вид*

$$T_{\alpha,\beta}(t)=(\beta-\sum_i z_i t_i)(1-\sum_i z_i t_i)^{-\alpha-1}\prod\nolimits_i (1-t_i)^{-1}, \tag{15}$$

*и справедлива следующая формула для чисел $S_s(z;\alpha,\beta)$ :*

$$S_s(z;\alpha,\beta)=(\beta-1)\,S_s(z;\alpha+1,1)+S_s(z;\alpha,1),\ \alpha=1,2,\ldots. \tag{16}$$

*Другими словами, если $\beta\notin\{0,1\}$, то с учётом (12) и (13) следующая рекуррентная формула для чисел $S_s(z;\alpha)$ справедлива:*

$$S_s(\beta z;\alpha+1)=\frac{1}{\beta-1}\left(S_s(z;\alpha)-S_s(\beta z;\alpha)\right),\ \alpha=1,2,\ldots. \tag{17}$$

*Доказательство.* Формула (15) непосредственно следует из (7) с учётом равенства (11). Таким образом, мы имеем

$$T_{\alpha,\beta}(t)=(\beta-\sum_i z_i t_i)(1-\sum_i z_i t_i)^{-\alpha-1}\prod\nolimits_i (1-t_i)^{-1}=$$

$$=(\beta-1)\,(1-\sum_i z_i t_i)^{-\alpha-1}\prod\nolimits_i (1-t_i)^{-1}+(1-\sum_i z_i t_i)^{-\alpha}\prod\nolimits_i (1-t_i)^{-1}:=$$

(по формуле (6))

$$=(\beta-1)\,T_{\alpha+1}(t)+T_\alpha(t). \tag{18}$$

Приравнивая коэффициенты при мономах $t_1^{s_1}\ldots t_n^{s_n}$ в правой и левой частях равенства (18), получаем соотношение (16). □

**Замечание 1.** Выше мы указали, что тождество (2) для сумм $S_s(z)$, как и его частные случаи, находят приложения в теории интегральных представлений [4], квантовой теории поля [6] и теории дилатаций [8]. Мы имеем, по определению, $S_s(z;1,1)=S_s(z,1)=S_s(z)$. На наш взгляд, представляет интерес нахождение интерпретаций в этих теориях соотношений (8), (9), (16) и (17) для сумм $S_s(z;\alpha)$ и $S_s(z;\alpha,\beta)$, более общих, нежели исходные суммы в тождествах (1) и (2).

## Список литературы

1. Егорычев Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм / Г. П. Егорычев. – Новосибирск : Наука, 1977. (English transl. Math. Monogr. **59**, Amer. Math. Soc., Providence. RI 1984; 2nd ed. in 1989.)
2. Егорычев Г. П. Перечислительные проблемы в некоторых матричных кольцах и конечных группах / Г. П. Егорычев, М. Н. Давлетшин // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2010. – Т. 3, № 4. – С. 21–32.
3. Кривоколеско В. П. Интегральные представления в линейно выпуклых полиэдрах / В. П. Кривоколеско, А. К. Цих // Сиб. мат. журн. – 2005. – Т. 46, № 3. – С. 579–593.
4. Кривоколеско В. П. Интегральные представления в линейно выпуклых полиэдрах и некоторые комбинаторные тождества / В. П. Кривоколеско // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика & Физика. – 2009. – Т. 2, № 2.– С. 176–188.
5. Леонтьев В. К. Избранные проблемы комбинаторного анализа / В. К. Леонтьев. – М. : МВТУ, 2001.
6. Шелкович В. М. Алгебра распределений с точечным сингулярным носителем / В. М. Шелкович. – ДАН СССР. – 1982. – Т. 267, № 1. – С. 53–57.
7. Egorychev G.P. Method of coefficients: an algebraic characterization and recept applications / G. P. Egorychev. – Labours Waterloo Workshop on Computer Algebra, Waterloo 5-7 May 2008. – Springer Verlag, 2009. – P. 1–33.
8. Zeilberger D. On an Identity of Daubechies / D. Zeilberger // Amer. Math. Monthly. – 1983. – Vol. 100. – P. 487.

---

**G. P. Egorychev**

**Combinatorial identity from the theory of integral representations in $\mathbb{C}^n$**

**Abstract**. At the end of the 1970's, the author developed a method of coefficients, which has found successful application to work with combinatorial sums. In this article, the method of coefficients calculated the some multiple sums. Special cases of these sums were considered earlier in the theory of integral representations, the quantum physics and the wavelet theory.

**Keywords:** combinatorial sums; the method of coefficients; integral representation.

Егорычев Георгий Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, Сибирский федеральный университет, Красноярск, тел.: (391)2461609 (`anott@scn.ru`)

Egorychev Georgy, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, professor, Phone: (391) 2461609 (`anott@scn.ru`)