Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 1. С. 14—19

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 518.517

Исследование интегро-дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной главной частью. *

М. В. Булатов
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

До Тиен Тхань, аспирант
Национальный исследовательский Иркутский государственный технический университет

Аннотация. В статье рассмотрены системы интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра с тождественно вырожденной матрицей перед производной. Для данных систем, с заданными начальными условиями, сформулированы достаточные условия существования единственного непрерывного-дифференцируемого решения.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения; матричные полиномы.

1. Постановка задачи и необходимые определения

Рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений вида

$$A(t)x'(t) + F(t, x(t)) + \int_0^t G(t, s, x(s))ds = f(t), \ t \in [0, 1], \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $A(t) - (n \times n)$-матрица, $F(t, x(t)), G(t, s, x(s)), f(t), x(t)$ -$n-$ мерные вектор-функции.

В данной работе предполагается, что

$$\det A(t) \equiv 0. \tag{3}$$

* Работа поддержана грантами РФФИ № 13-01-93002 Вьет-а, № 11-01-00639-а

Элементы $A(t), F(t, x(t)), G(t, s, x(s)), f(t)$ предполагаются достаточно гладкие.

Если интегральное слагаемое в (1) отсутствует, то мы будем иметь дифференциально-алгебраические уравнения.

Под решением задачи (1), (2) будем понимать любую неприрывно-дифференцируемую вектор-функцию, которая обращает (1) в тождество и удовлетворяет начальному условию (2). Задача (1), (2) с условием (3) может иметь множество решений, а может не иметь решения.

В монографии [4] проведено исследование задачи (1), (2) на предмет существования единственного решения. Эти исследования были проведены используя аппарат матричных пучков. В статье [2] сформулированны достаточные условия существования единственного решения задачи (1), (2) для линейного случая. Данный результат был получен на основе определенных свойств матричных полиномов.

Перед формулировкой достаточных условий о существовании единственного решения задачи (1) и (2) приведем ряд вспомогательных сведений.

Определение 1. [*2, 3*] *Матричный полином* $\lambda^2 A(y) + \lambda B(y) + C(y)$, *где* λ *— скаляр,* $y - - - k$ *мерный вектор* $y \in U = \{y : ||y|| \leq \rho\}$, *имеет простую структуру в области* U, *если выполнены условия:*

1) $rank A(y) = const = l \ \forall y \in U$;

2) $rank[A(y)|B(y)] = l + m = const \ \forall y \in U$;

3) $det(\lambda^2 A(y) + \lambda B(y) + C(y)) = a_0(y)\lambda^{2l+m} + ... + a_{2l+m}(y); a_0(y) \neq 0$ $\forall y \in U$.

Лемма 1. [*2*] *Если матричный полином* $\lambda^2 A(y) + \lambda B(y) + C(y)$ *имеет простую структуру при любом* $y \in U$ *и элементы матриц* $A(y)$, $B(y)$, $C(y)$ *принадлежат классу* C^r_u, *то существует невырожденные для любого* $y \in U$ *матрицы* $P(y)$ *и* $Q(y)$ *с элементами из класса* C^r_u *такие, что:*

$$P(y)(\lambda^2 A(y) + \lambda B(y) + C(y))Q(y) =$$
$$\lambda^2 \begin{pmatrix} E_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} J_1(y) & 0 & J_2(y) \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1(y) & C_2(y) & 0 \\ C_3(y) & C_4(y) & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-m-l} \end{pmatrix},$$

где E_m, E_l, E_{n-m-l} *— единичные матрицы размерности m, l и n-m-l соответственно.* $J_1(y), J_2(y), C_i(y), i = 1, 2, 3, 4$ *— матрицы подходящей размерности.*

Следствие: *Матрица* $P(y)(\lambda^2 A(y) + \lambda B(y) + C(y))$ *имеет блочный вид*

$$P(y)(\lambda^2 A(y) + \lambda B(y) + C(y)) = \lambda^2 \begin{pmatrix} A_1(y) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} B_1(y) \\ B_2(y) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1(y) \\ C_2(y) \\ C_3(y) \end{pmatrix} \quad (4),$$

где $A_1(y), B_1(y), C_1(y) --- (l \times n)-$ *матрицы,* $B_2(y), C_2(y) --- (m \times n)-$ *матрицы,* $C_3(y) --- (n - l - m \times n)-$ *матрица, 0 — нулевые блоки соответсвующих размеров.*

Лемма 2. *Если матрица блочного вида (4) имеет простую структуру, то*

$$det \begin{pmatrix} A_1(y) \\ cB_2(y) \\ dC_3(y) \end{pmatrix} \neq 0 \ \forall y \in U, c \neq 0, d \neq 0.$$

Доказательство леммы 1 и 2 при q=1 (q — размерность вектора y) приведено в [2]. При $q \geq 2$ доказательство проводится аналогично.

Определение 2. [1] *Пучок матриц* $\lambda A(y) + B(y)$ *удовлетворяет критерию "ранг – степень"в области* U *(имеет индекс один, имеет простую структуру), если*

1) $rank A(y) = l = const \ \forall y \in U$;

2) $det(\lambda A(y) + B(y)) = a_0(y)\lambda^l + ... + a_l(y)$, *где* $\lambda-$ *скаляр,* $a_0(y) \neq 0$ $\forall y \in U$.

Определение 3. [*1*] *Матрица, обозначаемся как* $A^-(y)$ *называется полуобратной к матрице A(y),если она удовлетворяет уравнению*

$$A(y)A^-(y)A(y) = A(y).$$

Обозначая $V(y) = E - A(y)A^-(y)$, получим

$$V(y)A(y) \equiv 0. \tag{5}$$

Справедливо утверждение.

Лемма 3. *Если матрицный полином* $\lambda^2 A(y) + \lambda B(y) + C(y)$ *имеет простую структуру, то матричный пучок* $\lambda(A(y)+V(y)B(y))+(B(y)+V(y)C(y))$ *удовлетворяет критерию "ранг-степень".*

Доказательство. Отметим, что умножение слева и справа матричного пучка на невырожденные матрицы не меняет свойств этого пучка.

Матричный пучок $\lambda(A(y)+V(y)B(y))+(B(y)+V(y)C(y))$ перепишем в виде

$$\lambda(A(y) + V(y)B(y)) + (B(y) + V(y)C(y)) =$$

$$P^{-1}(y)\{P(y)(\lambda(A(y) + V(y)B(y)) + (B(y) + V(y)C(y))Q(y)\}Q^{-1}(y),$$

где $P(y)$ и $Q(y)$ матрицы из леммы 1.

Достаточно просто показать, что матрица $P(y)V(y)P^{-1}(y)$ имеет блочный вид

$$P(y)V(y)P^{-1}(y) = \begin{pmatrix} 0 & s_1(y) & s_2(y) \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-m-l} \end{pmatrix}.$$

С учетом этой формулы и блочного представления матриц $P(y)A(y)Q(y)$, $P(y)B(y)Q(y)$ и $P(y)C(y)Q(y)$ (см. лемму 1) пучок матриц

$$P(y)(\lambda(A(y) + V(y)B(y)) + (B(y) + V(y)C(y))Q(y) =$$
$$\lambda\{P(y)A(y)Q(y) + P(y)V(y)P^{-1}(y)(P(y)B(y)Q(y))\}+$$
$$\{P(y)B(y)Q(y) + P(y)V(y)P^{-1}(y)(P(y)C(y)Q(y))\}$$

имеет вид

$$\lambda\{P(y)A(y)Q(y) + P(y)V(y)P^{-1}(y)(P(y)B(y)Q(y))\}+$$
$$\{P(y)B(y)Q(y) + P(y)V(y)P^{-1}(y)(P(y)C(y)Q(y))\} =$$
$$\lambda\{\begin{pmatrix} E_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & s_1(y) & s_2(y) \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-m-l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_1(y) & 0 & J_2(y) \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\} +$$
$$\{\begin{pmatrix} J_1(y) & 0 & J_2(y) \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & s_1(y) & s_2(y) \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-m-l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(y) & C_2(y) & 0 \\ C_3(y) & C_4(y) & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-m-l} \end{pmatrix} =$$
$$\lambda \begin{pmatrix} E_l & s_1(y) & 0 \\ 0 & E_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} J_1(y) + s_1(y)c_3(y) & s_1(y)c_4(y) & J_2(y) \\ c_3(y) & E_m + c_4(y) & 0 \\ 0 & 0 & E_{n-m-l} \end{pmatrix}\}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что данный пучок удовлетворяет критерию «ранг – степнь».

Перед тем, как сформируем на условие существования единственного решения задачи (1), (2), введем обозначения:
$B(t,x) = \frac{\partial F(t,x)}{\partial x}$, $F' = \frac{\partial}{\partial t}F(t,x)$, $C(t,x) = \frac{\partial G(t,t,x)}{\partial x}$, $G' = \frac{\partial}{\partial t}G(t,s,x)$.

В терминах матричных пучков в монографии [4] сформулированы достаточные условия существования единственного решения задачи (1), (2). Приведем этот результат

Теорема 1. [1] *При $x(0) = x_0$, пусть для задачи (1), (2) выполнены условия:*
1) $A(t), B(t,x) \in C^m(T), G(t,s,x) \in C^m(T \times T \times U), m \geq 1$;
2) $rank A(t) = const = r\ \forall t \in [0,\gamma], \gamma > 0$;
3) $rank A(0) = rank(A(0)|f(0) - F(0,x_0)$;
4) $det(\lambda A + B)|_{0,x_0} = a_0(0,x_0)\lambda^k + ...,\ a_0 \neq 0$.
Тогда существует отрезок $[0,\gamma]$ на котором определенно единственное решение задачи (1), (2)

Ниже мы приведем достаточные условия о существования единственного решения задачи (1),(2) в терминах матричных многочленов. Данный результат является более общим, его можно применять и для систем (1) с сингулярным матричным пучком $\lambda A + B)|_{0,x_0}$.

Теорема 2. *Пусть для задачи (1), (2) выполнены условия:*

1) Элементы $A(t), F(t,x), G(t,s,x), f(t)$ непрерывно-дифференцируемые в окрестности точки $(0,x_0)$;

2) $rank(A(0)+V(0)A'(0)+V(0)B(0,x_0)) = rank(A(0)+V(0)A'(0)+V(0)B(0,x_0)|f(0)+V(0)f'(0)-F(0,x_0)-V(0)F'(0,x_0)-V(0)G(0,0,x_0))$;

3) В окрестности точки $(0,x_0)$

$$rankA(t) = l = const, rank(A(t)|B(t,x)) = l+m = const,$$

матричный полином $\lambda^2 A(t)+\lambda B(t,x)+C(t,x)$ имеет простую структуру.

4) Матрица, $P(t,x)$ в лемме 1 не зависит от x, т.е. $P(t,x) = P(t)$. Тогда существует отрезок $[0,\gamma]$ на котором определено единственное решение задачи (1), (2).

Доказательство этого результата основано на леммах 1, 2 и теореме 1. Прокомментируем условия теоремы.

Первое условие — стандартное условие, накладываемое на определенную гладкость входных данных.

Второе условие — это условие согласованности начальных данных (2) и правой части системы (1). Они вытекают из теоремы Кронекра – Капелли. Данные условия являются и необходимыми (теорема Кронекера –Капелли).

Третье условие означает, что в окрестности $(0,x_0)$ отсутствуют сингулярные точки. Если это условие нарушено в отдельных точках, то через них может проходить несколько решений. Если это условие нарушено во всей окрестности, то о существовании единственного решения мы ничего сказать не можем. Данное условие не является необходимым. Для иллюстрации приведем несколько примеров.

Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} a_{11}(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11}(t,u(t)) \\ 0 \end{pmatrix} + \\ + \int_0^t \begin{pmatrix} k_{11}(t,s) & k_{12}(t,s) \\ k_{21}(t,s) & k_{22}(t,s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(s) \\ v(s) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}$$

Если взять $k_{11}(t,s) = k_{22}(t,s) \equiv 1$, $k_{21}(t,s) = k_{12}(t,s) \equiv 0$, $b_1(t,u(t)) \equiv 0, a_{11}(t) = -t^2/2$, то однородная задача с нулевыми начальными данными имеет множество решений вида $u(t) = ctv(t) = 0$, где $c-$ произвольное число. В этом случае в точке $t = 0$ нарушено третье условие теоремы.

Если положить $k_{11}(t,s) = k_{22}(t,s) \equiv 0$, $k_{21}(t,s) = k_{12}(t,s) \equiv 1$, $b_1(t,u(t))$ и $a_{11}(t)$, $f_1(t) \equiv 0$, то такая задача имеет единственное, не зависяшее от начальных данных, решение

$$u(t) = f_2'(t), v(t) = -(a_{11}(t)f_2'(t) + b_1(t, f_2'(t)))'.$$

В этом случае в матричный полином $\lambda^2 A(t)+\lambda B(t,x)+C(t,x)$ не удовлетворяет третьему условию теоремы. В самом деле, степень $\det(\lambda^2 A(t) + \lambda B(t,x) + C(t,x)) = -1$ равна нулю при любых функциях $b_1(t,u(t))$ и $a_{11}(t)$.

Список литературы

1. Бояринцев Ю. Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю. Е. Бояринцев. – Новосибирск : Наука, 1980. – 222 с.
   Институт динамики систем и теории управления СО РАН
2. Булатов М. В. Об одном семействе вырожденных интегро-дифференциальных уравнений / М. В. Булатов, Е. В. Чистякова // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2011. – Т. 51, № 9. – С. 1665–1673.
3. Булатов М. В. Применение матричных полиномов к исследованию линейных дифференциально-алгебраических уравнений высокого порядка / М. В. Булатов, Минг-Гонг Ли // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44, № 10. – С. 1299–1306.
4. Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром / В. Ф. Чистяков. – Новосибирск : Наука. Сиб. изд. фирма РАН, 1996.

M.V. Bulatov, Do Tien Thanh

A class of singular integro-differential equations

Abstract. In this paper the systems of integro-differential equations of Volterra type with identical singular matrix at the derivative are considered. For these systems, with the given initial conditions, conditions of existence of a unique continuously differentiable solution are given.

Keywords: integro-differential equations; matrix polynomials.

Булатов Михаил Валерьянович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник ИДСТУ СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134 (mvbul@icc.ru)

До Тиен Тхань, аспирант, Национальный исследовательский Иркутский государственный технический университет, 664074, Иркутск, ул. Лермонтова, д. 83 (thanhdotien278@yahoo.com)

Bulatov Mikhail, Chif reseacher, ISDCT SB RAS Irkutsk, Lermontov st. 134 (mvbul@icc.ru)

Do Tien Thanh, Ph.D. student, National Research Irkutsk State Texnical University, Lermontov st. 83 (thanhdotien278@yahoo.com)