Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 4. С. 21—26

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.71

О числе унарнопорожденных мультиопераций со стандартно определенным оператором суперпозиции *

О. В. Зубков
Восточно-Сибирская государственная академия образования

Аннотация. В работе исследуется класс унарнопорожденных мультиопераций, доказывается, что он совпадает с классом унарных на подкубе мультиопераций и, как следствие, находится число элементов этого класса, зависящих от n аргументов.

Ключевые слова: мультифункции; ультрафункции; суперпозиция; унарнопорожденные мультиоперации.

Мультиоперацией называется отображение $E^n \to 2^E$, где $E = \{1, 2\}$. Согласно [1] введем следующее обозначение элементов 2^E:

$$\varnothing \to 0; \{1\} \to 1; \{2\} \to 2; \{1, 2\} \to 3.$$

Суперпозицию мультиопераций определим стандартным образом:

$$f(g_1, \ldots, g_k)(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \begin{cases} 0, \text{ если существует } i, \text{такое что} \\ \quad g_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0; \\ \bigcup\limits_{\tau_i \in g_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} f(\tau_1, \ldots, \tau_k), \text{ иначе.} \end{cases}$$

Рассмотрим множество унарных и константных мультиопераций, linebreak возможно содержащих фиктивные аргументы. В отличие от булевых функций оно не является замкнутым по операции суперпозиции и порождает новые мультиоперации, не являющиеся унарными.

Пример 1. $f = (2121), g_1 = (1010), g_2 = (3322)$.

x_1	x_2	f	g_1	g_2	$f(g_1, g_2)$
1	1	2	1	3	$f(1,1) \cup f(1,2) = 3$
1	2	1	0	3	$f(0,3) = 0$
2	1	2	1	2	$f(1,2) = 1$
2	2	1	0	2	$f(0,2) = 0$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №12-01-00351а.

$h = f(g_1, g_2) = (3010)$ не является унарной.

Определение 1. *Множество унарнопорожденных мультиопераций является замыканием относительно указанной суперпозиции множества унарных и константных мультиопераций, возможно содержащих фиктивные аргументы.*

Основная задача, решаемая в данной работе – описание и подсчет числа унарнопорожденных мультиопераций от заданного числа аргументов. Для этого введем в рассмотрение еще одно множество мультиопераций.

Определение 2. *Будем говорить, что мультиоперация f является унарной на подкубе, если найдется множество аргументов $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ (возможно пустое) и ровно один набор $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ ($\alpha_{i_j} \in \{1, 2\}$), такие, что остаточная $f^{\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k}}_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$ является унарной не содержащей 0, или константной. Все остальные остаточные f по аргументам $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ должны быть тождественно нулевыми. При этом, если $f^{\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k}}_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$ унарная, то существует аргумент x_r, не содержащийся среди $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$, такой что $f^{\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} 1}_{x_{i_1} \dots x_{i_k} x_r} \neq f^{\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} 2}_{x_{i_1} \dots x_{i_k} x_r}$ Обе эти остаточные являются константными. Данный аргумент, если он существует, будем называть разделяющим у мультиоперации f. Если $f^{\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k}}_{x_{i_1} \dots x_{i_k}}$ — константная, то f будем так же называть контантной на данном подкубе.*

Пример 2.

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0011\ 0022\ 0000\ 0000)$— унарная на подкубе, так как:

$f^{1\,2}_{x_1 x_3} = (1122)$— унарная,
$f^{1\,1}_{x_1 x_3} = f^{2\,1}_{x_1 x_3} = f^{2\,2}_{x_1 x_3} = (0000)$— тождественно нулевые, и
$f^{1\,2\,1}_{x_1 x_3 x_2} = (11) \neq f^{1\,2\,2}_{x_1 x_3 x_2} = (22)$, x_2— разделяющий.

Лемма 1. *Множество унарных на подкубе мультиопераций замкнуто относительно рассматриваемой суперпозиции.*

Доказательство. Пусть $f(x_1 \dots, x_n)$ и $g_1, \dots, g_n$ – унарные на подкубе мультиоперации. Покажем, что значение формулы $\Phi = f(g_1, \dots, g_n)$ является унарной на некотором подкубе мультиоперацией. Пусть $i_1, \dots, i_k$ – номера аргументов внешней мультиоперации f и $\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k}$ – значения этих аргументов, при которых соответствующая остаточная f является унарной ненулевой.

Суть дальнейшего доказательства заключается в изменении формулы Φ таким образом, что ее значение не изменится, а все (кроме возможно одной) внутренние мультиоперации g_i будут заменены на константные на некоторых подкубах, не содержащие 3.

Множество всех внутренних мультиопераций g_i разделим на три непересекающихся подмножества, некоторые могут быть пустыми.

Первое подмножество составят те g_i, что находятся на фиктивных аргументах мультиоперации f. В связи с этим, значение формулы Φ не изменится, если во всех этих g_i заменить все ненулевые значения на одно и то же значение, допустим на 1.

Второе подмножество составят те g_i, что находятся на аргументах $i_1, \ldots, i_k$ мультиоперации f. Пусть на i_m-м аргументе находится мультиоперации g_{i_m} и α_{i_m} — значение i_m-го компонента в наборе $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$.

Если среди значений мультиоперации g_{i_m} есть α_{i_m}, то их не меняем.

Если среди значений мультиоперации g_{i_m} есть $3 \backslash \alpha_{i_m}$, их заменим на 0. Так как при подстановке на аргумент x_{i_m} мультиоперации f значения $3 \backslash \alpha_{i_m}$ значение формулы Φ будет равно 0, то от замены $3 \backslash \alpha_{i_m}$ на 0 в мультиоперации g_{i_m} значение Φ на соответствующих наборах не изменится.

Если среди значений мультиоперации g_{i_m} есть 3, заменим их на α_{i_m}. Это согласуется с тем, что для вычисления значения $f(\ldots, 3, \ldots)$ нужно найти $f(\ldots, \alpha_{i_m}, \ldots) \cup f(\ldots, 3 \backslash \alpha_{i_m}, \ldots)$ и учесть, что последнее из этих значений равно 0.

В итоге все (кроме возможно одной) мультиоперации g_i ,будут заменены на константные на подкубе, содержащие только 1 или 2. При этом значение формулы Φ не изменится.

Пример 3. Пусть $g_{i_m} = (0033\ 0022\ 0000\ 0000)$. Если $\alpha_{i_m} = 1$, то g_{i_m} можно заменить на $(0011\ 0000\ 0000\ 0000)$, если $\alpha_{i_m} = 2$, то g_{i_m} можно заменить на $(0022\ 0022\ 0000\ 0000)$. При этом значение формулы Φ не изменится.

Третье подмножество состоит из одной мультиоперации g_r, находящаяся на разделяющем аргументе мультиоперации f, если такой есть.

Рассмотрим все варианты относительно вида g_r.

1. У мультиоперации f нет разделяющего аргумента и третье подмножество пусто, а f — константная на своем подкубе. Пусть g'_i — константная на подкубе мультиоперация, на которую заменили мультиоперацию g_i на предыдущем шаге. Рассмотрим подкуб B, равный пересечению всех подкубов B_i, на каждом из которых соответствующая мультиоперация g'_i константная. Очевидно, что в этом случае результат формулы Φ будет константной на B мультиоперацией, либо тождественным 0, если B пусто.

2. На разделяющем аргументе x_r находится константная на подкубе B_r мультиоперация g_r. Если g_r помимо 0 содержит значение, не равное 3, то этот случай сводится к случаю 1. Если g_r — константная на подкубе B_r и равная на нем 3, то на подкубе, являющемся пересечением всех B_i

и B_r, значение формулы Φ будет константным на этом подкубе, равным $f^{\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_k}1}_{x_{i_1}\ldots x_{i_k}x_r} \cup f^{\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_k}2}_{x_{i_1}\ldots x_{i_k}x_r}$.

3. На разделяющем аргументе x_r находится унарная неконстантная на подкубе B''' мультиоперация g_r. Рассмотрим подкуб B, являющийся пересечением всех подкубов B_i, где $i \in \{1\ldots n\}\backslash\{r\}$. Если мультиоперация g_r принимает на B одно свое ненулевое значение, то этот случай сводится к случаю 2. Осталось рассмотреть вариант, когда мультиоперация g_r на наборах из B принимает оба своих ненулевых значения. Пусть первое свое ненулевое значение σ_1 она принимает на подкубе B', второе ненулевое значение σ_2 она принимает на подкубе B'' и $B' \cup B'' = B'''$. Тогда $B \cap B''' = (B \cap B') \cup (B \cap B'')$, то есть подкуб $B \cap B'$ является смежным для подкуба $B \cap B''$. На первом из них формула Φ всегда принимает одно и тоже значение $f^{\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_k}\sigma_1}_{x_{i_1}\ldots x_{i_k}x_r}$, на втором формула Φ принимает значение $f^{\alpha_{i_1}\ldots\alpha_{i_k}\sigma_2}_{x_{i_1}\ldots x_{i_k}x_r}$, возможно совпадающее с первым. Так как $(B \cap B') \cup (B \cap B'')$ составляют подкуб $(B \cap B''')$, то формула Φ будет унарной на этом подкубе. □

Пример 4. $x_{i_1} = x_1,\ x_{i_2} = x_3,\ \alpha_{i_1} = 1,\ \alpha_{i_2} = 2,\ x_r = x_2$
$B = \{(1111), (1112)\},\ B' = \{(1111), (1121), (1211), (1221)\}$,
$B'' = \{(1112), (1122), (1212), (1222)\}$

x_1	x_2	x_3	x_4	f	g_1	g_2	g_3	g_4	g'_1	g'_2	g'_3	g'_4	Φ
1	1	1	1	0	1	1	3	3	1	1	2	1	1
1	1	1	2	0	1	3	3	3	1	3	2	1	3
1	1	2	1	1	2	1	3	0	0	1	2	0	0
1	1	2	2	1	2	3	3	0	0	3	2	0	0
1	2	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0
1	2	1	2	0	1	3	0	0	1	3	0	0	0
1	2	2	1	2	2	1	0	0	0	1	0	0	0
1	2	2	2	2	2	3	0	0	0	3	0	0	0
2	1	1	1	0	0	0	2	2	0	0	2	1	0
2	1	1	2	0	0	0	2	2	0	0	2	1	0
2	1	2	1	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0
2	1	2	2	0	0	0	2	0	0	0	2	0	0
2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Теорема 1. *Мультиоперация является унарнопорожденной тогда и только тогда, когда она унарная на некотором подкубе.*

Доказательство.

Необходимость. Любая константная или унарная мультиоперация является унарной на подкубе по определению. Согласно лемме, любая их суперпозиция так же является унарной на подкубе. При построении замыкания множества константных и унарных мультиопераций каждая последующая мультиоперация из замыкания строится на основе уже построенных унарнопорожденных, для которых утверждение теоремы выполняется. Их суперпозиция по лемме будет унарной на подкубе.

Достаточность. Пусть $h(x_1, \ldots, x_n)$ – унарная на подкубе мультиоперация, причем $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ – множество ее аргументов и $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ – значения этих аргументов, при которых соответственная остаточная h является унарной не содержащей 0, или константной. Построим любую унарную (или константную) мультиоперацию $f(x_1, \ldots, x_n)$, которая на соответствующем подкубе совпадает с h. Помимо этого рассмотрим две унарные мультиоперации $f_1 = (10)$ и $f_2 = (02)$, которые сохраняют одно из значений и обнуляют другое. Мультиоперация h будет значением формулы

$$f(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, f_{\alpha_{i_1}}(x_{i_1}), x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_k-1}, f_{\alpha_{i_k}}(x_{i_k}), x_{i_k+1}, \ldots, x_n)),$$

в которой на x_{i_j}-м аргументе подставлена мультиоперация $f_{\alpha_{i_j}}(x_{i_j})$. Отсюда получим, что мультиоперация h является унарнопорожденной. $\square$

Теорема 2. *Число унарнопорожденных мультиопераций от n аргументов равно $(2n+3) \cdot 3^n + 1$.*

Доказательство. Согласно теореме 1, унарнопорожденные мультиоперации являются унарными на подкубе. Подсчитаем число унарных на подкубе мультиопераций от n аргументов.

Выбирая i аргументов из n $\binom{n}{i}$ способами и устанавливая им одно из двух значений 2^i способами, получим $\binom{n}{i} \cdot 2^i$ вариантов выбора подкуба размерности $n-i$.

Если на наборах этого подкуба установить постоянное значение одним из трех способов (1, 2 или 3), а на всех остальных наборах установить значение 0, то, суммируя по i от 0 до n, получим $3\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i} \cdot 2^i$ – количество константных на подкубе ненулевых мультиперaций. Добавим к этому множеству еще одну неучтенную константную мультиоперацию, везде тождественно равную 0. Используя формулу бинома Ньютона всего получим $1 + 3 \cdot 3^n$ константных на подкубе мультиопераций.

Если на наборах подкуба размерности $n-i$ положить значением мультиоперации существенно унарную ненулевую (шесть вариантов выбора среди (12), (13), (21), (23), (31), (32)), а на остальных наборах установить значение 0, то получим $6\sum\limits_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}\cdot 2^i\cdot(n-i)$ существенно унарных на подкубе мультиопераций. Преобразуя эту формулу с использованием техники производящих функций получим:

$$6\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}\cdot 2^i\cdot(n-i)=6\left(\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}2^i\cdot n-\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n}{i}2^i\cdot i\right)=$$

$$=6\left((3^n-2^n)\cdot n-\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i\cdot i+2^n\cdot n\right)=$$

$$=6n\left(3^n-2^n-2\cdot 3^{n-1}+2^n\right)=2n\cdot 3^n.$$

Суммируя число константных на подкубе и существенно унарных на подкубе мультиопераций, в итоге получим $(2n+3)\cdot 3^n+1$ унарнопорожденных мультиопераций от n аргументов.

□

Список литературы

1. Перязев Н. А. Суперклоны мультиопераций / Н. А. Перязев // Тр. VIII Междунар. конф. "Дискретные системы в теории управляющих систем". – М. : МАИС Пресс, 2009. – С. 233–238.

O. V. Zubkov

The number unary generated multi-operations with standard definitions superposition operator

Abstract. In this paper the class unary generated multi-operations prove that it coincides with the class of unary on subcube multi-operations and, as a consequence, is the number of elements in this class, independent of n arguments.

Keywords: multifunction; ultrafunction; superposition; unary generated multi-operation

Зубков Олег Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент, факультет компьютерных наук, Восточно-Сибирская государственная академия образования, 664011, Иркутск, Н. Набережная, 6

тел.: (3952)200567 (`oleg.zubkov@mail.ru`)

Zubkov Oleg, East-Siberian State Academy of Education, 6, Nijnyaya Naberejnaya St., Irkutsk, 664011

Phone: (3952)200567 (`oleg.zubkov@mail.ru`)