Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 1. С. 20—34

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 518.517

Линейные уравнения соболевского типа с относительно p-ограниченными операторами и аддитивным белым шумом

С. А. Загребина
Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)

Е. А. Солдатова
Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)

Аннотация. В статье рассматривается задача Коши – Дирихле для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной, возмущенного белым шумом. Показана редукция рассматриваемой задачи к задаче Коши для стохастического уравнения соболевского типа. Получены достаточные условия однозначной разрешимости как для абстрактной задачи, так и для задачи Коши – Дирихле для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной, возмущенного белым шумом. Наши исследования опираются на математическую модель стохастического оптимального измерения Шестакова – Свиридюка, в которой под «белым шумом» понимается производная Нельсона – Гликлиха винеровского процесса.

Ключевые слова: линейные уравнения соболевского типа; относительный спектр; винеровский процесс; аддитивный белый шум.

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — вещественные сепарабельные гильбертовы пространства; операторы L, M, $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т. е. линейны и непрерывны). Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{0.1}$$

для линейного стохастического уравнения соболевского типа

$$Ldu = Mudt + NdW, \tag{0.2}$$

где $W = W(t)$ — $\mathfrak{U}$-значный Q-винеровский процесс.

Поскольку линейные стохастические уравнения соболевского типа рассматриваются впервые, то мы считаем необходимым дать некоторые пояснения. Прежде всего отметим, что абстрактные уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f \tag{0.3}$$

представляют собой многие неклассические модели математической физики [12]. В последнее время теория и приложения уравнений (0.3) активно развиваются, о чем свидетельствует неуклонный рост числа монографий, полностью или частично посвященных данным уравнениям [4,5,7,14,18,19,22,24,25]. Наши исследования уравнений (0.2) выполнены в рамках направления, возглавляемого Г. А. Свиридюком [26]. Отметим еще, что, хотя задача Коши (0.1) может быть некорректной для уравнений (0.2) и (0.3) [11], мы, следуя [25], предпочитаем начать наши исследования с традиционных постановок.

Что касается стохастических уравнений, то их теория (в конечномерном случае) долгое время развивалась в рамках ставшего классическим направления Ито – Стратоновича – Скорохода (см. например, [16]). Главная задача, которая здесь решается, — это купирование трудностей, связанных с дифференцированием недифференцируемого (в «обычном» смысле) винеровского процесса. Трудности эти преодолеваются переходом от дифференциального к интегральному уравнению и последующим рассмотрением интегралов Ито, Стратоновича и т. д. Фундаментальный обзор удачных попыток распространения подхода Ито – Стратоновича – Скорохода на бесконечномерную ситуацию дан в [17]. В [21] приведены приложения результатов [17] к классическим моделям математической физики.

Заметим еще, что преодоление интегрированием дифференцирования винеровского процесса, — далеко не единственный метод изучения стохастических уравнений. В последнее время в школе И. В. Мельниковой возникло новое направление, в рамках которого стохастические уравнения рассматриваются в пространствах Шварца [6], [23]. Здесь под белым шумом понимается обобщенная производная винеровского процесса, как это и должно быть. Еще обратим внимание на модель измерительного устройства Шестакова – Свиридюка, в которой под «белым шумом» понимается производная Нельсона – Гликлиха винеровского процесса [27].

Основой наших исследований послужит концепция фазового пространства, согласно которой сингулярное уравнение (0.2) редуцируется к регулярному

$$du = Sudt + RdW, \tag{0.4}$$

определенному, однако, не на всем пространстве $\mathfrak{U}$, а на некотором его подпространстве «допустимых начальных значений», которое понимается нами как *фазовое пространство* уравнения (0.2). Затем уже к уравнению (0.4) будут применены методы и результаты [17], [21]. Впервые данный здесь подход был использован при рассмотрении линейных уравнений соболевского типа высокого порядка [3], где автор сумела описать подпространство допустимых начальных значений без перехода к уравнению первого порядка.

Статья построена следующим образом. В первых двух частях содержатся основные сведения об отностительно p-ограниченных операторах и вырожденных разрешающих групп операторов, почерпнутые из [26]. Основной результат здесь — однозначная разрешимость задачи (0.1) для детерминированного уравнения (0.3). В третьей части представлены основные факты теории Q-винеровских процессов, взятые из [17], [21] и адаптированные к нашей ситуации. В четвертой части изложенные предварительные сведения применяются для нахождения достаточных условий однозначной разрешимости задачи (0.1), (0.2). Заключительная часть статьи посвящена приложению абстрактных результатов к задаче Коши – Дирихле для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной, являющимся прообразом многих неклассических моделей математической физики [1,15,20].

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить свою искреннюю благодарность Г. А. Свиридюку за постановку задачи и активные творческие дискуссии.

1. Относительно p-ограниченные операторы

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L,\ M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C}\setminus\rho^L(M)$ оператора M. Нетрудно убедиться, что множество $\rho^L(M)$ открыто, поэтому L-спектр $\sigma^L(M)$ оператора M замкнут.

Определение 1. Оператор M называется *спектрально ограниченным относительно оператора* L (короче, (L,σ)*-ограниченным*), если

$$\exists a \in \mathbb{R}_+ \quad \forall \mu \in \mathbb{C} \quad (|\mu| > a) \Rightarrow (\mu \in \rho^L(M)).$$

Замечание 1. Если существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$, то оператор M (L,σ)-ограничен. Если оператор L компактен, или $\ker L \cap \ker M \neq \{0\}$, то оператор M не является (L,σ)-ограниченным. Если $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = \mathbb{R}^n$, то либо оператор M (L,σ)-ограничен, либо $\sigma^L(M) = \mathbb{C}$.

Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Выберем контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$ и построим операторы *типа Рисса*

$$P_{\mathfrak{U}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} R_\mu^L(M)d\mu, \quad P_{\mathfrak{F}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} L_\mu^L(M)d\mu,$$

где $R_\mu^L(M) = (\mu L - M)^{-1}L$ — *правая*, а $L_\mu^L(M) = L(\mu L - M)^{-1}$— *левая L-резольвенты* оператора M. Интегралы понимаются в смысле Римана, поэтому в силу теоремы Банаха – Штейнгауза операторы $P_{\mathfrak{U}} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $P_{\mathfrak{F}} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$.

Лемма 1. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда операторы $P_{\mathfrak{U}}$ и $P_{\mathfrak{F}}$ — проекторы.*

Положим $\ker P_{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}^0$, $\ker P_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}^0$, $\operatorname{im} P_{\mathfrak{U}} = \mathfrak{U}^1$, $\operatorname{im} P_{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}^1$; и через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$.

Теорема 1. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Тогда*

(i) операторы $L_k, M_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;

(ii) существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$.

Положим $H = M_0^{-1}L_0$, $S = L_1^{-1}M_1$; очевидно, что операторы $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$.

Замечание 2. Впервые понятие относительно ограниченного оператора появилось в работе Г. А. Свиридюка [8]. Формулировка и полное доказательство теоремы 1 впервые представленно в [9] (см. также [10]). Учитывая сказанное, предлагаем в будущем теорему 1 именовать «теоремой Свиридюка о расщеплении».

Следствие 1. *Пусть оператор M (L,σ)-ограничен, тогда при любом $\mu \in \mathbb{C}$, $|\mu| > a$*

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1}(\mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - P_{\mathfrak{F}}) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} P_{\mathfrak{F}}.$$

Здесь и далее символом $\mathbb{I}_{\mathfrak{V}}$ обозначен «единичный оператор» на банаховом пространстве $\mathfrak{V}$.

Определение 2. Пусть оператор M (L,σ)-ограничен. Для L-резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M точка ∞ называется

(i) *устранимой особой точкой*, если оператор $H \equiv \mathbb{O}$;

(ii) *полюсом* порядка $p \in \mathbb{N}$, если $H^p \neq \mathbb{O}$, а $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$;

(iii) *существенно особой точкой*, если $H^q \neq \mathbb{O}$ при любом $q \in \mathbb{N}$.

Замечание 3. Для дальнейшего удобно, во-первых, считать устранимую особую точку полюсом порядка нуль; а во-вторых, выражение «оператор M (L,σ)-ограничен, причем его L-резольвента имеет в точке ∞ полюс порядка $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$» считать эквивалентным выражению «оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$».

Если $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = \mathbb{R}^n$, то оператор M (L,σ)-ограничен точно тогда, когда он (L,p)-ограничен, причем $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Пусть $\ker L \neq \{0\}$. Немного отходя от стандарта, вектор $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$ назовем *собственным вектором* оператора L. Упорядоченное множество $\{\varphi_1, \varphi_2, ...\}$ называется *цепочкой M-присоединенных векторов* оператора L, если $L\varphi_{q+1} = M\varphi_q$, $q \in \{0, 1, \ldots\}$; $\varphi_q \notin \ker L \setminus \{0\}$, $q \in \{1, 2, \ldots\}$. Цепочка может быть бесконечной (в частности, она может быть заполнена нулями, если $\ker L \cap \ker M \neq \{0\}$), однако она обязательно конечна, если в ней существует вектор φ_p такой, что $M\varphi_p \notin \operatorname{im} L$. Мощность конечной цепочки называется ее *длиной*. Линейная оболочка всех собственных и M-присоединенных векторов оператора L называется *M-корневым линеалом*. Если M-корневой линеал замкнут, то он называется *M-корневым пространством* оператора L.

Заметим, что если $\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{F}$, и оператор $M \equiv \mathbb{I}$, то собственные и M-присоединенные векторы в точности совпадут с собственными и присоединенными векторами оператора L, отвечающими нулевому собственному значению.

Теорема 2. (критерий относительной p-ограниченности). *Пусть оператор L — фредгольмов, тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(i) Оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

(ii) Длины всех цепочек M-присоединенных векторов оператора L ограничены числом p, и существует цепочка, длина которой равна p.

2. Вырожденные группы операторов

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, $M \in \mathcal{Cl}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причем оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда линейное однородное (т. е. $f \equiv 0$) уравнение (0.2) можно редуцировать к паре эквивалентных ему уравнений

$$R^L_\alpha(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1} M u, \tag{2.1}$$

$$L^L_\alpha(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1} f, \tag{2.2}$$

где $\alpha \in \rho^L(M)$. Оба уравнения удобно рассматривать как частные случаи уравнения

$$A\dot{v} = Bv, \tag{2.3}$$

где операторы $A, B \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$, а $\mathfrak{V}$ — банахово пространство. Вектор-функцию $v \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{V})$ назовем *решением уравнения* (2.3), если она удовлетворяет этому уравнению. Решение уравнения (2.3) назовем *решением задачи Коши*

$$v(0) = v_0 \tag{2.4}$$

для уравнения (2.3), если оно удовлетворяет (2.4). Заметим, что требование бесконечной дифференцируемости решения не снижает общности рассмотрений. Действительно, пусть решение уравнения (2.3) $v \in$

$C^1(\mathbb{R};\mathfrak{V})$, что естественно для классических решений линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Тогда без каких-либо дополнительных требований решение $v \in C^\infty(\mathbb{R};\mathfrak{V})$.

Определение 3. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{V}$ называется *фазовым пространством* уравнения (2.3), если

(i) любое решение $v = v(t)$ уравнения (2.3) лежит в $\mathfrak{P}$, т. е. $v(t) \in \mathfrak{P}$ при всех $t \in \mathbb{R}$;

(ii) при любом $v_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи Коши для уравнения (2.3).

Замечание 4. Если существует оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$, то фазовое пространство уравнения (2.3) совпадает с пространством $\mathfrak{V}$. Если оператор B (A,σ)-ограничен, и оператор $A \equiv \mathbb{O}$, то фазовое пространство уравнения совпадает с точкой $\{0\}$.

Теорема 3. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда фазовым пространством уравнения (2.1) ((2.2)) служит подпространство $\mathfrak{U}^1$ $(\mathfrak{F}^1)$.*

Определение 4. Отображение $V^{\cdot} \in C^\infty(\mathbb{R};\mathcal{L}(\mathfrak{V}))$ называется *группой разрешающих операторов* (короче, *разрешающей группой*) уравнения (2.3), если

(i) $V^sV^t = V^{s+t}$ при всех $s,t \in \mathbb{R}$;

(ii) вектор-функция $v(t) = V^tv_0$ есть решение уравнения (2.3) при любом $v_0 \in \mathfrak{V}$.

Разрешающая группа уравнения (2.3) называется *голоморфной*, если она имеет аналитическое продолжение во всю комплексную плоскость с сохранением свойств (i), (ii).

Следуя традиции, представим разрешающую группу уравнения (2.3) в виде семейства операторов $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$. Поскольку в определении 2.2 не требуется, чтобы решение уравнения (2.3) было решением задачи (2.4), значит, возможно существование векторов $v_0 \in \mathfrak{V} \setminus \{0\}$ таких, что $V^0v_0 = 0$, т. е. $\ker V^0 \neq \{0\}$. Если вдобавок группа $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$ является голоморфной, то $\ker V^0 = \ker V^t$ при любом $t \in \mathbb{R}$ в силу теоремы о единственности аналитического продолжения. Единица группы V^0, очевидно, является проектором, причем $\operatorname{im} V^0 = \operatorname{im} V^t$ при всех $t \in \mathbb{R}$ в силу группового свойства (требование (ii) в определении 2.2). Поэтому корректным является следующее

Определение 5. Пусть $\{V^t : t \in \mathbb{R}\}$ — голоморфная разрешающая группа уравнения (2.3). Тогда множества $\ker V^{\cdot} = \ker V^0$ и $\operatorname{im} V^{\cdot} = \operatorname{im} V^0$ называются *ядром* и *образом* этой группы соответственно.

Теорема 4. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, тогда существует единственная голоморфная разрешающая группа $\{U^t :$*

$t \in \mathbb{R}\}$ *уравнения (2.1) (*$\{F^t : t \in \mathbb{R}\}$ *уравнения (2.2)), образ которой совпадает с фазовым пространством этого уравнения.*

Действительно, пусть контур $\gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > a\}$, тогда существование вытекает из формулы

$$U^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma R^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu, \quad (F^t = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma L^L_\mu(M) e^{\mu t} d\mu), \quad t \in \mathbb{R}; \quad (2.5)$$

единственность — из представления

$$U^t = \mathbb{O}(\mathbb{I}_{\mathfrak{U}} - P_{\mathfrak{U}}) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma (\mu \mathbb{I}_{\mathfrak{U}} - S)^{-1} e^{\mu t} d\mu P_{\mathfrak{U}}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(F^t = \mathbb{O}(\mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - P_{\mathfrak{F}}) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\gamma (\mu \mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - T)^{-1} e^{\mu t} d\mu P_{\mathfrak{F}}, \quad T = L_1^{-1} M_1).$$

Если $\ker L \neq \{0\}$, то $\ker U^{\cdot} \supset \ker L$, и, значит, $\ker U^{\cdot} \neq \{0\}$ ($\ker F^{\cdot} \supset M[\ker L] \neq \{0\}$). Именно существование нетривиальных ядер голоморфных разрешающих групп уравнений вида (2.3) позволило назвать такие группы *вырожденными*. Заметим еще, что единственная голоморфная разрешающая группа уравнения (2.1) будет таковой и для уравнения (0.3).

Замечание 5. В [9] отмечено, что разрешающих групп уравнение (0.3) может иметь несколько. Однако в силу теоремы 4 разрешающая группа, чей образ совпадает с фазовым пространством однородного уравнения (0.3), существует только одна. Предполагается в дальнейшем именно за ней закрепить название «разрешающая группа линейного уравнения соболевского типа с относительно p-ограниченным оператором», сохранив за остальными группами данного уравнения термин «вырожденные голоморфные группы».

Рассмотрим теперь задачу (0.1) для «детерминированного» уравнения (0.3).

Теорема 5. *Пусть оператор* M *(L, p)-ограничен,* $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. *Тогда для любых* $\tau \in \mathbb{R}_+$, $f \in C^{p+1}([0, \tau); \mathfrak{F})$ *и*

$$u_0 \in \{u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I}_{\mathfrak{U}} - P_{\mathfrak{U}})u + \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} (\mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - P_{\mathfrak{F}}) f^{(k)}(0) = 0\}$$

существует единственное решение $u \in C([0, \tau); \mathfrak{U}) \cap C^1((0, \tau); \mathfrak{U})$ *задачи (0.1), (0.3), которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = U^t u_0 + \int\limits_0^t U^{t-s} L_1^{-1} (\mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - P_{\mathfrak{F}}) f(t) dt - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} (\mathbb{I}_{\mathfrak{F}} - P_{\mathfrak{F}}) f^{(k)}(t).$$

Обратим внимание, что при получении решения задачи (0.1), (0.3) *необходимо* дифференцировать свободный член $f = f(t)$ как минимум $p+1$ раз. И еще заметим, что решение $u = u(t)$ задачи (0.1), (0.3), задаваемое формулой (2.5) уместно называть *классическим.*

3. Q-Винеровские процессы

Пусть $\Omega \equiv (\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – полное вероятностное пространство, $\mathfrak{U} \equiv (\mathfrak{U}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — вещественное сепарабельное гильбертово пространство, снабженное борелевской σ-алгеброй. Измеримое отображение $\xi : \Omega \to \mathfrak{U}$ называется *($\mathfrak{U}$-значной) случайной величиной*; пространство случайных величин обозначим символом $\mathcal{V} \equiv \mathcal{V}(\Omega; \mathfrak{U})$. В пространстве $\mathcal{V}$ выделим подпространство

$$\mathbf{L_2} \equiv \mathbf{L_2}(\Omega; \mathfrak{U}) = \left\{\xi \in \mathcal{V} : \int_\Omega ||\xi(\omega)||^2 d\mathbf{P}(\omega) < +\infty\right\},$$

где $||\xi||^2 = \langle\xi,\xi\rangle$. Пространство $\mathbf{L_2}$, в частности, содержит все *гауссовы* случайные величины (т. е. имеющие нормальные распределения) из $\mathcal{V}$.

Пусть далее $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}$ — некоторый промежуток. Рассмотрим два отображения – $f : \mathfrak{I} \to \mathcal{V}$, которое каждому $t \in \mathfrak{I}$ ставит в соответствие случайную величину $\xi \in \mathcal{V}$, и $g : \mathcal{V} \times \Omega \to \mathfrak{U}$, которое каждой паре (ξ, ω) ставит в соответствие точку $\xi(\omega) \in \mathfrak{U}$. Отображение $\eta : \mathfrak{I}\times\Omega \to \mathfrak{U}$, имеющее вид $\eta = \eta(t,\omega) = g(f(t),\omega)$, мы называем *($\mathfrak{U}$-значным) случайным процессом.* Таким образом, при каждом фиксированном $t \in \mathfrak{I}$ случайный процесс $\eta = \eta(t,\cdot)$ является случайной величиной, т. е. $\eta(t,\cdot) \in \mathfrak{U}$, а при каждом фиксированном $\omega \in \Omega$ случайный процесс $\eta = \eta(\cdot,\omega)$ называется *(выборочной) траекторией.*

Пространство случайных процессов обозначим символом $\mathcal{P} \equiv \mathcal{P}(\mathfrak{I} \times \Omega; \mathfrak{U})$. Выделим в $\mathcal{P}$ подпространство $\mathbf{CL_2}$ случайных процессов, чьи случайные величины принадлежат $\mathbf{L_2}$, т. е. $\eta \in \mathbf{CL_2}$, если $\eta(t,\cdot) \in \mathbf{L_2}$ при всех $t \in \mathfrak{I}$. Это во-первых, а во-вторых, если $\eta \in \mathbf{CL_2}$, то почти наверное (п.н.) все его траектории непрерывны, т. е. при почти всех $\omega \in \Omega$ тректория $\eta(t,\omega)$ непрерывна при всех $t \in \mathfrak{I}$. Отметим, что пространство $\mathbf{CL_2}$ содержит, в частности, те случайные процессы, п.н. все траектории которых непрерывны, а все (независимые) случайные величины — гауссовы.

Пусть спектр $\sigma(Q)$ оператора $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ положителен, дискретен, конечнократен и сгущается только к точке нуль. Обозначим через $\{\lambda_k\}$ последовательность собственных значений оператора Q, занумерованных по невозрастанию с учетом их кратности. Если *след оператора* Q $\operatorname{Tr} Q = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k < +\infty$, то оператор Q называется *ядерным.* Отметим, что линейная оболочка множества $\{\varphi_k\}$ соответствующих собственных векторов оператора Q плотна в $\mathfrak{U}$. Введем в рассмотрение последовательность $\{\beta_k(t)\}$, $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ $(= \{0\} \cup \mathbb{R}_+)$ независимых одномерных (стандартных) винеровских процессов $\beta_k(t) \equiv \beta_k(t,\omega)$, $\beta_k : \overline{\mathbb{R}}_+ \times \Omega \to \mathbb{R}$, которые еще называют *броуновскими движениями* (см. например, [16]).

Определение 6. Случайный процесс

$$W(t) \equiv W(t,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \beta_k(t) \varphi_k, \ t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \tag{3.1}$$

называется *($\mathfrak{U}$-значным, ядерным) Q-винеровским процессом.*

В определении 6 очевидна зависимость Q-винеровского процесса $W = W(t)$ как от оператора Q, так и от множества броуновских движений $\{\beta_k(t)\}$. Далее мы приведем ряд свойств Q-винеровского процесса, имеющих место при любых операторе Q (с описанными выше свойствами) и множестве $\{\beta_k(t)\}$.

(W1) $W(0) = 0$ почти всюду на Ω, и п.н. все траектории непрерывны на $\overline{\mathbb{R}}_+$.

(W2) П.н. все траектории Q-винеровского процесса недифференцируемы ни в одной точке $t \in \overline{\mathbb{R}}_+$ и на любом промежутке имеют неограниченнную вариацию.

(W3) Q-Винеровский процесс — *гауссов* (т. е. все его случайные величины — гауссовы).

Некоторые из этих свойств доказываются просто, например, (W1) сразу следует из (3.1) в силу ядерности оператора Q. Другие достаточно сложно (см. например, [21]). Однако из этих свойств с очевидностью следует

Теорема 6. *При любых ядерном операторе $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ и множестве броуновских движений $\{\beta_k(t)\}$ Q-винеровский процесс $W \in \mathbf{CL_2}$.*

4. Аддитивный белый шум

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — вещественные сепарабельные гильбертовы пространства, оператор $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ — ядерный, а операторы L, M, $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Рассмотрим линейное стохастическое уравнение

$$Ldu = Mudt + NdW, \tag{4.1}$$

для которого поставим задачу Коши

$$u(0) = \xi, \tag{4.2}$$

где $\xi \in \mathcal{V}$. На оператор N наложим условие

$$P_{\mathfrak{F}}N = N. \tag{ZS}$$

Если оно выполнено, то в силу теоремы 5 решение $u = u(t)$ задачи (4.1), (4.2) можно «формально» представить в виде

$$u(t) = U^t\xi + \int_0^t U^{t-s}L_1^{-1}NdW(s). \tag{4.3}$$

Интегрируя по частям второе слагаемое в (4.3), получим

$$u(t) = L_1^{-1}NW(t) + U^t\xi + \int_0^t U^{t-s}SL_1^{-1}NW(s)ds \tag{4.4}$$

в силу теоремы 1, (2.5) и свойства (W1).

Определение 7. Случайный процесс $u \in \mathbf{CL_2}$ называется *решением задачи (4.1), (4.2)*, если он имеет вид (4.4) и удовлетворяет (4.2).

Замечание 6. В современной математической литературе такое решение часто называют «мягкими» (mild solution) (см. например, [21]). Понятно, что если ограничиться «классической» трактовкой производной, то на более гладкое решение в силу (W2) рассчитывать не приходится.

Теорема 7. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, и выполнено условие (ZS). Тогда для любой $\mathfrak{U}$-значной гауссовой случайной величины ξ независимой от Q-винеровского процесса W и такой, что $P_{\mathfrak{U}}\xi = \xi$, существует единственное решение $u \in \mathbf{CL_2}$ задачи (4.1), (4.2).*

Доказательство нетрудно вывести из теоремы 6. Обратим внимание, что условия теоремы 7 обеспечивают гауссовость случайного процесса (4.4), но на этом останавливаться не будем.

5. Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной

Пусть $G \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей ∂G класса C^∞. Будем искать функцию $u = u(x,t)$, удовлетворяющую в цилиндре $\Omega \times \mathbb{R}$ уравнению

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u + f \tag{5.1}$$

и условиям Дирихле

$$u(x,t) = 0,\ (x,t) \in \partial G \times \mathbb{R}. \tag{5.2}$$

Здесь параметр $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Уравнение (5.1) моделирует динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде [1]. (Заметим, что это уравнение имеет универсальный характер — оно также моделирует процесс влагопереноса в почве [20] и процесс теплопроводности с двумя температурами [15]).

Наша цель — редукция (5.1), (5.2) к уравнению (0.2) с аддитивным белым шумом, под которым понимается производная Q-винеровского процесса. Первым шагом к данной цели будет определение ядерного оператора Q. В [21] таковым служит оператор Грина задачи (5.2) для уравнения Пуассона $-\Delta u = f$ в области G. Такой выбор обладает следующим недостатком. Поскольку собственные значения $\{\mu_k\}$ спектральной задачи

$$-\Delta\varphi_k = \mu_k\varphi_k \tag{5.3}$$

в области G с условием (5.2) имеют следующую асимптотику

$$\mu_k \sim k^{\frac{2}{d}},\ k \to \infty, \tag{5.4}$$

то оператор Грина задачи (5.2), (5.3) будет ядерным, если только $d = 1$. Поэтому в [21] и волновое уравнение, и уравнение теплопроводности рассматриваются только на интервале.

Для преодоления этого недостатка предлагается в качестве Q взять оператор Грина следующей задачи

$$(-1)^m\Delta^m u = f, \tag{5.5}$$

$$(-1)^l\Delta^l u(x) = 0,\ x \in \partial G,\ l = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{5.6}$$

Внимательно рассмотрев соответствующую спектральную задачу

$$(-1)^m\Delta^m\varphi_k = \nu_k\varphi_k \tag{5.7}$$

в области G с условиями (5.6), можно заметить, что собственные функции задач (5.3) и (5.7) одни и те же, однако собственные значения $\nu_k = \lambda_k^m$. Ввиду асимптотики (5.4)

$$\nu_k \sim k^{\frac{2m}{d}},\ k \to \infty,$$

поэтому путем подбора m можно рассматривать области любой размерности.

В дальнейшем мы считаем, что выбор подходящего числа $m \in \mathbb{N}$ сделан. (Должно быть $m \geq 2$, если мы хотим рассматривать трехмерные области). Положим $\lambda_k = \nu_k^{-1}$ и формулой (3.1) определим Q-винеровский процесс, где $\{\varphi_k\}$ — собственные функции задач (5.6), (5.7) (или, если угодно, (5.2), (5.3)). Определим пространства $\mathfrak{U} = \{u \in W_2^{l+2} :$ выполнено (5.2)$\}$, $\mathfrak{F} = W_2^l$, $l \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $W_2^k = W_2^k(G)$ — пространства Соболева. Заметим, что оператор Лапласа $-\Delta : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$ — топлинейный изоморфизм. Отметим еще, что оператор Q определен на пространстве $\mathfrak{U}$ и является обратным к оператору $(-1)^m\Delta^m : \mathcal{V} \to \mathfrak{U}$, который тоже является топлинейным изоморфизмом, $\mathcal{V} = \{u \in W_2^{l+2m}$: выполнено (5.6)$\}$. Наконец, формулами $L = \lambda - \Delta$ и $M = \alpha\Delta$ зададим линейные непрерывные операторы, L, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, которые фредгольмовы, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Детальное обсуждение этого круга вопросов — в фундаментальном справочнике Трибеля (см. [13]).

Лемма 2. *При любых $\lambda \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ оператор M $(L,0)$-ограничен.*

Доказательство. Если $-\lambda \notin \{\mu_k\}$, то утверждение тривиально. Если $-\lambda \in \{\mu_k\}$, то ядро $\ker L = \operatorname{span}\{\varphi_k : \mu_k = -\lambda\}$. Возьмем вектор $\psi = \sum\limits_{-\lambda=\nu_k} a_k\varphi_k \in \ker L$. Тогда $M\psi = -\alpha\lambda\psi \notin \operatorname{im}L$, т. е. оператор L не имеет M-присоединенных векторов. Ссылка на теорему 2 завершает доказательство. $\square$

Далее заметим, что

$$R_\mu^L(M) = \sum_{-\lambda\neq\mu_k} \frac{\langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k}{\mu + \alpha\mu_k(\lambda+\mu_k)^{-1}},\ L_\mu^L(M) = \sum_{-\lambda\neq\mu_k} \frac{[\cdot,\varphi_k]\varphi_k}{\mu + \alpha\mu_k(\lambda+\mu_k)^{-1}},$$

где $[\cdot,\cdot]$ – скалярное произведение в $\mathfrak{F}$. Построим проекторы из леммы 1

$$P_{\mathfrak{U}} = \sum_{-\lambda\neq\mu_k} \langle\cdot,\varphi_k\rangle\varphi_k,\ P_{\mathfrak{F}} = \sum_{-\lambda\neq\mu_k} [\cdot,\varphi_k]\varphi_k.$$

Простоты ради положим оператор $N = P_{\mathfrak{U}}$, тогда, во-первых, оператор $N \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (и даже компактен!) в силу плотного и непрерывного (даже компактного!) вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ (теорема Соболева – Кондрашева). Во-вторых, условие (ZS) выполняется автоматически. Итак, редукция уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной (5.1) с условием (5.2) к уравнению (4.1) с аддитивным белым шумом закончена.

Перейдем к построению «мягкого» решения (4.4) (см. замечание 6). Прежде всего отметим, что условие $P_{\mathfrak{U}}\xi = \xi$ в теореме 7 на начальную случайную величину ξ из (4.2) эквивалентно условию

$$\langle\xi,\varphi_k\rangle = 0,\ -\lambda = \mu_k. \tag{5.8}$$

Далее, первое слагаемое в (4.4) в данной ситуации имеет вид

$$L_1^{-1}NW(t) = \sum_{-\lambda\neq\mu_k} \frac{\beta_k(t)}{(\lambda+\mu_k)\mu_k^{2m}}\varphi_k, \tag{5.9}$$

где (напомним!) $\mu_k^{2m} = \lambda_k^{-1}$. Второе слагаемое в (4.4) тоже можно легко посчитать

$$U^t\xi = \sum_{-\lambda\neq\mu_k} \langle\xi,\varphi_k\rangle e^{\sigma_k t}\varphi_k, \tag{5.10}$$

где $\sigma_k = -\alpha\mu_k(\lambda+\mu_k)^{-1}$ при $-\lambda \neq \mu_k$ представляют точки L-спектра $\sigma^L(M)$ оператора M в данной ситуации. Наконец, последнее слагаемое в (4.4)

$$\int_0^t U^{t-s}SL_1^{-1}NW(s)ds = d\sum_{-\lambda\neq\mu_k}\int_0^t \frac{\beta_k(s)e^{\sigma_k(t-s)}ds}{(\lambda+\mu_k)\mu_k^{2m-1}}\varphi_k. \qquad (5.11)$$

Итак, доказана

Теорема 8. *При любых $-\lambda \in \{\mu_k\}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ и $\xi \in \mathbf{L_2}$ такой, что выполнено (5.8), существует единственное решение $u \in \mathbf{CL_2}$ задачи (4.2) для стохастического уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной с аддитивным белым шумом и условием (5.2), которое к тому же имеет вид (4.4), где слагаемые представлены формулами (5.9)–(5.11).*

Замечание 7. Если параметр $-\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{\mu_k\}$, то утверждение теоремы 7 тоже верно со следующими изменениями:

(i) условие (5.8) исключить;

(ii) в формулах (5.9)–(5.11) убрать ограничение $-\lambda \neq \mu_k$.

В заключение отметим, что изложенные здесь результаты в весьма кратком виде были опубликованы в [2].

Список литературы

1. Баренблатт Г. И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах / Г. И. Баренблатт, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина // Прикл. математика и механика. – 1960. – Т. 24, № 5. – С. 58–73.
2. Загребина С. А. Уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной с белым шумом / С. А. Загребина, Е. А. Солдатова // Обозрение приклад. и пром. математики. – 2012. – Т. 19, вып. 2. – С. 252–254.
3. Замышляева А. А. Стохастические неполные линейные уравнения соболевского типа высокого порядка с аддитивным белым шумом / А. А. Замышляева // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. – 2012. – № 40 (299), вып. 14. – С. 73–82.
4. Замышляева А. А. Линейные уравнения соболевского типа высокого порядка / А. А. Замышляева. – Челябинск : Издат. Центр ЮУрГУ, 2012.
5. Манакова Н. А. Задачи оптимального управления для уравнений соболевского типа / Н. А. Манакова. – Челябинск : Издат. Центр ЮУрГУ, 2012.
6. Мельникова И. В. Абстрактная задача Коши в пространствах стохастических распределений / И. В. Мельникова, А. Филинков // Соврем. математика. Фундам. направления. – 2006. – Т. 16. – С. 96–109.
7. Сагадеева М. А. Дихотомии решений линейных уравнений соболевского типа / М. А. Сагадеева. – Челябинск : Издат. центр ЮУрГУ, 2012.
8. Свиридюк Г. А. Полулинейные уравнения типа Соболева с относительно ограниченным оператором / Г. А. Свиридюк // Докл. Акад. наук СССР. – 1991. – Т. 318, № 4. – С. 828–831.

9. Свиридюк Г. А. Исследование полулинейных уравнений типа Соболева в банаховых пространствах : дис. . . . . . . д-ра физ.-мат. наук / Г. А. Свиридюк. – Челябинск, 1993.
10. Свиридюк Г. А. К общей теории полугрупп операторов / Г. А. Свиридюк // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 47–74.
11. Свиридюк Г. А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г. А. Свиридюк, С. А. Загребина // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 51–72.
12. Свиридюк Г. А. Неклассические модели математической физики / Г. А. Свиридюк, С. А. Загребина // Вестн. Юж.-Урал. гос. ун-та. Сер. Мат. моделирование и программирование. – 2012. – № 40 (299), вып. 14. – С. 7–18.
13. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М. : Мир, 1980. – 664 с.
14. Al'shin A. B. Blow-up in nonlinear Sobolev-type equations / A. B. Al'shin, M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov. – Berlin ; N. Y. : Walter de Gruyter GmbH& Co.KG, 2011.
15. Chen P. J. On a theory of heat conduction involving two temperatures / P. J. Chen, M. E. Gurtin // Z. Angew. Math. Phys. – 1968. – Vol. 19. – P. 614–627.
16. Gliklikh Yu. E. Global and Stochastic Analysis with Applications to Mathematical Physics / Yu. E. Gliklikh. – London ; Dordrecht ; Heidelberg ; N. Y. : Springer, 2011.
17. Da Prato G. Stochastic equations in infinite dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk. – Cambridge : Cambridge University Press, 1992.
18. Demidenko G. V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest — order derivative / G. V. Demidenko, S. V. Uspenskii. – N. Y. ; Basel ; Hong Kong : Marcel Dekker, Inc., 2003.
19. Favini A. Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. – N. Y. : Marcel Dekker, Inc. 1999.
20. Hallaire M. On a theory of moisture-transfer / M. Hallaire // Inst. Rech. Agronom. – 1964. – № 3. – P. 60–72.
21. Kovács M. Introduction to stochastic partial differential equations / M. Kovács, S. Larsson // Proceedings of «New Directions in the Mathematical and Computer Sciences», National Universities Commission, Abuja, Nigeria, October 8–12, 2007. Publications of the ICMCS. – 2008. – Vol. 4. – P. 159–232.
22. Lyapunov – Shmidt method in nonlinear analysis and applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. – Dordrecht ; Boston ; London : Kluwer Academic Publishers, 2002.
23. Melnikova I. V. Abstract Stochastic Equations II. Solutions In Spaces Of Abstract Stochastic Distributions / I. V. Melnikova, A. I. Filinkov, M. A. Alshansky // J. of Mathematical Sciences. – 2003. – Vol. 116, N 5. – P. 3620–3656.
24. Pyatkov S. G. Operator theory. Nonclassical problems / S. G. Pyatkov. – Utrecht ; Boston ; Koln ; Tokyo : VSP, 2002.
25. Showalter R. E. Monotone operators in Banach Space and and nonlinear partial differential equations / R. E. Showalter. – Providence : AMS, 1997.
26. Sviridyuk G. A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Utrecht ; Boston ; Köln ; Tokyo : VSP, 2003.
27. Shestakov A. L. On the measurement of the «white noise» / A. L. Shestakov, G. A. Sviridyuk // Bulletin of South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. – 2012. – № 27 (286), issue 13. – P. 99–108.

S.A. Zagrebina, E.A. Soldatova

The linear Sobolev-type Equations With Relatively p-bounded Operators and Additive White Noise

Abstract. In the paper we observe the Cauchy – Dirichlet problem for the Barenblatt – Zheltov – Kochina equation for the perturbed white noise. We show the reduction of the problem under consideration to the Cauchy problem for stochastic Sobolev-type equation. We obtain sufficient conditions for the unique solvability for the abstract problem and for the Cauchy – Dirichlet problem for the Barenblatt – Zheltov – Kochina equation of the perturbed white noise. Our research is based on the mathematical model of Shestakov – Sviridyuk stochastic optimal measurement where under the «White noise» is understood the Nelson – Gliklikh derivative of the Wiener process.

Keywords: linear Sobolev type equations, relative spectrum, Wiener process, additive white noise.

Загребина Софья Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76 тел.: (351)2679339 (zagrebina_sophiya@mail.ru)

Солдатова Екатерина Александровна, аспирантка, Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет), 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76 тел.: (351)2679339 (soldatova.ea@mail.ru)

Zagrebina Sophiya, “South Ural State University” (National Research University), 76, Lenin Ave, Chelyabinsk, 454080, Candidate of Science (Physics & Mathematics) Associate Professor, Department «Equations of Mathematical Physics», Phone: (351)2679339 (zagrebina_sophiya@mail.ru)

Soldatova Ekaterina, “South Ural State University” (National Research University), 76, Lenin Ave, Chelyabinsk, 454080, Graduate student, Department «Equations of Mathematical Physics», Phone: (351)2679339 (soldatova.ea@mail.ru)