Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 4. С. 45—57

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.9

Фазовое пространство уравнения соболевского типа высокого порядка

А. А. Замышляева
Южно-Уральский государственный университет

Аннотация. Рассматривается задача Коши для линейного неоднородного уравнения соболевского типа высокого порядка. Предложен алгоритм построения фазового пространства данного уравнения, установлена однозначная разрешимость задачи Коши.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, полиномиально ограниченные пучки операторов, пропагаторы, фазовые пространства.

Введение

Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$ банаховы пространства; операторы $A,\ B_{n-1},\ldots,B_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Рассмотрим задачу Коши

$$v(0) = v_0,\ v'(0) = v_1,\ \ldots,\ v^{(n-1)}(0) = v_{n-1} \tag{0.1}$$

для операторно-дифференциального уравнения высокого порядка

$$Av^{(n)}(t) = B_{n-1}v^{(n-1)}(t) + \cdots + B_0v(t) + f(t),\ n \geq 1. \tag{0.2}$$

Нас интересует разрешимость задачи (0.1), (0.2) в случае необратимости оператора A, когда $\ker A \neq \{0\}$. Г.А.Свиридюк ввел понятие фазового пространства [6] однородного уравнения (0.2), как множества, содержащего все его решения и являющегося замыканием множества допустимых начальных значений задачи Коши для этого уравнения. Если оператор A непрерывно обратим, то уравнение (0.2) тривиально редуцируется к уравнению

$$v^{(n)}(t) = C_{n-1}v^{(n-1)}(t) + \cdots + C_0v(t) + h(t), \tag{0.3}$$

где $C_k = A^{-1}B_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}),\ k = 0, 1, \ldots, n-1$, и поэтому фазовым пространством уравнения (0.2) будет служить все пространство $\mathcal{U}$. Нашей целью является описание *морфологии* фазового пространства уравнения (0.2), когда оператор A не является непрерывно обратимым.

В литературе уравнения вида (0.2) и конкретные его интерпретации часто называют *уравнениями соболевского типа*, отдавая честь первооткрывателю. В дальнейшем всюду мы считаем этот термин синонимом терминов «псевдопараболические уравнения», «уравнения типа Соболева», «уравнения типа Соболева-Гальперна» и «уравнения не типа Коши-Ковалевской».

Фазовое пространство уравнения (0.2) при $n = 1$ изучено достаточно полно. Прежде всего здесь следует отметить работы Г.А.Свиридюка, в которых полностью изучены фазовые пространства уравнения (0.2) в случаях, когда оператор B_0 (A,p)- ограничен и (A,p)-секториален. Работа [6] стала основой для многих исследований [1],[4],[5]. Среди всех отметим результаты В.Е. Федорова, в которых всесторонне изучены фазовые пространства уравнений (0.2) при $n = 1$ при условии (A,p)-радиальности оператора B_0. В настоящее время эти результаты обобщают результаты A.Favini и A.Jagi и служат основой для многочисленных приложений.

Попытка изучения фазового пространства уравнения (0.2) при $n > 1$, с использованием методов теории вырожденных полугрупп операторов, была впервые сделана в [2]. Здесь исследован случай полного уравнения соболевского типа второго порядка, построено семейство вырожденных M,N-функций и изучено фазовое пространство данного уравнения.

В первых двух параграфах статьи изложены без доказательства результаты, связанные с относительно полиномиально ограниченными пучками операторов, полученные автором ранее [2], [3]. В п. 3 определяются $\vec{B}$-присоединенные векторы оператора A [3] исследуется их связь с относительными резольвентами пучка $\vec{B}$. П. 4 содержит результаты о пропагаторах [3] – операторах-решениях однородного уравнения (0.2). В пятом параграфе построено и изучено фазовое пространство уравнения (0.2). В заключительном параграфе получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи Коши для неоднородного уравнения (0.2).

1. Относительные резольвенты пучков операторов

Определение 1. Множества

$$\rho^A(\vec{B}) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu^n A - \mu^{n-1} B_{n-1} - ... - \mu B_1 - B_0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})\}$$

и $\sigma^A(\vec{B}) = \overline{\mathbf{C}} \backslash \rho^A(\vec{B})$ будем называть, соответственно A - *резольвентным множеством* и A - *спектром пучка* $\vec{B}$.

Определение 2. Оператор-функцию комплексной переменной $R^A_\mu(\vec{B}) = (\mu^n A - \mu^{n-1}B_{n-1} - ... - \mu B_1 - B_0)^{-1}$ с областью определения $\rho^A(\vec{B})$ будем называть *A-резольвентой пучка* $\vec{B}$.

Лемма 1. *Пусть операторы $A, B_{n-1}, ..., B_0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U};\mathcal{F})$. Тогда $R^A_\lambda(\vec{B})$ является непрерывной в смысле сходимости по операторной норме функцией комплексной переменной.*

Теорема 1. $R^A_\mu(\vec{B})$ *аналитична в своей области определения.*

Лемма 2. *Пусть $\lambda, \mu \in \rho^A(\vec{B})$, тогда*

(i) $\ker R^A_\lambda(\vec{B})A = \ker A$, $\mathrm{im} R^A_\lambda(\vec{B}) = \mathrm{im} R^A_\mu(\vec{B})$;

(ii) $\ker AR^A_\mu(\vec{B}) = \{\mu^{n-1}B_{n-1}u + ... + B_0 v : v \in \ker A\}$, $\mathrm{im} AR^A_\mu(\vec{B}) = \mathrm{im} AR^A_\lambda(\vec{B})$.

2. Относительно спектральные проекторы

Определение 3. Пучок операторов $\vec{B}$ называется *полиномиально ограниченным относительно оператора* A (или просто *полиномиально A-ограниченным*), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \mu \in \mathbf{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (R^A_\mu(\vec{B}) \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})).$$

Введем и обсудим одно важное в дальнейшем условие. Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен. Тогда

$$\int\limits_\gamma \mu^k R^A_\mu(\vec{B}) d\mu \equiv \mathbb{O}, \ k = 0, 1, ..., n-2, \tag{$*$}$$

где контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$.

Замечание 1. Пусть существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F};\mathcal{U})$, тогда условие $(*)$ выполняется.

Замечание 2. В случае $n = 1$ условие $(*)$ не имеет смысла.

Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и выполнено $(*)$. Фиксируем контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$. Тогда имеют смысл следующие операторы как интегралы от аналитических функций:

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R^A_\mu(\vec{B}) \mu^{n-1} A d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma \mu^{n-1} A R^A_\mu(\vec{B}) d\mu. \tag{2.1}$$

Лемма 3. *Пусть пучок* $\vec{B}$ *полиномиально A-ограничен и выполнено условие* $(*)$. *Тогда операторы* $P \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$ *и* $Q \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ *– проекторы.*

Положим $\mathcal{U}^0 = \ker P$, $\mathcal{F}^0 = \ker Q$, $\mathcal{U}^1 = \mathrm{im}P$, $\mathcal{F}^1 = \mathrm{im}Q$. Из предыдущей леммы следует, что $\mathcal{U} = \mathcal{U}^0 \oplus \mathcal{U}^1, \quad \mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \oplus \mathcal{F}^1$. Через A^k (B_l^k) обозначим сужение оператора A (B_l) на $\mathcal{U}^k$, $k = 0,1;$ $l = 0,1,...,n-1$.

Теорема 2. *Пусть пучок* $\vec{B}$ *полиномиально A-ограничен и выполнено условие* $(*)$. *Тогда действия операторов расщепляются:*
(i) $A^k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^k;\mathcal{F}^k),\ k = 0,1$;
(ii) $B_l^k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^k;\mathcal{F}^k),\ k = 0,1,\ l = 0,1,...,n-1$;
(iii) существует оператор $(A^1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1;\mathcal{U}^1)$.

Следствие 1. *В условиях теоремы* $\sigma_0^A(\vec{B}) = \emptyset$.

Следствие 2. *Пусть пучок* $\vec{B}$ *полиномиально A-ограничен и выполнено* $(*)$. *Тогда существует оператор* $(B_0^0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0;\mathcal{U}^0)$.

Обозначим $H_0 = (B_0^0)^{-1}A^0,\ H_k = (B_0^0)^{-1}B_k^0,\ k = 1,2,...,n-1;$ $S_k = (A^1)^{-1}B_k^1,\ k = 0,1,...,n-1$, и построим оператор-функции

$$R_{\mu,k}^A(\vec{B}) = (\mu^n A^k - \mu^{n-1}B_{n-1}^k - ... - B_0^k)^{-1},\ k = 0,1.$$

Очевидно,

$$R_\mu^A(\vec{B}) = R_{\mu,0}^A(\vec{B})(\mathbb{I} - Q) + R_{\mu,1}^A(\vec{B})Q. \tag{2.2}$$

В силу следствия 1 функция $R_{\mu,0}^A(\vec{B})$ является целой. Поэтому представим ее рядом Тейлора

$$R_{\mu,0}^A(\vec{B}) = -\sum_{k=0}^{\infty}(\mu^n H_{n-1} - ... - \mu H_0)^k (B_0^0)^{-1}, \tag{2.3}$$

абсолютно и равномерно сходящимся на любом компакте в $\mathbb{C}$. Операторы $S_k \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1),\ k = 0,1,...,n-1$ по построению. Поэтому $R_{\mu,1}^A(\vec{B})$ можно представить рядом Неймана

$$R_{\mu,1}^A(\vec{B}) = \mu^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}(\mu^{-1}S_{n-1} + ... + \mu^{-n}S_0)^k (A^1)^{-1}, \tag{2.4}$$

абсолютно и равномерно сходящимся на любом компакте, лежащем вне некоторого круга с центром вначале координат. В силу (2.2)–(2.4) доказано

Следствие 3. *Пусть пучок* $\vec{B}$ *полиномиально* A*-ограничен и выполнено* $(*)$. *Тогда существует константа* $b \in \mathbb{R}_+$ $(b \geq a)$ $\forall \mu \in \mathbb{C}$ $(|\mu| > b) \Rightarrow$

$$R^A_\mu(\vec{B}) = -\sum_{k=0}^{\infty}(\mu^n H_{n-1} - ... - \mu H_0)^k (B_0^0)^{-1}(\mathbb{I} - Q) +$$

$$\mu^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}(\mu^{-1}S_{n-1} + ... + \mu^{-n}S_0)^k (A^1)^{-1} Q. \tag{2.5}$$

Замечание 3. При $n = 1$ представление (2.5) совпадает с разложением относительной резольвенты оператора в ряд Лорана.

3. Относительно присоединенные векторы

Определение 4. Пусть $\ker A \neq \{0\}$, вектор $\varphi_0 \in \ker A \setminus \{0\}$ будем называть собственным вектором оператора A. Упорядоченное множество векторов $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ называется цепочкой $\vec{B}$-присоединенных векторов собственного вектора φ_0, если

$$A\varphi_0 = 0;$$

$$A\varphi_1 = B_{n-1}\varphi_0;$$

$$A\varphi_2 = B_{n-1}\varphi_1 + B_{n-2}\varphi_0;$$

$$...$$

$$A\varphi_n = B_{n-1}\varphi_{n-1} + B_{n-2}\varphi_{n-2} + ... + B_1\varphi_1 + B_0\varphi_0;$$

$$A\varphi_{n+q} = B_{n-1}\varphi_{n+q-1} + B_{n-2}\varphi_{n+q-2} + ... + B_1\varphi_{q+1} + B_0\varphi_q;$$

$$q = 1, 2.., \quad \varphi_l \notin \ker A \setminus \{0\},\ l = 1, 2, ... \tag{3.1}$$

Для присоединенного вектора φ_q определим высоту, равной порядковому номеру вектора в цепочке. Линейную оболочку всех собственных и $\vec{B}$-присоединенных векторов оператора A назовем его $\vec{B}$- корневым линеалом. $\vec{B}$- корневым пространством будем называть замкнутый $\vec{B}$-корневой линеал оператора A.

Цепочка $\vec{B}$-присоединенных векторов может быть бесконечной. В частности, она может быть заполнена нулями, если

$$\varphi_0 \in \ker A \cap \ker B_{n-1} \cap \ker B_{n-2} \cap ... \cap \ker B_1 \cap \ker B_0.$$

Но она будет конечной в случае существования такого $\vec{B}$-присоединенного вектора φ_q, что $B_{n-1}\varphi_q + B_{n-2}\varphi_{q-1} + ... + B_0\varphi_{q-n+1} \notin \mathrm{im}A$. Высоту q последнего $\vec{B}$-присоединенного вектора в конечной цепочке $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_q\}$ будем называть длиной этой цепочки.

Замечание 4. $\overrightarrow{B}$-корневой линеал оператора A состоит только из собственных, B-присоединенных векторов оператора A и нуля.

Лемма 4. *Пусть φ_q – $\vec{B}$-присоединенный вектор оператора A высоты q, тогда при любом $\mu \in \rho^A(\vec{B})$ имеют место следующие тождества*

$$-R^A_\mu(\vec{B})\mu^{n-1}A\varphi_q = \varphi_{q-1} + \mu\varphi_{q-2} + ... + \mu^{n-1}\varphi_0 + R^A_\mu(\vec{B})\times$$
$$\times[(\mu^{n-2}B_{n-2} + ... + B_0)\varphi_{q-1} + (\mu^{n-3}B_{n-3} + ... + B_0)\mu\varphi_{q-2}+$$
$$+... + (\mu B_1 + B_0)\mu^{n-3}\varphi_{q-n+2} + \mu^{n-2}B_0\varphi_{q-n+1}] \tag{3.2}$$

$$-R^A_\mu(\vec{B})\mu^{n-2}A\varphi_q = \varphi_{q-2} + \mu\varphi_{q-3} + ... + \mu^{n-2}\varphi_0 + R^A_\mu(\vec{B})\times$$
$$\times[(\mu^{n-1}A - \mu^{n-2}B_{n-1})\varphi_{q-1} + R^A_\mu(\vec{B})(\mu^{n-3}B_{n-3} + ... + B_0)\mu\varphi_{q-2}+$$
$$+... + (\mu B_1 + B_0)\mu^{n-4}\varphi_{q-n+2} + \mu^{n-3}B_0\varphi_{q-n+1}] \tag{3.3}$$

$$\cdots$$

$$-R^A_\mu(\vec{B})A\varphi_q = \varphi_0 + R^A_\mu(\vec{B})[(\mu A - B_{n-1})\varphi_{q-1} + (\mu^2 A - \mu B_{n-1} - B_{n-2})\varphi_{q-2}+$$
$$+(\mu^3 A - \mu^2 B_{n-1} + \mu B_{n-2} + B_{n-3})\varphi_{q-3} + ... + (\mu^{n-2}A - \mu^{n-3}B_{n-1} - ...-$$
$$-B_2)\varphi_{q-n+2} + (\mu^{n-1}A - \mu^{n-2}B_{n-1} - ... - \mu B_1)\varphi_{q-n+1}] \tag{3.4}$$

4. Пропагаторы

Рассмотрим однородное уравнение соболевского типа высокого порядка

$$A\, v^{(n)} = B_{n-1}v^{(n-1)} + ... + B_0 v \tag{4.1}$$

Определение 5. Оператор-функцию $V^\bullet \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{L}(\mathcal{U}))$ будем называть *пропагатором* уравнения (4.1), если для любого $v \in \mathcal{U}$ вектор-функция $v(t) = V^t v$ будет решением этого уравнения.

Пусть пучок $\overrightarrow{B}$ полиномиально A-ограничен и выполняется $(*)$. Фиксируем контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ и рассмотрим семейства операторов

$$V^t_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma R^A_\mu(\overrightarrow{B})(\mu^{n-k-1}A - \mu^{n-k-2}B_{n-1} - ... - B_{k+1})e^{\mu t}d\mu, \tag{4.2}$$

$k = 0, 1, ...n-1,\ t \in \mathbb{R}$.

Лемма 5. *При любом $k = 0, 1, ..., n-1$ оператор-функция V_k^t является пропагатором уравнения (4.1).*

Лемма 6. *(i) При любом $k = 0, 1, ..., n-1$ оператор-функция V_k^t является целой функцией.*

(ii)

$$\left.\frac{d^l}{dt^l} V_k^t\right|_{t=0} = \begin{cases} P, \ l = k; \\ \mathbb{O}, \ l \neq k; \end{cases}$$

при всех $k = 0, 1, ..., n-1, \ l = 0, 1, ...$.

5. Морфология фазового пространства

Рассмотрим задачу Коши

$$v(0) = v_0, v'(0) = v_1, ... v^{(n-1)}(0) = v_{n-1} \tag{5.1}$$

для однородного линейного уравнения соболевского типа высокого порядка

$$A \ v^{(n)} = B_{n-1} v^{(n-1)} + ... + B_0 v \tag{5.2}$$

Определение 6. Вектор-функцию $v \in C^n(\mathbb{R}; \mathcal{U})$, удовлетворяющую уравнению (5.2), назовем *решением* этого уравнения. Если решение $v = v(t)$ удовлетворяет условиям (5.1), то оно называется *решением задачи* (5.1), (5.2).

Определение 7. Множество $\mathcal{P} \subset \mathcal{U}$ называется *фазовым пространством уравнения* (5.2), если

(i) любое решение $v = v(t)$ уравнения (5.2) лежит в $\mathcal{P}$, т.е. $v(t) \in \mathcal{P} \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

(ii) при любых $v_k \in \mathcal{P}, \ k = \overline{0, n-1}$ существует единственное решение задачи (5.1),(5.2).

Замечание 5. Если существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{U})$, то в силу результатов М.В.Келдыша, фазовым пространством уравнения (5.2) является все пространство $\mathcal{U}$.

Пусть пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен и выполняется условие $(*)$. В силу теоремы 2 и следствия 2 имеет место расщепление пространств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{F}$, расщепление действия операторов, существуют операторы $(B_0^0)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^0; \mathcal{U}^0)$ и $(A^1)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{F}^1; \mathcal{U}^1)$. Построим операторы $H_0 = (B_0^0)^{-1} A^0, \ H_k = (B_0^0)^{-1} B_k^0, \ k = 1, 2, ..., n - \ 1$.

Определение 8. Определим семейство операторов $\{K_q^1, K_q^2, ... K_q^n\}$ следующим образом:

$K_0^s = \mathbb{O}, s \neq n,\ K_0^n = \mathbb{I}$
$K_1^1 = H_0,\ K_1^2 = -H_{n-1}, ...,\ K_1^s = -H_{n+1-s}, ...,\ K_1^n = -H_1$
$K_q^1 = K_{q-1}^n H_0,\ K_q^2 = K_{q-1}^1 - K_{q-1}^n H_{n-1}, ...,\ K_q^s = K_{q-1}^{s-1} - K_{q-1}^n H_{n+1-s}, ...,$

$$K_q^n = K_{q-1}^{n-1} - K_{q-1}^n H_1, q = 1, 2, ... \tag{5.3}$$

Определение 9. Точка ∞ называется

(i) *устранимой особой точкой* A-резольвенты пучка $\vec{B}$, если $K_1^1 = K_1^2 = ... = K_1^n \equiv \mathbb{O}$;

(ii) *полюсом* порядка $p \in \mathbb{N}$ A-резольвенты пучка $\vec{B}$, если $K_p^s \neq \mathbb{O}$, при некотором s, но $K_{p+1}^s \equiv \mathbb{O}$, при любом s;

(iii) *существенно особой точкой* A-резольвенты пучка $\vec{B}$, если $K_p^n \not\equiv \mathbb{O}$ при любом $p \in \mathbb{N}$.

Замечание 6. В дальнейшем, если пучок $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, и точка ∞ является устранимой особой точкой или полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$ функции $R_\mu(\vec{B})$, то пучок $\vec{B}$ будем называть (A,p)-ограниченным $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Теорема 3. [3] *Пусть пучок $\vec{B}$ (A,p)-ограничен и выполняется $(*)$. Тогда фазовое пространство уравнения (5.2) совпадает с образом проектора P.*

6. Задача Коши для неоднородного уравнения

Рассмотрим задачу Коши

$$v(0) = v_0, v'(0) = v_1, ..., v^{(n-1)}(0) = v_{n-1} \tag{6.1}$$

для неоднородного уравнения соболевского типа

$$Av^{(n)}(t) = B_{n-1}v^{(n-1)}(t) + B_{n-2}v^{(n-2)}(t) + ... + B_1 v'(t) + B_0 v(t) + f(t) \tag{6.2}$$

где вектор-функцию $f : (-\tau, \tau) \to \mathcal{F}$ определим позже. Вектор-функцию $v \in C^n((-\tau,\tau);\mathcal{U})$ назовем решением задачи (6.1), (6.2), если она удовлетворяет равенствам (6.1), (6.2).

Пусть пучок операторов $\vec{B}$ (A,p)-ограничен и выполняется условие $(*)$, тогда в силу теоремы 2 задача (6.1),(6.2) распадается на две независимые задачи

$$\begin{gathered} H_0 u^{(n)} = H_{n-1}u^{(n-1)} + H_{n-2}u^{(n-2)} + ... + H_1 u' + u + (B_0^0)^{-1} f^0, \\ u(0) = v_0^0, u'(0) = v_1^0, ..., u^{(n-1)}(0) = v_{n-1}^0. \end{gathered} \tag{6.3}$$

$$\begin{gathered} w^{(n)} = S_{n-1}w^{(n-1)} + S_{n-2}w^{(n-2)} + ... + S_0 w + (A^1)^{-1}f^1, \\ w(0) = v_0^1, w'(0) = v_1^1, ..., w^{(n-1)}(0) = v_{n-1}^1, \end{gathered} \tag{6.4}$$

где операторы $H_0 = (B_0^0)^{-1}A^0,\ H_1 = (B_0^0)^{-1}B_1^0\ , ..., H_{n-1} = (B_0^0)^{-1}B_{n-1}^0 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^0)$, $S_0 = (A^1)^{-1}B_0^1$, $S_1 = (A^1)^{-1}B_1^1, ...,$ $S_{n-1} = (A^1)^{-1}B_{n-1}^1 \in \mathcal{L}(\mathcal{U}^1)$; вектор-функции $u = (I-P)v, f^0 = (I-Q)f$, $w = Pv$, $f^1 = Qf$; векторы $v_l^k \in \mathcal{U}^k, \quad k, l = 0, 1, ..., n-1$.

Рассмотрим сначала задачу (6.3). В силу определения 9 операторы $K_{p+1}^s \equiv \mathbb{O}, \forall s$. Пусть $f^0 \in C^{p+n}((-\tau,\tau);\mathcal{F}^0)$. Рассмотрим множества

$$\mathcal{M}_f^k = \{v \in \mathcal{U}:\ (\mathbb{I}-P)v = -\sum_{l=0}^{p} K_l^n (B_0^0)^{-1}\frac{d^{l+k}}{dt^{l+k}}(\mathbb{I}-Q)f(0)\},$$

$$k = 0, 1, ..., n-1.$$

Покажем, что вектор-функция

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p} K_q^n (B_0^0)^{-1}\frac{d^q}{dt^q}f^0(t) \tag{6.5}$$

является решением уравнения (6.3). Продифференцируем уравнение (6.3) $(p-1)$ раз, учитывая, что

$$u^{(k)} = H_0 u^{(n+k)} - H_{n-1}u^{(n+k-1)} - ... - H_1 u^{(k+1)} - (B_0^0)^{-1}\frac{d^k}{dt^k}f^0(t).$$

Получим

$$u(t) = K_p^1 u^{(p+n-1)} + K_p^2 u^{(p+n-2)} + ... + K_p^n u^p - \sum_{q=0}^{p-1} K_q^n (B_0^0)^{-1}\frac{d^q}{dt^q}f^0(t).$$

Продифференцировав последнее равенство по t, учитывая, что операторы $K_{p+1}^s \equiv \mathbb{O}, \forall s$, получим требуемое.

Если

$$v_k^0 = -\sum_{q=0}^{p} K_q^n (B_0^0)^{-1}\frac{d^{q+k}}{dt^{q+k}}f^0(0), \tag{6.6}$$

то вектор-функция (6.5) служит решением задачи (6.3).

Таким образом, доказана

Лемма 7. *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ (A,p)-ограничен. Пусть вектор-функция $f^0 \in C^{p+n}((-\tau,\tau);\mathcal{F}^0)$, а начальные значения $v_k^0 \in \mathcal{U}^0$ удовлетворяют (6.6) $k = 0, 1, ..., n-1$. Тогда существует решение $u \in C^n((-\tau,\tau);\mathcal{U}^0)$ задачи (6.3), которое можно представить в виде (6.5).*

Перейдем к задаче (6.4). Пусть вектор-функция $f^1 \in C([-\tau,\tau];\mathcal{F}^1)$, тогда вектор-функция

$$w(t)=\sum_{k=0}^{n-1} V_k^t v_k^1 + \int_0^t V_{n-1}^{t-s}(A^1)^{-1} f^1(s)ds, t\in(-\tau,\tau) \tag{6.7}$$

будет решением задачи (6.4). Действительно, найдем производные вектор-функции $w(t)$:

$$w'(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu^n I-\mu^{n-1}S_{n-1}-...-\mu S_1-S_0)^{-1}\times$$

$$\times(\mu^{n-k}I-\mu^{n-k-1}S_{n-1}-...-\mu S_{k+1})e^{\mu t}v_k^1 d\mu+$$

$$+\int_0^t \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu^n I-\mu^{n-1}S_{n-1}-...-\mu S_1-S_0)^{-1}\mu e^{\mu(t-s)}d\mu(A^1)^{-1}f^1(s)ds,$$

$$w''(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu^n I-\mu^{n-1}S_{n-1}-...-\mu S_1-S_0)^{-1}\times$$

$$\times(\mu^{n-k+1}I-\mu^{n-k}S_{n-1}-...-\mu^2 S_{k+1})e^{\mu t}v_k^1 d\mu+$$

$$+\int_0^t \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu^n I-\mu^{n-1}S_{n-1}-...-\mu S_1-S_0)^{-1}\mu^2 e^{\mu(t-s)}d\mu(A^1)^{-1}f^1(s)ds,$$

$$\dots$$

$$w^{(n-1)}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu^n I-\mu^{n-1}S_{n-1}-...-\mu S_1-S_0)^{-1}\times$$

$$\times(\mu^{2n-k-2}I-\mu^{2n-k-3}S_{n-1}-...-\mu^{n-1} S_{k+1})e^{\mu t}v_k^1 d\mu+$$

$$+\int_0^t \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu^n I-\mu^{n-1}S_{n-1}-...-\mu S_1-S_0)^{-1}\mu^{n-1} e^{\mu(t-s)}d\mu(A^1)^{-1}f^1(s)ds,$$

$$w^{(n)}(t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu^n I-\mu^{n-1}S_{n-1}-...-\mu S_1-S_0)^{-1}\times$$

$$\times(\mu^{2n-k-1}I-\mu^{2n-k-2}S_{n-1}-...-\mu^{n} S_{k+1})e^{\mu t}v_k^1 d\mu+(A^1)^{-1}f^1(t)+$$

$$+\int_0^t \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu^n I-\mu^{n-1}S_{n-1}-...-\mu S_1-S_0)^{-1}\mu^n e^{\mu(t-s)}d\mu(A^1)^{-1}f^1(s)ds,$$

Рассмотрим теперь уравнение (6.4) целиком. Перенесем все слагаемые в левую часть:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu^n I-\mu^{n-1}S_{n-1}-...-\mu S_1-S_0)^{-1}(\mu^{n-1}I-\mu^{n-2}S_{n-1}-...-S_{k+1})\times$$

$$\times(\mu^n I-\mu^{n-1}S_{n-1}-...-\mu S_1-S_0)e^{\mu t}v_0^1 d\mu+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu^n I-\mu^{n-1}S_{n-1}-...-\mu S_1-S_0)^{-1}(\mu^{n-2}I-\mu^{n-3}S_{n-1}-...-S_{k+1})\times$$

$$\times(\mu^n I-\mu^{n-1}S_{n-1}-...-\mu S_1-S_0)e^{\mu t}v_1^1 d\mu+$$

$$+\cdots+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu^n I-\mu^{n-1}S_{n-1}-...-\mu S_1-S_0)^{-1}(\mu I-S_{n-1})\times$$

$$\times(\mu^n I-\mu^{n-1}S_{n-1}-...-\mu S_1-S_0)e^{\mu t}v_{n-1}^1 d\mu+$$

$$+\int_0^t \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (\mu^n I-\mu^{n-1}S_{n-1}-...-\mu S_1-S_0)^{-1}\times$$

$$\times(\mu^n I-\mu^{n-1}S_{n-1}-...-\mu S_1-S_0)e^{\mu(t-s)}d\mu(A^1)^{-1}f^1(s)ds=0$$

Получили верное тождество, так как все интегралы слева равны нулю в силу интегральной теоремы Коши. Значит данная функция является решением уравнения (6.4). Проверим, что она является и решением задачи Коши. Действительно,

$$w(0)=\sum_{k=0}^{n-1}V_k^0 v_k^1=Pv_0^1=v_0^1,$$

$$w'(0)=\sum_{k=0}^{n-1}(V_k^0)'v_k^1=Pv_1^1=v_1^1,$$

$$\cdots$$

$$w^{(n)}(0) = \sum_{k=0}^{n-1} (V_k^0)^{(n)} v_k^1 = P v_{n-1}^1 = v_{n-1}^1.$$

Итак, доказана

Лемма 8. *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ полиномиально A-ограничен, выполнено $(*)$ и вектор-функция $f^1 \in C((-\tau,\tau);\mathcal{F}^1)$. Тогда существует решение задачи (6.4), которое можно представить в виде (6.7).*

Теорема 4. *Пусть пучок операторов $\vec{B}$ (A,p)-ограничен и выполнено $(*)$. Пусть вектор-функция $f : (-\tau,\tau) \to \mathcal{F}$ такова, что $f^0 \in C^{p+n}((-\tau,\tau);\mathcal{F}^0)$, и $f^1 \in C((-\tau,\tau);\mathcal{F}^1)$. Тогда при любых $v_k \in \mathcal{M}_f^k$, $k = 0,1,...,n-1$ существует единственное решение задачи (6.1), (6.2), которое можно представить в виде $v(t) = u(t)+w(t)$, где $u(t)$ определено формулой (6.5), а $w(t)$ – формулой (6.7).*

Доказательство. Существование следует из лемм 7, 8. Для доказательства единственности допустим, что v и $\tilde{v}$ — два решения задачи (6.1), (6.2). Тогда их разность $v - \tilde{v}$ является решением задачи (5.1),(5.2) с нулевыми начальными значениями. Рассуждая, как при доказательстве теоремы 3 (см. [3]), получим $v(t) - \tilde{v}(t) = 0 \ \forall t \in (-\tau,\tau)$. □

В заключение автор считает своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность профессору Г. А. Свиридюку за поддержку в работе.

Список литературы

1. Загребина С. А. О задаче Шоуолтера – Сидорова / С. А. Загребина // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 3. – С. 22–28.
2. Замышляева А. А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка / А. А. Замышляева // Вычислит. технологии. – 2003. – Т. 8, № 4. – С. 45–54.
3. Замышляева А. А. Относительно присоединенные векторы в исследовании фазового пространства уравнения соболевского типа высокого порядка / А. А. Замышляева // Вестн. МаГУ. Математика. – 2006. – № 9. – С. 28–40.
4. Келлер А. В. Численное решение задачи стартового управления для системы уравнений леонтьевского типа / А. В. Келлер // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2009. – Т. 16, вып. 2. – С. 345–346.
5. Манакова Н. А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н. А. Манакова // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1185–1192.
6. Sviridyuk G. A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Utrecht; Boston ; Köln ; Tokyo : VSP, 2003.

A. A. Zamyshlyaeva

The phase space of a high order Sobolev type equation

Abstract. Of concern is the Cauchy problem for the linear Sobolev type equation of high order. We suggest the algorithm for the construction of the phase space for this equation and establish the unique solvability of the Cauchy problem.

Keywords: the Sobolev type equations, the polynomially bounded operator pencils, the propagators, the phase spaces.

Замышляева Алена Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, Южно-Уральский государственный университет, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76, тел.: (351)2679339 (alzama@mail.ru)

Zamyshlyaeva Alyona, associate professor, South Ural State University, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, 454080 Phone: (351)2679339 (alzama@mail.ru)