Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 1. С. 2—13

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.1, 519.8

О задаче максимизации модулярной функции в геометрической решётке

В. А. Баранский
Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина

М. Ю. Выплов, В. П. Ильев
Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского

Аннотация. Рассматривается задача максимизации модулярной функции на порядковом идеале конечной геометрической решётки. Исследуется возможность обобщения теоремы Радо – Эдмондса. Получена гарантированная оценка точности жадного алгоритма, обобщающая известную оценку Дженкинса – Корте – Хаусмана для задачи максимизации аддитивной функции на системе независимости.

Ключевые слова: модулярная функция; геометрическая решётка; порядковый идеал; L-матроид, жадный алгоритм; гарантированная оценка точности.

Введение

Приведём необходимые определения теории решёток [1, 2]. *Цепью* называется частично упорядоченное множество, в котором для любых двух его элементов x и y имеет место $x \leq y$ или $y \leq x$, т. е. x и y *сравнимы. Длина конечной цепи* из n элементов полагается равной $n-1$. *Решёткой* называется частично упорядоченное множество L, в котором любые два элемента имеют точную нижнюю грань $x \wedge y$ и точную верхнюю грань $x \vee y$. *Длиной решётки* L называется точная верхняя грань длин цепей L. *Высотой* $h(x)$ элемента $x \in L$ называется длина самой длинной цепи из элементов решётки L, заканчивающейся элементом x. Если $a \leq b$ в решётке L, то *(замкнутый) интервал* $[a, b]$ состоит из всех элементов $x \in L$, которые удовлетворяют неравенству $a \leq x \leq b$. Говорят, что элемент решётки y *покрывает* элемент x (обозначается $x <\cdot\, y$), если $x < y$ и из соотношения $x < z \leq y$ следует $y = z$. Решётка L называется *полумодулярной*, если для любых $x, y \in L$

выполняется соотношение $x \wedge y \lessdot x \Rightarrow \ y \lessdot x \vee y$. Решётка L называется *модулярной*, если для любых $x, y, z \in L$ из условия $x \leq z$ следует равенство $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. Если L содержит наименьший элемент, то этот элемент называется *нулем* и обозначается 0; аналогично, наибольший элемент называется *единицей* и обозначается 1. *Атомами* (или *точками*) решётки называются элементы, покрывающие 0. Решётка называется *атомарной (точечной)*, если каждый её элемент является точной верхней гранью некоторого множества атомов. Конечная решётка называется *геометрической*, если она атомарна и полумодулярна. Любой интервал геометрической решётки также является геометрической решёткой.

Подмножество I решётки L называется *порядковым идеалом*, если для любых $x, y \in L$ выполняется условие

$$(x \in I, y \leq x) \Rightarrow y \in I.$$

В булевой решётке всех подмножеств конечного множества понятию порядкового идеала соответствует понятие системы независимости.

Пусть V — непустое конечное множество, $\mathcal{A} \subseteq 2^V$ — непустое семейство его подмножеств. Семейство $\mathcal{A}$ называется *системой независимости*, если для всех $A, A' \subseteq V$ выполняется *аксиома наследственности*:

$$(A \in \mathcal{A}, A' \subseteq A) \Rightarrow A' \in \mathcal{A}.$$

Множество называется *независимым*, если оно принадлежит $\mathcal{A}$, и *зависимым* в противном случае. *Базами множества* $X \subseteq V$ называются максимальные по включению независимые подмножества, содержащиеся в X. Базы множества V называются *базами* системы независимости.

Важным частным случаем систем независимости являются матроиды. Система независимости $\mathcal{A}$ называется *матроидом* на V, если для любого $X \subseteq V$ все базы множества X равномощны.

Дунстан, Инглтон и Уэлш [4] ввели понятие суперматроида как обобщение понятия матроида в частично упорядоченном множестве с нулем. Для конечной решётки L это определение приобретает следующий вид. Пусть I — порядковый идеал в L. Он называется *суперматроидом* или *L-матроидом*, если для любого $x \in L$ все максимальные элементы из $I \cap [0, x]$ имеют одинаковую высоту.

Функция $w : L \to R_+$ называется *модулярной на решётке* L, если для любых $x, y \in L$ выполняется равенство

$$w(x \vee y) + w(x \wedge y) = w(x) + w(y).$$

Несложно показать, что в булевой решётке $L = 2^V$ функция множеств $w : 2^V \to R_+$ с условием $w(\emptyset) = 0$ модулярна тогда и только тогда, когда она аддитивна. Как следует из теоремы Радо – Эдмондса [5, 9], в булевой решётке задача максимизации модулярной функции на матроиде разрешима жадным алгоритмом (обычно теорема Радо – Эдмондса формулируется для задачи максимизации аддитивной функции, однако она верна и для задач максимизации и минимизации модулярной функции). Если же система $\mathcal{A}$ — не матроид, то жадный алгоритм в общем случае не находит оптимальное решение и может рассматриваться лишь как приближённый метод решения задачи. В связи с этим большой интерес представляют оценки точности жадного алгоритма.

В настоящей работе исследуется возможность обобщения теоремы Радо – Эдмондса на геометрические решётки. Кроме того, предлагается обобщение оценки точности приближённого решения жадным алгоритмом задачи максимизации модулярной функции на порядковом идеале в геометрической решётке.

1. Максимизация модулярной функции на L-матроиде

Рассмотрим оптимизационную задачу

$$\max\{w(x): \ x \in I\}, \tag{1.1}$$

где I — порядковый идеал в конечной геометрической решётке L, $w : L \to R_+$ — неубывающая модулярная функция, $w(0) = 0$.

Для решения задачи (1.1) применим жадный алгоритм GA, который выбирает элементы решётки, начиная с нуля, таким образом, что каждый следующий элемент L-матроида должен покрывать предыдущий и возрастание целевой функции на нём должно быть наибольшим.

Жадный алгоритм GA

Шаг 0. $x_0 \leftarrow 0$, перейти на шаг 1.

Шаг i ($i \geqslant 1$). Выбрать такой $x_i \in I$, что $x_i \cdot\!> x_{i-1}$ и

$$w(x_i) = \max_{\substack{x \in I,\\ x \cdot> x_{i-1}}} w(x).$$

Перейти на шаг $i + 1$. Если такого x_i нет, то $s_{GA} \leftarrow x_{i-1}$.

Конец.

Замечание 1. Алгоритм GA всегда находит максимальный элемент (базу) идеала I.

Одним из центральных результатов теории матроидов является следующая теорема Радо – Эдмондса.

Теорема 1. [5, 9] *Жадный алгоритм гарантированно находит оптимальное решение задачи (1.1) на системе независимости $\mathcal{A}$ в конечной булевой решётке 2^V для любой аддитивной целевой функции в том и только том случае, если $\mathcal{A}$ является матроидом.*

Несложно показать, что эта теорема верна для любой модулярной функции в булевой решётке 2^V.

Справедливо следующее утверждение, обобщающее теорему Радо – Эдмондса в части, доказанной Радо [9].

Теорема 2. *Для любой модулярной целевой функции жадный алгоритм гарантированно находит оптимальное решение задачи (1.1) на любом L-матроиде в конечной геометрической решётке.*

Доказательство. Пусть b — база, построенная жадным алгоритмом. От противного, предположим, что существует база b' наибольшего возможного веса, такая, что $w(b') > w(b)$. Тогда $h(b') = h(b) = t$. Поскольку $b \not\leq b'$, имеем $x_t \not\leq b'$ и $x_0 \leq b'$. В качестве i возьмем наибольшее $i \in \{1, \ldots, t\}$ такое, что $x_i \not\leq b'$ и $x_{i-1} \leq b'$.

Среди баз наибольшего возможного веса возьмем базу b', для которой i принимает наибольшее возможное значение. Тогда $x_i \wedge b' = x_{i-1}$ в силу полумодулярности L влечет $b' \vee x_i \gtrdot b'$. Возьмем максимальную цепь $x_i \lessdot \ldots \lessdot b'' < b' \vee x_i$, такую, что $b'' \in I$. Тогда b' и b'' — это базы элемента $b' \vee x_i$. Поэтому $h(b'') = h(b') = h(b) = t$, т. е. b'' — база L-матроида I. Поскольку $x_i \leq b''$, в силу выбора b' имеем $w(b'') < w(b')$. Далее, условие $h(b' \vee x_i) = h(b') + 1 = h(b'') + 1$ влечет $b'' \lessdot b' \vee x_i$.

Решётки $[x_{i-1}, b']$ и $[x_{i-1}, b'']$ имеют одинаковую длину. Поэтому $[x_{i-1}, b']$ — неодноэлементная геометрическая решётка. Элемент b' является точной верхней гранью некоторого множества A атомов решётки $[x_{i-1}, b']$, т.е. $b' = \bigvee\limits_{a \in A} a$. Если $a \leq b''$ для любого $a \in A$, то $b' \leq b''$, откуда $b' = b''$, что противоречит условию $w(b'') < w(b')$. Следовательно, существует $y \in A$ такой, что $y \not\leq b''$ и $x_{i-1} \lessdot y \leq b'$. Отсюда вытекает $b'' \vee y = b' \vee x_i$ и $b'' \wedge y = x_{i-1}$. Ясно, что $b' \wedge x_i = x_{i-1}$.

Далее, имеем $w(b'' \vee y) = w(b' \vee x_i)$, и поэтому $w(b'' \vee y) + w(b'' \wedge y) = w(b' \vee x_i) + w(b' \wedge x_i)$. Отсюда в силу модулярности функции w получаем $w(b'') + w(y) = w(b') + w(x_i)$, и поэтому $w(b') + w(y) > w(b'') + w(y) = w(b') + w(x_i)$. Следовательно, $w(y) > w(x_i)$, что противоречит жадному выбору элемента x_i (на i-том шаге алгоритма GA можно было выбрать элемент большего веса).

Таким образом, b — база наибольшего возможного веса. □

Заметим, что в работе [3] аналогичное утверждение доказано для задачи минимизации модулярной функции на L-матроиде.

Аналог теоремы 1 в части, доказанной Эдмондсом [5] (верно ли, что если жадный алгоритм GA для любой модулярной целевой функции гарантированно находит оптимальную базу порядкового идеала I конечной геометрической решётки, то I является L-матроидом) в общем случае неверен, что иллюстрирует пример 1.

Пример 1. Для любой модулярной функции w на геометрической решётке, изображённой на рис. 1, жадный алгоритм гарантированно находит базу максимального веса порядкового идеала I, не являющегося L-матроидом. Метками abc и def обозначены базы, являющиеся точными верхними гранями атомов $a \vee b \vee c$ и $d \vee e \vee f$.

Действительно, из модулярности функции следует, что $w(a) = w(b) = w(c)$, $w(d) = w(e) = w(f)$. Пусть, например, $w(a) = w(b) = w(c) = w_1 > w_2 = w(d) = w(e) = w(f)$. Тогда жадный алгоритм GA найдет базу максимального веса: $w(abc) = 2w_1 > 2w_2 = w(def)$.

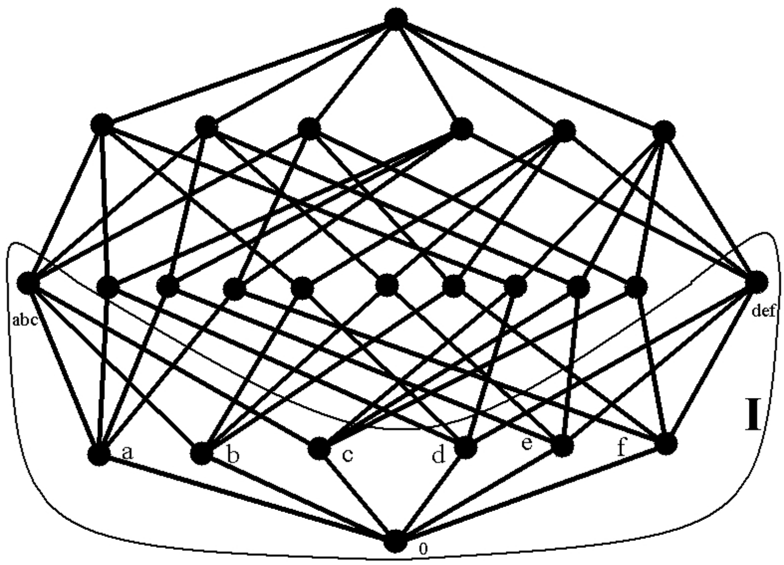

Рис. 1

2. Обобщение оценки Дженкинса – Корте – Хаусмана

Итак, по теореме 2 жадный алгоритм всегда находит оптимальное решение задачи максимизации модулярной функции на L-матроиде. Если же порядковый идеал конечной геометрической решётки не является L-матроидом, то жадный алгоритм GA может не найти его базу максимального веса. Возникает естественный вопрос: как сильно в этом случае может отличаться решение, найденное жадным алгоритмом, от оптимального решения?

В работах Дженкинса [7], Корте и Хаусмана [6, 8] получена следующая оценка точности жадного алгоритма для задачи максимизации аддитивной функции на системе независимости.

Теорема 3. *[6, 7, 8] Пусть $\mathcal{A}$ — произвольная система независимости на множестве V. Тогда для любой аддитивной целевой функции задачи максимизации имеет место оценка*

$$w(S_{GA}) \geq c(\mathcal{A})w(S_O),$$

где S_O — оптимальное решение задачи, S_{GA} — решение, найденное жадным алгоритмом, а $c(\mathcal{A})$ — кривизна системы независимости, определяемая как

$$c(\mathcal{A}) = \min_{\substack{X \subseteq V, \\ X \neq \emptyset}} \frac{lr(X)}{ur(X)},$$

где $lr(X)$ и $ur(X)$ — минимальная и максимальная мощности баз множества X, соответственно.

Кривизна $c(\mathcal{A})$ характеризует близость системы независимости $\mathcal{A}$ к матроиду. Очевидно, что $c(\mathcal{A}) \in (0, 1]$ для любой системы независимости, причем $c(\mathcal{A}) = 1$ тогда и только тогда, когда система $\mathcal{A}$ является матроидом.

По аналогии, рассмотрим параметр, характеризующий близость порядкового идеала I к L-матроиду:

$$c(I) = \min_{\substack{x \in L, \\ x \neq 0}} \frac{lr(x)}{ur(x)},$$

где $lr(x)$ и $ur(x)$ — минимальная и максимальная высота баз элемента x, соответственно. Легко видеть, что $c(I) \in (0, 1]$, причём $c(I) = 1$ тогда и только тогда, когда идеал I является L-матроидом. Следуя Корте и Хаусману, величину $c(I)$ будем называть *кривизной* порядкового идеала I.

Обозначим $At(L) = \{a \in L : a \cdot > 0\}$, $At(x) = \{a \in At(L) : a \leq x\}$ для любого $x \in L$.

Лемма 1. *Пусть L — атомарная решётка, $x, y \in L, x < y$. Тогда существует $a \in L$ такой, что $a \in At(y) \setminus At(x)$.*

Доказательство. В силу транзитивности $z < x$ влечёт $z < y$ для любого $z \in L$, откуда, очевидно, $At(x) \subseteq At(y)$. Предположим, что $At(x) = At(y)$. Но в силу атомарности L имеем $x = \bigvee At(x) = \bigvee At(y) = y$, противоречие. Таким образом, $At(y) \setminus At(x) \neq \emptyset$. $\square$

Лемма 2. *Пусть L — конечная геометрическая решётка, w — модулярная функция на L, $w(0) = 0$. Для любого элемента $s \in L$ справедливо равенство*

$$w(s) = \sum_{i=1}^{n} h(s \wedge a^i)(w(a_i) - w(a_{i+1})), \tag{2.1}$$

где $\{a_1, \dots a_n\} = At(L), a_{n+1} = 0, a^i = \bigvee_{k=1}^{i} a_k$.

Доказательство. 1) Покажем, что для любого $i \in 1, \dots, n$

$$s \wedge a^i > s \wedge a^{i-1} \Rightarrow w(s \wedge a^i) = w(s \wedge a^{i-1}) + w(a_i). \tag{2.2}$$

Пусть для некоторого $i \in 1, \dots, n$ имеет место $s \wedge a^i > s \wedge a^{i-1}$. Так как в этом случае $a^i \neq a^{i-1}$, $a^i = a^{i-1} \vee a_i$ и $a^{i-1} \wedge a_i = 0$, то в силу полумодулярности решётки L и модулярности функции w имеем $a^i \cdot> a^{i-1}$ и $w(a^i) = w(a^{i-1}) + w(a_i)$.

а) Пусть $s \wedge a^i = a^i$. Тогда $a^{i-1} < a^i \leq s$, поэтому $s \wedge a^{i-1} = a^{i-1}$. Таким образом, $w(s \wedge a^i) = w(a^i) = w(a^{i-1}) + w(a_i) = w(s \wedge a^{i-1}) + w(a_i)$.

б) Пусть $s \wedge a^i < a^i$. Рассмотрим элементы $s \wedge a^i$ и a^{i-1}. Эти элементы несравнимы (действительно, так как $s \wedge a^i > s \wedge a^{i-1}$, то $s \wedge a^i \not\leq a^{i-1}$, а так как $s \wedge a^i < a^i$, то $s \wedge a^i \not\geq a^{i-1}$). Очевидно, $(s \wedge a^i) \wedge a^{i-1} = s \wedge a^{i-1}$, а так как $s \wedge a^i < a^i$ и $a^i \cdot> a^{i-1}$, то $(s \wedge a^i) \vee a^{i-1} = a^i$. В силу модулярности w имеем $w(s \wedge a^i) + w(a^{i-1}) = w((s \wedge a^i) \vee a^{i-1}) + w((s \wedge a^i) \wedge a^{i-1}) = w(a^i) + w(s \wedge a^{i-1})$. Таким образом, $w(a_i) = w(a^i) - w(a^{i-1}) = w(s \wedge a^i) - w(s \wedge a^{i-1})$.

С учётом (2.2) можно записать $w(s \wedge a^i) = w(s \wedge a^{i-1}) + \alpha_i w(a_i)$, где

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & \text{если } s \wedge a^i > s \wedge a^{i-1} \\ 0, & \text{если } s \wedge a^i = s \wedge a^{i-1}. \end{cases}$$

Заметим, что $w(s) = w(s \wedge 1) = w(s \wedge a^n) = w(s \wedge a^{n-1}) + \alpha_n w(a_n) = \dots$. Тогда

$$w(s) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w(a_i). \tag{2.3}$$

2) Покажем, что для любого $i \in 1, \dots, n$

$$h(s \wedge a^i) - h(s \wedge a^{i-1}) > 1 \Rightarrow w(a_i) = 0. \tag{2.4}$$

Пусть для некоторого $i \in 1, \dots, n$ имеет место неравенство $h(s \wedge a^i) - h(s \wedge a^{i-1}) > 1$ (заметим, что это возможно только в случае, если L — немодулярная решётка. Действительно, если выполняется свойство полумодулярности вверх, то $a^i \cdot> a^{i-1} \Rightarrow s \wedge a^i \cdot> s \wedge a^{i-1}$).

В силу леммы 1 можем выбрать атомы $a' \in At(s \wedge a^i) \setminus At(s \wedge a^{i-1})$ и $a'' \in At(s \wedge a^i) \setminus At((s \wedge a^{i-1}) \vee a')$, при этом в силу в силу полумодулярности решётки L имеем $s \wedge a^i \geq ((s \wedge a^{i-1}) \vee a') \vee a'' \cdot> (s \wedge a^{i-1}) \vee a' \cdot> s \wedge a^{i-1}$. Очевидно, $a' \neq a''$.

Рассмотрим элементы a', a'' и $a' \vee a''$. По построению $a^{i-1} \wedge a' = 0$ и $a^{i-1} \wedge a'' = 0$. Покажем, что $a^{i-1} \wedge (a' \vee a'') = 0$. Предположим противное, т.е. $a^{i-1} \wedge (a' \vee a'') > 0$. Заметим, что $h(a' \vee a'') = 2$ в силу полумодулярности L, поэтому $a' \vee a'' \cdot> a^{i-1} \wedge (a' \vee a'') = s \wedge (a^{i-1} \wedge (a' \vee a'')) =$

$(s \wedge a^{i-1}) \wedge (a' \vee a'')$, откуда $(s \wedge a^{i-1}) \vee (a' \vee a'') \cdot > s \wedge a^{i-1}$. Но $(s \wedge a^{i-1}) \vee (a' \vee a'') = (s \wedge a^{i-1}) \vee a') \vee a'' \cdot > (s \wedge a^{i-1}) \vee a' \cdot > s \wedge a^{i-1}$, противоречие.

Докажем теперь, что $w(a^i) = w(a^{i-1}) + w(a') = w(a^{i-1}) + w(a'') = w(a^{i-1}) + w(a' \vee a'')$. В силу полумодулярности L имеем $a^{i-1} \vee a' \cdot > a^{i-1}$, $a^{i-1} \vee a'' \cdot > a^{i-1}$ и $a^{i-1} \vee (a' \vee a'') \cdot > a^{i-1}$, а так как $a^i \cdot > a^{i-1}$ и по построению $a' \vee a'' \leq s \wedge a^i \leq a^i$, то $a^{i-1} \vee a' = a^{i-1} \vee (a' \vee a'') = a^i$. Наконец, в силу модулярности w получаем в итоге $w(a^i) - w(a^{i-1}) = w(a') = w(a'') = w(a' \vee a'')$ и $w(a' \vee a'') = w(a') + w(a'')$, откуда $w(a') = w(a'') = 0$. Следовательно, $w(a_i) = w(a^i) - w(a^{i-1}) = 0$.

3) Так как, очевидно, слагаемое, содержащее $w(a_i)$, появляется в правой части равенства (2.1) ровно два раза, со знаками "+" и "−", для любого $i \in 2, \ldots, n$, то (2.1) можно переписать в виде

$$w(s) = \sum_{i=1}^{n} (h(s \wedge a^i) - h(s \wedge a^{i-1}))w(a_i), \tag{2.5}$$

положив $a_0 = 0$.

Очевидно, что $h(s \wedge a^i) - h(s \wedge a^{i-1}) \geq 0$ для всех $i \in 1, \ldots, n$. Учитывая (2.4), получаем, что множитель $h(s \wedge a^i) - h(s \wedge a^{i-1})$ во всех ненулевых компонентах суммы в правой части равенства должен равняться единице. Заметим также, что этот множитель является ненулевым только при условии $s \wedge a^i > s \wedge a^{i-1}$. Поэтому равенство (2.5) эквивалентно уже доказанному равенству (2.3).

□

Лемма 3. *Пусть L — конечная геометрическая решётка, w — модулярная функция на L, $w(0) = 0$ и $w(a_1) \geq \ldots \geq w(a_n)$, где $\{a_1, \ldots a_n\} = At(L)$. Тогда для любого $i \in 1, \ldots, n$ справедливо*

$$a \in At(a^i) \Rightarrow w(a) \geq w(a_i),$$

где $a^i = \bigvee\limits_{k=1}^{i} a_k$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный атом $a \in At(a^i)$ и j — минимальный номер, такой, что $a \in At(a^j) \setminus At(a^{j-1})$. Очевидно, $j \leq i$. В силу полумодулярности L имеем $a^i \cdot > a^{i-1}$. Далее, так как $a^{j-1} \vee a_j = a^{j-1} \vee a = a^j$ и $a^{j-1} \wedge a_j = a^{j-1} \wedge a = 0$, то из модулярности w следует $w(a) = w(a^j) - w(a^{j-1}) = w(a_j) \geq w(a_i)$.

□

Лемма 4. *Пусть L — конечная геометрическая решётка, I — порядковый идеал решётки L, w — модулярная функция на L, $w(0) = 0$, $0 = x_0 < \cdot \ldots < \cdot s_{GA}$ — цепь элементов, построенная в процессе работы жадного алгоритма GA.*

Существует упорядочение множества $\{a_1, \dots a_n\}$ всех атомов решётки L, удовлетворяющее условиям

1) $w(a_1) \geq \dots \geq w(a_n)$,

2) если $w(a_i) = w(a_j)$ и притом существует номер k такой, что $a_i \in At(x_k)$ и $a_j \notin At(x_k)$, то $i < j$.

Доказательство. Пусть атомы L уже частично упорядочены по неубыванию весов, т.е. выполнено условие 1). Рассмотрим все атомы, имеющие одинаковый вес w. Переупорядочим их между собой следующим образом. Пусть k' — минимальный номер такой, что $\{a \in At(x_{k'}) : w(a) = w\} \neq \emptyset$, k'' — максимальный номер такой, что $\{a \in At(x_{k''}) : w(a) = w\} \neq \emptyset$. Воспользуемся тем фактом, что $At(x_{k'}) \subseteq At(x_{k'+1}) \subseteq \dots \subseteq At(x_{k''})$. Минимальные номера присвоим атомам множества $\{a \in At(x_{k'}) : w(a) = w\}$, далее среди оставшихся минимальные номера присвоим атомам множества $\{a \in At(x_{k'+1}) : w(a) = w\}$, и т. д. до множества $\{a \in At(x_{k''}) : w(a) = w\}$. Максимальные номера, таким образом, получат атомы множества $\{a \notin At(x_{k''}) : w(a) = w\}$. Очевидно, что при данном упорядочении выполняется условие 2) леммы.

□

Лемма 5. *Пусть L — конечная геометрическая решётка, I — порядковый идеал решётки L, w — модулярная функция на L, $w(0) = 0$, и атомы L упорядочены в соответствии с леммой 4 . Тогда для любого $i \in 1, \dots, n$ элемент $s_{GA} \wedge a^i$ — база a^i, где s_{GA} — база I, найденная алгоритмом GA, $a^i = \bigvee_{k=1}^{i} a_k$.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что для некоторого номера i существует база b элемента a^i такая, что $b > s_{GA} \wedge a^i$.

Тогда $s_{GA} > s_{GA} \wedge a^i$ (так как s_{GA} является базой I) и существует номер k шага алгоритма такой, что $x_{k-1} < b$ и $x_k \not\leq b$. Рассмотрим два возможных случая.

1) Предположим, что $a_i \notin At(x_{k-1})$. Покажем, что в этом случае $a_i \notin At(x_k)$. Так как $x_k \not\leq b$, то $x_k \not\leq s_{GA} \wedge a^i < b$. Учитывая, что $x_k \leq s_{GA}$ (как один из элементов, выбранных алгоритмом), получаем $x_k \not\leq a^i$. Так как $x_{k-1} < a^i$ и $a_i \leq a^i$, то $x_{k-1} \vee a_i \leq a^i$, следовательно, $x_{k-1} \vee a_i \neq x_k$. Отсюда, так как $x_k \cdot\!> x_{k-1}$, то $a_i \notin At(x_k)$.

В силу леммы 1 можем выбрать элементы $a_j \in At(x_k) \setminus At(x_{k-1})$ и $a \in At(b) \setminus At(x_{k-1})$.

Покажем, что $a_j \not\leq a^i$. Заметим, что $x_k = x_{k-1} \vee a_j$ (так как $x_k \geq a_j$ и $x_k \cdot\!> x_{k-1}$). Если бы имело место $a_j \leq a^i$, то из $x_{k-1} < b \leq a^i$ следовало бы $x_k = x_{k-1} \vee a_j \leq a^i$, противоречие с $x_k \not\leq a^i$.

Получаем, что $j > i$, откуда в силу упорядочения атомов $w(a_i) \geq w(a_j)$. С другой стороны, $a \leq b \leq a^i$, откуда в силу леммы 3 следует $w(a) \geq w(a_i)$. Так как $x_{k-1} < b$ и $a < b$, то $x_{k-1} \vee a \in I$. Поэтому, если бы имело место $w(a) > w(a_j)$, то $w(x_k) = w(x_{k-1} \vee a_j) < w(x_{k-1} \vee a)$, и жадный алгоритм на k-том шаге вместо элемента x_k выбрал бы элемент $x_{k-1} \vee a$, следовательно, $w(a_j) \geq w(a)$. Таким образом, $w(a_i) = w(a_j)$.

Итак, нашелся атом $a_j \in At(x_k)$ такой, что $j > i$ и $w(a_j) = w(a_i)$. В силу леммы 4 получили противоречие с условием $a_i \notin At(x_k)$.

2) Предположим, что $a_i \in At(x_{k-1})$ (т.е. существует номер $t < k$ такой, что $a_i \in At(x_t) \setminus At(x_{t-1})$). Покажем, что в этом случае существует атом $a_j \notin At(x_{k-1})$ такой, что $j < i$ и $w(a_j) = w(a_i)$.

а) Пусть $(At(b) \setminus At(x_{k-1})) \cap \{a_1, \ldots, a_{i-1}\} \neq \emptyset$. Тогда можно выбрать $a_j \in (At(b) \setminus At(x_{k-1})$ такой, что $j < i$. В силу упорядочения атомов $w(a_j) \geq w(a_i)$. Так как $x_{t-1} < x_{k-1} < b$ и $a_j < b$, то $x_{t-1} \vee a_j \in I$. Следовательно, если бы имело место $w(a_j) > w(a_i)$, то $w(x_t) = w(x_{t-1} \vee a_i) < w(x_{t-1} \vee a_j)$, и жадный алгоритм на t-м шаге вместо элемента x_t выбрал бы элемент $x_{t-1} \vee a_j$. Поэтому $w(a_j) = w(a_i)$.

б) Пусть $(At(b) \setminus At(x_{k-1})) \cap \{a_1, \ldots, a_{i-1}\} = \emptyset$. Тогда существует атом $a \in At(b) \setminus At(x_{k-1})$ такой, что $a \notin \{a_1, \ldots, a_{i-1}\}$. Рассмотрим последовательность элементов $x_{k-1} \leq x_{k-1} \vee a_1 \leq x_{k-1} \vee a_1 \vee a_2 \leq \ldots \leq x_{k-1} \vee a^i$. Так как $a \notin At(x_{k-1})$ и $a \in At(b) \subset At(a^i) = At(x_{k-1} \vee a^i)$, то существует такой номер $j \leq i$, что $a \notin At(x_{k-1} \vee a^{j-1})$ и $a \in At(x_{k-1} \vee a^j)$. Очевидно, $a_j \notin At(x_{k-1})$ и $a_j \notin At(a^{j-1})$, иначе имело бы место $At(x_{k-1} \vee a^{j-1}) = At(x_{k-1} \vee a^{j-1} \vee a_j) = At(x_{k-1} \vee a^j)$. Так как $a_i \in At(x_{k-1})$, то $a_i \neq a_j$, т.е. $j < i$. В силу модулярности w имеем $w(x_{k-1} \vee a^{j-1}) + w(a) = w(x_{k-1} \vee a^j) = w(x_{k-1} \vee a^{j-1} \vee a_j) = w(x_{k-1} \vee a^{j-1}) + w(a_j)$, откуда $w(a) = w(x_{k-1} \vee a^j) - w(x_{k-1} \vee a^{j-1}) = w(a_j)$. В силу леммы 3 $w(a) \geq w(a_i)$, в силу упорядочения атомов $w(a) \leq w(a_i)$, поэтому $w(a_j) = w(a) = w(a_i)$.

Итак, нашелся атом $a_j \notin At(x_{k-1})$ такой, что $j < i$ и $w(a_j) = w(a_i)$. В силу леммы 4 получили противоречие с условием $a_i \in At(x_{k-1})$.

Таким образом, не существует базы элемента a^i, большей $s_{GA} \wedge a^i$, то есть $s_{GA} \wedge a^i$ — база a^i.

□

Следующее утверждение обобщает оценку Дженкинса – Корте – Хаусмана.

Теорема 4. *Пусть L — конечная геометрическая решётка, I — порядковый идеал решётки L, w — модулярная функция на L, $w(0) = 0$. Тогда для приближённого решения s_{GA} задачи (1.1), найденного алгоритмом GA, справедлива оценка*

$$w(s_{GA}) \geq c(I) w(s_O),$$

где s_O — база максимального веса порядкового идеала I, $c(I)$ — кривизна I.

Доказательство. Упорядочим все атомы решётки L в соответствии с леммой 4.

В силу леммы 2

$$w(s_O) = \sum_{i=1}^{n} h(s_O \wedge a^i)(w(a_i) - w(a_{i+1})), \tag{2.6}$$

$$w(s_{GA}) = \sum_{i=1}^{n} h(s_{GA} \wedge a^i)(w(a_i) - w(a_{i+1})). \tag{2.7}$$

В силу леммы 5 $s_{GA} \wedge a^i$ — база a^i, поэтому $h(s_{GA} \wedge a^i) \geq lr(a^i)$. Поскольку $s_O \wedge a^i \in I$, то $h(s_O \wedge a^i) \leq ur(a^i)$. Тогда из (2.6) и (2.7) следует

$$\frac{w(s_{GA})}{w(s_O)} \geq \min_{1\leq i\leq n} \frac{lr(a^i)}{ur(a^i)} \geq \min_{\substack{x\in L,\\ x\neq 0}} \frac{lr(x)}{ur(x)} = c(I).$$

□

Список литературы

1. Айгнер М. Комбинаторная теория / М. Айгнер. – М. : Мир, 1982. – 558 с.
2. Биркгоф Г. Теория решёток / Г. Биркгоф. – М. : Наука, 1984. – 568 с.
3. Баранский В. А. Минимизация модулярных и супермодулярных функций на L-матроидах / В. А. Баранский, М. Ю. Выплов, В. П. Ильев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2011. – Т. 4, № 3. – С. 42–53.
4. Dunstan F. Supermatroids / F. Dunstan, A. Ingleton, D. Welsh // Combinatorics, Southend-on Sea. – 1972. – P. 72–122.
5. Edmonds J. Matroids and the greedy algorithm / J. Edmonds // Math. Programming. – 1971. – Vol. 1, N 2. – P. 127–136.
6. Hausmann D. Lower bounds on the worst-case complexity of some oracle algorithms / D. Hausmann, B. Korte // Discrete Math. – 1978. – Vol. 24, N 3. — P. 261–276.
7. Jenkyns Th. A. The efficacy of the "greedy" algorithm / Th. A. Jenkyns // Proc. 7th Southeastern Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing / eds. Hoffman F., Lesniak L., Mullin R., Reid K. B., Stanton R. – Winnipeg : Utilitas Math, 1976. – P. 341–350.
8. Korte B. An analysis of the greedy heuristic for independence systems / B. Korte, D. Hausmann // Annals of Discrete Math. – 1978. – Vol. 2. – P. 65–74.
9. Rado R. Note on independence functions / R. Rado // Proc. London. Math. Soc. – 1957. – Vol. 7, N 3. – P. 300–320.

V. A. Baransky, M. Yu. Vyplov, V. P. Il'ev

On the problem of maximizing a modular function in the geometric lattice

Abstract.The problem of maximizing a modular set function on order ideal in the finite geometric lattice is considered. Possibility of generalizing the Rado – Edmonds theorem is studied. A performance guarantee of the greedy algorithm generalizing the known Jenkyns – Korte – Hausmann bound for the problem of maximizing an additive function on independence system is obtained.

Keywords: modular function; geometric lattice; order ideal; L-matroid; greedy algorithm; performance guarantee.

Баранский Виталий Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620083, Екатеринбург, пр. Ленина, 51, тел.: (343) 350-62-14 (vitali.baranski@usu.ru)

Выплов Михаил Юрьевич, программист, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, 644077, Омск, пр. Мира 55-а, тел.:(3812) 22-26-09 (vyplov@omsu.ru)

Ильев Виктор Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, 644077, Омск, пр. Мира 55-а, Тел.: (3812) 22-56-96 (iljev@mail.ru)

Baransky Vitaly, Ural Federal University, 51, Lenina pr., Ekaterinburg, 620083, professor, Phone: (343) 350-62-14 (vitali.baranski@usu.ru)

Vyplov Mikhail, Omsk State University, 55-a, Mira pr., Omsk, 644077, programmer, Phone: (3812) 22-26-09 (vyplov@omsu.ru)

Il'ev Victor, Omsk State University, 55-a, Mira pr., Omsk, 644077, professor, Phone: (3812) 22-56-96 (iljev@mail.ru)