Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 4. С. 16—20

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 512.64 + 512.55

Новые полиномиальные тождества для детерминантов над коммутативными кольцами *

Г. П. Егорычев
Сибирский федеральный университет

Аннотация. Пусть K есть коммутативное кольцо с делением на целые числа. В этой работе с помощью известной теоремы поляризации найдено новое семейство полиномиальных тождеств (вычислительных формул) для детерминанта над кольцом K. Это позволило, в частности, дать новый критерий линейной независимости n векторов в $\mathbb{C}^n$.

Ключевые слова: детерминанты; коммутативные кольца; полиномиальные тождества.

Пусть $A = (a_{ij})$ – $n \times n$ матрица с элементами из кольца K, S_n – множество всех перестановок $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$ множества $\{1, \ldots, n\}$, $\tau(\sigma)$ – число инверсий в σ, а $S_n^{(e)}$ и $S_n^{(o)}$, соответственно, подмножества чётных и нечётных перестановок из S_n. Последовательность элементов $a_{1\sigma(1)}, \ldots, a_{n\sigma(n)}$ назовём диагональю $l(\sigma)$ матрицы A, а последовательность элементов $a_{i_1\sigma(i_1)}, \ldots, a_{i_k\sigma(i_k)}$, $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$, – поддиагональю l длины k матрицы A. Через $L_k^{(e)}\left(L_k^{(o)}\right)$ мы обозначим, множество всех поддиагоналей длины k для множества, чётных (нечётных) диагоналей $S_n^{(e)}\left(S_n^{(o)}\right)$, $k = 1, \ldots, n$. Функция $su(l)$ для поддиагонали (диагонали) $l = diag(a_{i_1\sigma(i_1)}, \ldots, a_{i_k\sigma(i_k)})$ есть сумма её элементов, то есть $su(l) := \sum_{s=1}^{k} a_{i_s\sigma(s)}$.

Определение 1. *(детерминанта над коммутативным кольцом [8])*

$$det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\tau(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}. \tag{0.1}$$

В следующей теореме с помощью хорошо известной теоремы поляризации получено новое семейство полиномиальных тождеств для детерминанта (0.1), содержащих до $n!$ свободных переменных.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 09–01–00717.

Теорема 1. *Если $A = (a_{ij})$ − $n \times n$ матрица с элементами из кольца K, то справедливы следующие формулы:*

$$\det(A) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\tau(\sigma)} \{(-1)^n \gamma_\sigma^n + \sum_{k=1}^{n} ((-1)^{n-k} \sum_{1 \le j_1 < \ldots, j_k \le n} (\gamma_\sigma + \sum_{s=1}^{k} a_{j_s \sigma(j_s)})^n)\}, \tag{0.2}$$

где $\{\gamma_\sigma\}_{\sigma \in S_n}$ – множество из $n!$ свободных переменных $\gamma_\sigma \in K$.

Если в (0.2) положить $\gamma_\sigma = \gamma$, либо $\gamma_\sigma = 0$, при всех $\sigma \in S_n$, то справедливы следующие формулы, соответственно:

$$det(A) = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \{ \sum_{l \in L_{n-1}^{(e)}} (\gamma + su(l))^n - \sum_{l \in L_{n-1}^{(o)}} (\gamma + su(l))^n + \sum_{l \in L_n^{(o)}} (\gamma + su(l))^n - \sum_{l \in L_n^{(e)}} (\gamma + su(l))^n \}, \tag{0.3}$$

$$det(A) = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \{ \sum_{l \in L_{n-1}^{(e)}} su^n(l) - \sum_{l \in L_{n-1}^{(o)}} su^n(l) + \sum_{l \in L_n^{(o)}} su^n(l) - \sum_{l \in L_n^{(e)}} su^n(l) \}. \tag{0.4}$$

В частности, при $n = 2$ и $n = 3$ согласно (0.3) – (0.4) справедливы, соответственно, следующие формулы:

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \{ (\gamma + a_{11} + a_{22})^2 - (\gamma + a_{11})^2 - (\gamma + a_{22})^2 - (\gamma + a_{12} + a_{21})^2 + (\gamma + a_{12})^2 + (\gamma + a_{21})^2 \},$$

где γ – свободная переменная из K;

$$\begin{aligned} det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \frac{1}{3!} \{ [& (a_{11} + a_{22})^3 + (a_{11} + a_{33})^3 + (a_{22} + a_{33})^3 + \\ & + (a_{12} + a_{23})^3 + (a_{12} + a_{31})^3 + (a_{23} + a_{31})^3 + (a_{13} + a_{21})^3 + (a_{13} + a_{32})^3 + \\ & + (a_{21} + a_{32})^3 - (a_{13} + a_{22})^3 - (a_{13} + a_{31})^3 - (a_{22} + a_{31})^3 - (a_{12} + a_{21})^3 - \\ & - (a_{12} + a_{33})^3 - (a_{21} + a_{33})^3 - (a_{11} + a_{23})^3 - (a_{11} + a_{32})^3 - (a_{23} + a_{32})^3] + \\ & + [(a_{11} + a_{22} + a_{33})^3 + (a_{12} + a_{23} + a_{31})^3 + (a_{13} + a_{21} + a_{32})^3 - \\ & - (a_{13} + a_{22} + a_{31})^3 - (a_{12} + a_{21} + a_{33})^3 - (a_{11} + a_{23} + a_{32})^3] \}. \end{aligned}$$

Доказательство. В силу известной теоремы поляризации о восстановлении полиаддитивной симметрической функции по её значениям на диагонали (см., например, [3, 4]) для каждого диагонального произведения $a_{1\sigma(1)}\ldots a_{n\sigma(n)}$, $\sigma\in S_n$, мы имеем

$$a_{1\sigma(1)}\ldots a_{n\sigma(n)}=\frac{1}{n!}\{(-1)^n\,\gamma_\sigma^n+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\sum_{1\le j_1<\ldots,j_k\le n}(\gamma_\sigma+\sum_{s=1}^{k}a_{_{j_s}\sigma(_{j_s})})^n)\},\tag{0.5}$$

где γ_σ – свободная переменная из K. Заменяя под знаком суммы в (0.1) каждое произведение $a_{1\sigma(1)}\ldots a_{n\sigma(n)}$ по формуле (0.5) получаем (0.2).

Если положить в (0.1) и (0.2) $\gamma_\sigma=\gamma$ для каждой перестановки $\sigma\in S_n$, то мы получаем

$$\begin{aligned}
&\det(A)=\\
&=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\tau(\sigma)}\{(-1)^n\,\gamma^n+\sum_{k=1}^{n}((-1)^{n-k}\sum_{1\le j_1<\ldots,j_k\le n}(\gamma+\sum_{s=1}^{k}a_{_{j_s}\sigma(_{j_s})})^n)\}=\\
&=\frac{1}{n!}(-1)^n\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\tau(\sigma)}\gamma^n+\\
&+\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\{\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{\tau(\sigma)}\sum_{1\le j_1<\ldots,j_k\le n}(\gamma+\sum_{s=1}^{k}a_{_{j_s}\sigma(_{j_s})})^n\}=\\
&=\frac{1}{n!}(-1)^n\{\sum_{\sigma\in S_n^{(e)}}\gamma^n-\sum_{\sigma\in S_n^{(o)}}\gamma^n\}+\\
&+\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\{\sum_{\sigma\in S_n^{(e)}}\sum_{1\le j_1<\ldots,j_k\le n}(\gamma+\sum_{s=1}^{k}a_{_{j_s}\sigma(_{j_s})})^n-\\
&-\sum_{\sigma\in S_n^{(e)}}\sum_{1\le j_1<\ldots,j_k\le n}(\gamma+\sum_{s=1}^{k}a_{_{j_s}\sigma(_{j_s})})^n\}.
\end{aligned}\tag{0.6}$$

Нетрудно видеть, что первое слагаемое в правой части (0.6) равно нулю, поскольку при любом $n\ge 2$, очевидно, $\left|S_n^{(e)}\right|=\left|S_n^{(o)}\right|$. Аналогично, если зафиксировать любое k, $k=1,\ldots,n-2$, и произвольный набор элементов $a_{_{j_1}\sigma\left(_{j_1}\right)}$, $a_{_{j_2}\sigma\left(_{j_2}\right)},\ldots,$ $a_{_{j_k}\sigma\left(_{j_k}\right)}$ матрицы A, то, очевидно, этот набор элементов содержит ровно $(n-k)!/2$ чётных и $(n-k)!/2$ нечётных перестановок из множества S_n. Таким образом, при указанных предположениях произвольный член суммы вида $(\gamma+\sum_{s=1}^{k}a_{_{j_s}\sigma(_{j_s})})^n$ в правой части (0.6) входит одинаковое число раз с различными знаками, и тем самым равен нулю, а оставшиеся члены при $k=n-1$ и $k=n$ совпадают с выражением в правой части равенства (0.3) для $\det(A)$. $\square$

Следствие 1. *Если* $A = (a_{ij})$ *–* $n \times n$ *матрица над* $\mathbb{C}$*, то для* $t = 1, 2, \ldots, n-1$ *справедливы следующие тождества:*

$$\sum_{l \in L_{n-1}^{(e)}} su^t(l) - \sum_{l \in L_{n-1}^{(o)}} su^t(l) + \sum_{l \in L_n^{(o)}} su^t(l) - \sum_{l \in L_n^{(e)}} su^t(l) = 0. \qquad (0.7)$$

Доказательство. С одной стороны, коэффициенты полинома при каждой степени γ^k, $k = 1, \ldots, n$, в правой части (0.3) равны нулю, как коэффициенты полиномиального тождества (0.3) относительно свободной переменной γ. Теперь для установления справедливости (0.7) достаточно подсчитать те же коэффициенты путём дифференцирования по γ. □

Следствие 2 (новый критерий линейной независимости векторов-строк (столбцов) матрицы A). *Если* $A = (a_{ij})$ *–* $n \times n$ *матрица с элементами из кольца* K*, то* $det\,(A) = 0$ *тогда и только тогда, когда выполняется равенство*

$$\sum_{l \in L_n^{(e)}} su^n(l) - \sum_{l \in L_n^{(o)}} su^n(l) = \sum_{l \in L_{n-1}^{(e)}} su^n(l) - \sum_{l \in L_{n-1}^{(o)}} su^n(l)\,.$$

Замечание 1. a) Формулы (0.2) – (0.4) были получены с использованием всех характеристических свойств детерминанта [8].

b) Формула (0.2) для $n!$ свободных переменных $\{\gamma_\sigma\}_{\sigma \in S_n}$ порождает $2^{n!}$ различных полиномиальных тождеств для $det\,(A)$, полагая каждое $\gamma_\sigma = 0$, либо $\gamma_\sigma \neq 0$. Любая из этих формул может быть взята за определение функции $det\,(A)$, требует при вычислении $det\,(A)$ различное число арифметических операций, и подобно следствию 1 порождает новое множество тождеств для элементов матрицы A.

c) В формуле (0.2) и её специальных случаях используются, исключая деление на $n!$, только операции сложения, вычитания и возведения в степень n, и не используется свойство коммутативности по умножению для элементов кольца K. Это обстоятельство позволило автору в [5, 6] с помощью формул типа (0.2) – (0.4) дать определение детерминанта над некоммутативными и неассоциативными кольцами, отличное от известных ранее определений для некоммутативных детерминантов (см., например, [2, 7, 1]), и изучить их свойства.

Аналогичные результаты для перманентов и некоторые их приложения были ранее получены мною в [4]. Представляет интерес получение аналогичных результатов для функций Шура, смешанных дискриминантов и других функций от плоской и пространственных матриц, родственных детерминанту.

Автор признателем своим коллегам М. Н. Давлетшину, В. М. Копытову, Я. Н. Нужину, А. В. Тимофеенко, И. П. Шестакову, Е. В. Зима за полезное обсуждение результатов этой заметки.

Список литературы

1. Arvind V. On the hardness of noncommutative determinant / V. Arvind, S. Srinivasan / / Electronic Colloquium on Computational Complexity. Report N 103. – 2009. – P. 1–18.
2. Barvinok A. New permanent estimators via non-commutative determinants / A. Barvinok / / Arxiv preprint math/0007153. – 2000. – arXiv:math/0007153. – P. 1–13.
3. Cartan H. Elementary theory of analytic functions of one or several complex variables / H. Cartan // Dover Publ. – N. Y., 1995.
4. Егорычев Г. П. Дискретная математика. Перманенты / Г. П. Егорычев ; Сиб. федер. ун-т. – Красноярск, 2007 (transl. in English: Springer, 2012).
5. Egorychev G. P. Explicit formula for determinants its corollaries / G. P. Egorychev // Тез. Междунар. конф. по алгебре и геометрии, посвящ. 90-летию со дня рождения А. И. Ширшова / ИММ СО РАН. – Новосибирск, 2011. – С. 28–29.
6. Egorychev G. P. The new polynomial identities for determinants and their corollaries / G. P. Egorychev // Алгебра и геометрия : тр. VII Междунар. конф. по алгебре и геометрии, посвящ. 80-летию со дня рожд. А. И. Старостина / ИММ УРО РАН. – Екатеринбург, 2011. – С. 173–175.
7. Гельфанд И. М. Детерминанты матриц над некоммутативными кольцами / И. М. Гельфанд, В. С. Ретах // Функциональный анализ и его приложения. – 1991. – Т. 25, № 2. – С. 13–25.
8. Muir T. A. Treatise on the theory of determinants / T. A. Muir. – N. Y. Dover, 1960.

G.P. Egorychev

New polynomial identities for determinants over commutative rings

Abstract. Let K be a commutative ring with division by integers. Here we give a new family of polynomial identities (calculation formulas) for determinants over the ring K using the well- known polarization theorem, which allows us a new criterian for linear independence of n vectors in $\mathbb{C}^n$.

Keywords: determinants; commutative rings; polynomial identities.

Егорычев Георгий Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт фундаментальной подготовки, Сибирский федеральный университет, 664074, Красноярск, ул. Киренского, 26, каф. «МОДУС», тел.: (391)2461609 (anott@scn.ru, gegorych@mail.ru)

Egorychev Georgy, Siberian Federal University, 26, Kirenskogo St., Krasnoyarsk, 660074, professor, Phone: (391)2461609
(anott@scn.ru, gegorych@mail.ru)