Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 1. С. 45—56

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.946

Интегрируемость модели магнитной изоляции и ее точные радиально-симметричные решения *

А. А. Косов
Федеральное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Э. И. Семенов
Федеральное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории управления СО РАН

А. В. Синицын
Universidad Nacional de Colombia, Bogota, Colombia

Аннотация. Для модели магнитной изоляции вакуумного диода изучается сингулярная краевая задача. Обоснована интегрируемость рассматриваемой системы двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, построена полная система первых интегралов, разработан метод решения сингулярной краевой задачи. Предложена обобщенная модель с трехмерным оператором Лапласа, для которой найдены параметрические семейства точных радиально-симметричных решений.

Ключевые слова: первые интегралы; интегрируемость; сингулярная краевая задача; уравнения эллиптического типа; точные решения; вакуумный диод.

1. Введение

В последнее десятилетие мировое научное сообщество много внимания уделяет опережающему развитию плазменных и нано-технологий, созданию новых нано-материалов, исследованию взаимодействия электромагнитных полей с заряженными частицами. При этом в рамках междисциплинарного подхода важную интегрирующую роль играет математическое моделирование, позволяющее увязывать и согласовывать между собой различные физические законы, характерные для взаимодействующих объектов разной физической природы. Для моделирования плазмы применяют обычно системы дифференциальных уравне-

* Работа выполнена при поддержке СО РАН (междисциплинарный проект № 80).

ний, для которых требуется отыскивать решения и устанавливать их свойства при дополнительных краевых условиях. В [1] была предложена предельная модель магнитной изоляции для плоского вакуумного диода, представляющая собой систему двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Для этой системы требуется найти решение сингулярной краевой задачи и исследовать ее свойства. Ряд результатов по названной модели [1] был получен ранее с использованием как аналитических, так и численных методов. В [2] были получены оценки верхних и нижних решений сингулярной краевой задачи. В [3] были получены точные решения для обобщенной модели с двумерным оператором Лапласа. В [4] найдена асимптотика решения вблизи сингулярной точки для рассматриваемого изолированно уравнения для электрического потенциала. В [5] изучались условия существования первых интегралов другой обобщенной модели, описываемой системой квазипотенциальных уравнений, и была обоснована интегрируемость модели [1]. Таким образом, предложенная в [1] модель магнитной изоляции оказалась интересным для изучения математическим объектом, обладающим богатым набором свойств, исследование которых целесообразно продолжить. В данной статье мы продолжаем исследования [3, 5] и основной целью ставим интегрирование модели [1], разработку метода решения соответствующей сингулярной краевой задачи, а также получение точных решений для обобщенной модели магнитной изоляции с трехмерным оператором Лапласа.

2. Описание модели и постановка задачи

Предельная модель плоского вакуумного диода была получена в [1] группой математиков Тулузского университета. Эта модель представляет собой систему двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка следующего вида

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = j\frac{(1+\varphi)}{\sqrt{(1+\varphi)^2 - a^2 - 1}}, \quad \frac{d^2 a}{dx^2} = j\frac{a}{\sqrt{(1+\varphi)^2 - a^2 - 1}}. \qquad (2.1)$$

Здесь независимая переменная $x \in [0,1]$ означает относительное расстояние от катода, $x = 1$ соответствует аноду. Функция $\varphi(x)$ описывает изменение потенциала электрического поля при перемещении от катода к аноду, соответственно функция $a(x)$ — потенциал магнитного поля, j — плотность тока через диод (единственный конструктивный параметр модели). Система (2.1) описывает электрическое и магнитное поля внутри диода и ее решение должно удовлетворять краевым условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad a(0) = 0, \quad \varphi'(0) = \frac{d\varphi}{dx}(0) = 0, \qquad (2.2)$$

$$\varphi(1) = \varphi_1, \quad a(1) = a_1. \tag{2.3}$$

Заметим, что краевая задача (2.1)–(2.3) является сингулярной, так как условия (2.2) при их подстановке в (2.1) приводят к нулевому знаменателю.

Мы будем рассматривать систему (2.1) в области

$$\Omega = \left\{(\varphi, a) : (1+\varphi)^2 - a^2 - 1 > 0\right\}$$

на каждом компактном подмножестве которого правые части (2.1) имеют ограниченные частные производные и, следовательно, выполнены условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши для (2.1). Кроме того, в силу очевидной симметрии можно ограничиться изучением только решений с положительными $(1+\varphi(x))$ и $a(x)$, т.е. вести все исследования в области

$$\Omega_+ = \Omega \cap \{(\varphi, a) : (1+\varphi) > 0,\ a > 0\}.$$

Пусть на правом конце выполняются условия теоремы существования и единственности решения задачи Коши (т.е. $\theta_1 = (1+\varphi_1)^2 - a_1^2 - 1 > 0$.)

Определение 1. *Решением задачи (2.1)–(2.3) будем называть такую определенную на промежутке $x \in]0,1]$ и принимающую значения в множестве Ω_+ дважды дифференцируемую функцию $(\varphi(x), a(x))$, которая*

1) *удовлетворяет краевым условиям на правом конце $\varphi(1) = \varphi_1$, $a(1) = a_1$;*

2) *на каждом отрезке $x \in [\varepsilon, 1]$, $0 < \varepsilon < 1$ обращает исходные уравнения (2.1) в тождества при подстановке (при этом на концах отрезка производные считаются односторонними);*

3) *существуют пределы $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \varphi(\varepsilon) = 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} a(\varepsilon) = 0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \varphi'(\varepsilon) = 0$.*

Особенности данного определения:

а) оно не требует подстановки краевых условий с левого конца отрезка в систему, что позволяет уйти от необходимости делить на нуль;

б) оно не накладывает никаких ограничений на поведение на левом конце отрезка первой производной $a'(x)$ и вторых производных;

в) оно может быть очевидным образом модернизировано и на случай $\theta_1 = (1+\varphi_1)^2 - a_1^2 - 1 = 0$, когда сингулярность имеется и на правом конце отрезка.

При этом в рамках данного определения допустима и такая ситуация, когда предел производной $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} a'(\varepsilon)$ не существует, либо является бесконечностью.

Одна из основных целей данной работы — разработать способ построения решения сингулярной краевой задачи (2.1)–(2.3) в смысле приведенного выше определения. Для этого мы покажем, что система (2.1) интегрируется в квадратурах, и построим полную систему первых интегралов.

3. Представление в гамильтоновой форме и интегрируемость

Введем новые обозначения для независимой и зависимых переменных:

$$t = x,\ \ q_1 = \varphi(x),\ \ q_2 = a(x),\ \ p_1 = -\varphi'(x),$$
$$p_2 = a'(x),\ \ q = col(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2,\ \ p = col(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$$

и функцию Гамильтона

$$H(q,p) = \frac{1}{2}(-p_1^2 + p_2^2) + j\sqrt{(1+q_1)^2 - q_2^2 - 1}.$$

Тогда систему (2.1) можно записать в каноническом виде

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p},\quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{3.1}$$

Соответственно краевые условия в новых переменных перепишутся так

$$q_1(0) = 0,\ \ q_2(0) = 0,\quad p_1(0) = 0, \tag{3.2}$$

$$q_1(1) = Q_1 \equiv \varphi_1,\quad q_2(1) = Q_2 \equiv a_1. \tag{3.3}$$

Новая краевая задача (3.1)–(3.3) полностью эквивалентна исходной (2.1)–(2.3) и отличается от нее только гамильтоновой формой записи системы дифференциальных уравнений, что позволяет воспользоваться методами интегрирования, разработанными для задач аналитической механики [6].

Гамильтонова система (3.1) имеет интеграл энергии

$$J_1 \equiv H(q,p) = \frac{1}{2}(-p_1^2 + p_2^2) + j\sqrt{(1+q_1)^2 - q_2^2 - 1} = c_1 \stackrel{\triangle}{=} const. \tag{3.4}$$

Легко убедиться, что другой первый интеграл системы (3.1) имеет вид

$$J_2 = (1+q_1)p_2 + q_2 p_1 = c_2 \stackrel{\triangle}{=} const. \tag{3.5}$$

Первые интегралы J_1 и J_2 не зависят явно от времени и находятся в инволюции. В области $D = \{(q_1, q_2, p_1, p_2) : (q_1, q_2) \in \Omega_+, (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2\}$ ранг матрицы Якоби для первых интегралов J_1 и J_2 становится меньше 2 лишь на множестве

$$M = \left\{ \begin{array}{c} (q_1, q_2, p_1, p_2) : (q_1, q_2) \in \Omega_+, \\ p_1 = \pm\dfrac{\sqrt{j}q_2}{\left((1+q_1)^2 - q_2^2 - 1\right)^{1/4}},\ p_2 = \pm\dfrac{\sqrt{j}\,(1+q_1)}{\left((1+q_1)^2 - q_2^2 - 1\right)^{1/4}} \end{array} \right\}.$$

Отметим, что это множество M двумерно и не разделяет четырехмерное множество D на подобласти. Далее будем вести все рассмотрения в области $D \setminus M$, где первые интегралы J_1 и J_2 функционально независимы. Поэтому в соответствии с теоремой Лиувилля [6, § 121, стр. 367; § 148, стр. 417], модель диода (3.1) является в этой области интегрируемой. Чтобы построить два недостающих первых интеграла, выразим из равенств (3.4) и (3.5) импульсы через координаты

$$p_1 = -\frac{c_2 q_2}{z^2} \mp \frac{\sqrt{c_2^2 - 2z^2(c_1 - j\sqrt{z^2-1})}}{z^2}(1+q_1), \tag{3.6}$$

$$p_2 = \frac{c_2(1+q_1)}{z^2} \pm \frac{\sqrt{c_2^2 - 2z^2(c_1 - j\sqrt{z^2-1})}}{z^2} q_2, \tag{3.7}$$

где использовано обозначение $z^2 = (1+q_1)^2 - q_2^2$.

Эти формулы можно представить в виде $p_1 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_1}$, $p_2 = \dfrac{\partial \Phi}{\partial q_2}$, где функция

$$\Phi(q_1, q_2, c_1, c_2) = \frac{c_2}{2} \ln \left| \frac{1+q_1+q_2}{1+q_1-q_2} \right| \pm$$

$$\int\limits_{\sqrt{(1+q_1)^2-q_2^2}}^{\sqrt{(1+Q_1)^2-Q_2^2}} \frac{\sqrt{c_2^2 - 2s^2(c_1 - j\sqrt{s^2-1})}}{s} ds. \tag{3.8}$$

Интеграл в (3.8) сводится к элементарным и эллиптическим функциям. В соответствии с теоремой Лиувилля недостающие два первых интеграла выражаются через функцию $\Phi(q_1, q_2, c_1, c_2)$:

$$J_3 \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial c_2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+q_1+q_2}{1+q_1-q_2} \right| \pm$$

$$\int\limits_{\sqrt{(1+q_1)^2-q_2^2}}^{\sqrt{(1+Q_1)^2-Q_2^2}} \frac{c_2 ds}{s\sqrt{c_2^2 - 2s^2(c_1 - j\sqrt{s^2-1})}} = c_3 \stackrel{\triangle}{=} const, \tag{3.9}$$

$$J_4 \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial c_1} = \mp \int\limits_{\sqrt{(1+q_1)^2-q_2^2}}^{\sqrt{(1+Q_1)^2-Q_2^2}} \frac{s ds}{\sqrt{c_2^2 - 2s^2(c_1 - j\sqrt{s^2-1})}} = t + c_4,\ c_4 \stackrel{\triangle}{=} const. \tag{3.10}$$

Отметим, что интегралы (3.9) и (3.10) мы используем, естественно, только при ненулевых радикалах в знаменателе. Так как на множестве M справедливо тождество $(1+q_1)\,p_1 + q_2 p_2 \equiv 0$, а из формул (3.6) и (3.7) следует $(1+q_1)\,p_1 + q_2 p_2 = \mp\sqrt{c_2^2 - 2z^2\left(c_1 - j\sqrt{z^2-1}\right)}$, то ненулевые радикалы в знаменателях (3.9) и (3.10) обеспечивают и независимость первых интегралов J_1 и J_2.

Полученная полная система четырех первых интегралов (3.4), (3.5), (3.9) и (3.10) может использоваться в области Ω_+ для решения начальных и краевых задач, в том числе и задачи (3.1)–(3.3).

4. Решение сингулярной краевой задачи

Полагая в (3.9) $t = 1$ и используя условия (3.3) для правого конца отрезка, получаем $c_4 = -1$. Аналогичным образом из (3.9) находим $c_3 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+Q_1+Q_2}{1+Q_1-Q_2}\right|$. Из условий (2.2) или (3.2) на левом конце отрезка и интегралов (3.4) и (3.5) следует, что $p_1(0) = 0, p_2(0) = c_2, c_2^2 = 2c_1$. Введем в рассмотрение функции

$$F(u,v,Q_1,Q_2) = \int\limits_1^{\sqrt{(1+Q_1)^2-Q_2^2}} \frac{zdz}{\sqrt{u^2(1-z^2)+2vz^2\sqrt{z^2-1}}},$$

$$G(u,v,Q_1,Q_2) = \int\limits_1^{\sqrt{(1+Q_1)^2-Q_2^2}} \frac{udz}{z\sqrt{u^2(1-z^2)+2vz^2\sqrt{z^2-1}}}.$$

Эти функции представимы в виде комбинаций элементарных и эллиптических функций своих аргументов. Из равенств (3.9) и (3.10) с учетом полученных из краевых условий соотношений между произвольными постоянными теперь вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Если $c_2 = u_*$ и $j = v_*$ являются решением системы двух нелинейных уравнений*

$$F(u,v,Q_1,Q_2) = 1, \quad G(u,v,Q_1,Q_2) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+Q_1+Q_2}{1+Q_1-Q_2}\right|, \tag{4.1}$$

то решение краевой задачи (3.1)–(3.3) существует и является решением задачи Коши для (3.1) с начальными условиями на правом конце отрезка, задаваемыми вытекающими из (3.6) и (3.7) равенствами:

$$q_1(1) = Q_1, \quad p_1(1) = -\frac{u_*Q_2}{Z^2} - \frac{\sqrt{u_*^2(1-Z^2)+2v_*Z^2\sqrt{Z^2-1}}}{Z^2}(1+Q_1), \tag{4.2}$$

$$q_2(1) = Q_2, \;\; p_2(1) = \frac{u_*(1+Q_1)}{Z^2} + \frac{\sqrt{u_*^2(1-Z^2)+2v_*Z^2\sqrt{Z^2-1}}}{Z^2}Q_2, \tag{4.3}$$

где $Z^2 = (1+Q_1)^2 - Q_2^2$.

Отметим, что если система (4.1) несовместна, то это еще не означает, что у краевой задачи (3.1)–(3.3) нет решения. Встречаются такие ситуации, в которых в выражениях (3.6), (3.7) импульсов через координаты на решении краевой задачи происходит смена знаков и тогда равенства (4.1) нарушаются.

5. Радиально-симметричные точные решения обобщенной модели магнитной изоляции

Рассмотрим теперь систему двух дифференциальных уравнений в частных производных

$$\Delta\psi \triangleq \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = j(x,y,z)\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}}, \quad \psi \triangleq \psi(x,y,z), \tag{5.1}$$

$$\Delta a \triangleq \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2} = j(x,y,z)\frac{a}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}}, \quad a \triangleq a(x,y,z). \tag{5.2}$$

в трехмерном координатном пространстве. Эта система является обобщением модели диода (2.1), полученным использованием новой искомой функции $\psi = 1 + \varphi$, заменой второй производной в левых частях на трехмерный оператор Лапласа и использованием зависящей от пространственных переменных плотности тока $j(x,y,z)$ в правых частях исходной системы. В [3] нами были получены точные решения системы (5.1), (5.2) для двумерного случая. Основная цель данного раздела статьи - получение трехмерных точных решений системы (5.1), (5.2).

Нас будут интересовать радиально-симметричные решения системы (5.1), (5.2) как наиболее простой класс нетривиальных многомерных решений, т.е. функции

$$\psi(\mathbf{x}) \triangleq \psi(r), \quad a(\mathbf{x}) \triangleq a(r), \quad \text{где } r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

В этом случае система (5.1), (5.2) преобразуется к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка

$$\psi'' + \frac{2}{r}\psi' = j(r)\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}}, \quad \psi \triangleq \psi(r) \tag{5.3}$$

$$a'' + \frac{2}{r}a' = j(r)\frac{a}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}}, \quad a \triangleq a(r). \tag{5.4}$$

Здесь и далее штрих означает производную по аргументу r.

Заметим, что система (5.3), (5.4) обладает следующим первым интегралом

$$\mathbf{I} \equiv r^2\left(\psi a' - a\psi'\right) = const.$$

Решение системы (5.3), (5.4) будем отыскивать в виде следующего функционального анзатца

$$\psi(r) = \Theta(r)\operatorname{ch}\omega(r), \tag{5.5}$$

$$a(r) = \Theta(r)\operatorname{sh}\omega(r), \tag{5.6}$$

где новые функции $\Theta \triangleq \Theta(r)$, $\omega \triangleq \omega(r)$ подлежат определению. Как будет показано ниже, с помощью анзатца (5.5), (5.6) систему (5.3), (5.4) удается "расщепить", т.е. свести её к двум уравнениям, одно на функцию $\Theta(r)$, второе на функцию $\omega(r)$.

После подстановки анзатца (5.5), (5.6) в систему (5.3), (5.4) и вычисления необходимых производных, сгруппируем слагаемые таким образом, чтобы получить следующую алгебраическую систему:

$$A\operatorname{ch}\omega(r) + B\operatorname{sh}\omega(r) = 0,$$

$$A\operatorname{sh}\omega(r) + B\operatorname{ch}\omega(r) = 0.$$

Здесь приняты обозначения

$$A \;=\; \Theta'' + \frac{2}{r}\Theta' + \Theta\omega'^2 - j(r)\frac{\Theta}{\sqrt{\Theta^2-1}},$$

$$B \;=\; \left(2\Theta' + \frac{2}{r}\Theta\right)\omega' + \Theta\omega''.$$

Относительно переменных A и B полученная система алгебраических уравнений является линейной и однородной, её определитель равен единице, а поэтому она имеет только тривиальное решение $A = 0$, $B = 0$. Следовательно, с учетом введенных обозначений, система (5.3), (5.4) свелась к следующим двум ОДУ:

$$\Theta'' + \frac{2}{r}\Theta' + \Theta\omega'^2 - j(r)\frac{\Theta}{\sqrt{\Theta^2-1}} = 0, \tag{5.7}$$

$$\left(2\Theta' + \frac{2}{r}\Theta\right)\omega' + \Theta\omega'' = 0. \tag{5.8}$$

Интегрируя соотношение (5.8) находим, что

$$\omega' = \frac{B_0}{r^2\Theta^2}, \tag{5.9}$$

где $B_0 > 0$ — постоянная интегрирования. Подставляя соотношение (5.9) в выражение (5.7) окончательно получим

$$\Theta'' + \frac{2}{r}\Theta' + \frac{B_0^2}{r^4}\Theta^{-3} - j(r)\frac{\Theta}{\sqrt{\Theta^2-1}} = 0. \tag{5.10}$$

Таким образом, разрешимость системы ОДУ (5.3), (5.4) в виде анзатца (5.5), (5.6) свелась к разрешимости одного нелинейного неавтономного ОДУ второго порядка (5.10) на функцию $\Theta(r)$, поскольку функция $\omega(r)$ находится по формуле (5.9) простым интегрированием.

В общем случае, для произвольной функции $j(r)$, задача интегрирования уравнения (5.10) является крайне сложной. Поэтому в этой статье, исходя из физических соображений, мы ограничимся случаем когда функция $j(r)$ является положительной и убывает на бесконечности (т.е $j(r) > 0$ и $j(r) \to 0$ при $r \to \infty$), а именно $j(r) = j_0^2 r^{-4}$, где $j_0 > 0$ — произвольная постоянная. В этом интересном случае уравнение (5.10) имеет решением постоянную $\Theta(r) \equiv \Theta_0$, $\Theta_0 > 1$, $\Theta_0 = \mathrm{const}$, причем

$$B_0^2 = j_0^2 \frac{\Theta_0^4}{\sqrt{\Theta_0^2 - 1}}.$$

Из (5.9) находим

$$\omega(r) = C - \frac{j_0}{(\Theta^2 - 1)^{1/4}\, r},$$

где C — постоянная интегрирования. Таким образом, из формул (5.5), (5.6) мы получим точное нетривиальное решение системы (5.3), (5.4) вида

$$\psi(r) = \Theta_0 \operatorname{ch}\left(C - \frac{j_0}{(\Theta^2 - 1)^{1/4}\, r}\right),$$

$$a(r) = \Theta_0 \operatorname{sh}\left(C - \frac{j_0}{(\Theta^2 - 1)^{1/4}\, r}\right).$$

Пример 1. Возвращаясь к исходным переменным x, y, z получим, что обобщенная модель вакуумного диода в трехмерном координатном пространстве

$$\Delta\psi = \frac{j_0^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \frac{\psi}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}}, \quad \psi \stackrel{\triangle}{=} \psi(x, y, z),$$

$$\Delta a = \frac{j_0^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \frac{a}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}}, \quad a \stackrel{\triangle}{=} \psi(x, y, z),$$

имеет следующее точное радиально-симметричное решение

$$\psi(r) = \Theta_0 \operatorname{ch}\left(C - \frac{j_0}{(\Theta^2 - 1)^{1/4} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right),$$

$$a(r) = \Theta_0 \operatorname{sh}\left(C - \frac{j_0}{(\Theta^2 - 1)^{1/4} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right),$$

где $j_0 > 0,\ \Theta_0 > 1,\ C$ — произвольные постоянные.

Теперь, предъявим некоторые решения уравнения (5.10) отличные от постоянной. С помощью замены $\Theta = \sqrt{Y^2+1},\ \ Y \overset{\triangle}{=} Y(r)$ уравнение (5.10) несложными преобразованиями приведем к виду свободному от радикалов

$$Y^2(Y^2+1)\left(Y'' + \frac{2}{r}Y'\right) + YY'^2 + \frac{B_0^2}{r^4}Y - j(r)(Y^2+1)^2 = 0. \quad (5.11)$$

Нетрудно проверить, что это уравнение при плотности тока

$$j(r) = \frac{C_0\left(C_0^2+B_0^2\right)}{r\left(C_0^2+r^2\right)^2},$$

убывающей на бесконечности имеет точное решение

$$Y(r) = \frac{C_0}{r}.$$

Здесь $C_0 > 0$ — произвольная постоянная. Возвращаясь к функции Θ получим решение уравнения (5.10) вида

$$\Theta(r) = \frac{\sqrt{C_0^2+r^2}}{r}.$$

С учетом этого соотношения, интегрируя (5.9) находим

$$\omega(r) = \frac{B_0}{C_0}\operatorname{arctg}\left(\frac{r}{C_0}\right) + C_1,$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Пример 2. Снова возвращаясь к исходным переменным x, y, z имеем, что обобщенная модель вакуумного диода в трехмерном координатном пространстве

$$\Delta\psi = \frac{C_0\left(C_0^2+B_0^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(C_0^2+x^2+y^2+z^2\right)^2}\frac{\psi}{\sqrt{\psi^2-a^2-1}},\ \ \psi \overset{\triangle}{=} \psi(x,y,z),$$

$$\Delta a = \frac{C_0\left(C_0^2+B_0^2\right)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\left(C_0^2+x^2+y^2+z^2\right)^2}\frac{a}{\sqrt{\psi^2-a^2-1}},\ \ a \overset{\triangle}{=} \psi(x,y,z),$$

обладает следующим точным радиально-симметричным решением

$$\psi(x,y,z) = \frac{\sqrt{C_0^2+x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\times$$

$$\operatorname{ch}\left(\frac{B_0}{C_0}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{C_0}\right) + C_1\right)$$

$$a(x,y,z) = \frac{\sqrt{C_0^2 + x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \times$$
$$\operatorname{sh}\left(\frac{B_0}{C_0}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{C_0}\right) + C_1\right).$$

Утверждение 1. *Для любой наперед заданной неотрицательной дважды дифференцируемой выпуклой возрастающей функции $Y = f(r)$ можно указать неотрицательную функцию плотности тока $j = j_f(r)$, при которой $Y = f(r)$ будет точным решением уравнения (5.11).*

Это утверждение очевидно и вытекает непосредственно из (5.11). На основе этого утверждения можно построить целое множество радиально-симметричных точных решений системы (5.1), (5.2), некоторые их которых целесообразно использовать для решения краевых задач.

Список литературы

1. Ben Abdallah N. Mathematical models of magnetic insulation / N. Ben Abdallah, P. Degond, F. Méhats // Physics of plasmas. – 1998. – Vol. 5. – P. 1522–1534.
2. Синицын А. В. Положительные решения нелинейной сингулярной краевой задачи магнитной изоляции / А. В. Синицын // Мат. моделирование. – 2001. – Т. 13, № 5. – С. 37–52.
3. Семенов Э. И. Математическая модель магнитной изоляции вакуумного диода и ее точные решения / Э. И. Семенов, А. В. Синицын // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 78–91.
4. Сидоров Н. А. О разветвляющихся решениях нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка / Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 92–103.
5. Косов А. А. О построении первых интегралов для одного класса нелинейных систем / А. А. Косов, А. В. Синицын // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2012. – Т. 5, № 1. – С. 57–69.
6. Уиттекер Э. Т. Аналитическая динамика / Э. Т. Уиттекер. – Ижевск : Удмурт. ун-т, 1999. – 588 с.

A. A. Kosov, E. I. Semenov, A. V. Sinitsyn

Integrable models of magnetic insulation and their exact radially symmetric solutions

Abstract. A singular boundary value problem for the model of vacuum diode is studied. Integrability of the system of nonlinear differential equations is justified and a complete system of the first integrals is constructed. A method of solving singular boundary value problem is developed. The generalized model with Laplace's three - dimensional operator is offered. For the generalized model parametrical families of exact solutions are constructed.

Keywords: first integrals, integrability, singular boundary value problem, equations of elliptic type, exact solutions, vacuum diode.

Косов Александр Аркадьевич, канд. физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952)427100 (kosov_idstu@mail.ru)

Семенов Эдуард Иванович, канд. физико-математических наук, старший научный сотрудник, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова 134, тел.: (3952) 453099 (edwseiz@gmail.com)

Синицын Александр Владимирович, доктор физико-математических наук, Universidad Nacional de Colombia, Bogota, Colombia (avsinitsyn@yahoo.com)

Alexander Kosov, Leading researcher; Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS); Post Box 292, 134, Lermontov Str., Irkutsk, 664033, Russia; Phone: (3952) 427100 (kosov_idstu@mail.ru)

Edward Semenov, Senior researcher; Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS); Post Box 292, 134, Lermontov Str., Irkutsk, 664033, Russia; Phone: (3952) 453099 (edwseiz@gmail.com)

Alexander Sinitsyn, Universidad Nacional de Colombia, Bogota, Colombia (avsinitsyn@yahoo.com)