Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 4. С. 95—115

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.977.1

О построении решений задачи о сближении в фиксированный момент времени *

В. Н. Ушаков, А. Р. Матвийчук, А. В. Ушаков
Институт математики и механики УрО РАН

А. Л. Казаков
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. Изучается задача о сближении с компактным целевым множеством в фиксированный момент времени. Исследуется вопрос о построении решений этой задачи.

Ключевые слова: управляемая система; игровая задача о сближении; множество Достижимости; интегральная воронка.

Введение

В работе изучается задача о сближении управляемой системы с компактным целевым множеством в фазовом пространстве в конечный момент из промежутка времени, на котором рассматривается система [5, 6, 7, 11]. К этой ключевой в теории управления задаче сводятся многие другие задачи управления; с ней также связаны другие важные задачи, например, задача об оптимальном быстродействии. Важностью рассматриваемой нами задачи объясняется стремление разработать эффективные методы и алгоритмы ее решения. При этом в случае задачи в общей постановке реальна лишь разработка алгоритмов приближенного вычисления решений; о нахождении точного решения речи не идет из-за сложности задачи. Одним из основных элементов разрешающей конструкции задачи о сближении является множество разрешимости W — множество всех тех исходных позиций управляемой системы, из

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, гранты 1–01–12088 офи_м_2011, 10–01–96006–р_урал_а, 12–07–33045 мол_а_вед и проекта 12-С-1-1017/3

которых возможно сближение с целевым множеством. Выделить точно множество W в пространстве позиций удается лишь в относительно простых случаях, поэтому, как правило, приходится прибегать к приближенным вычислениям множества W. Поскольку W можно проинтерпретировать как интегральную воронку управляемой системы, записанной в обратном времени, то построение множества W можно и даже желательно свести к построению соответствующей интегральной воронки Z. Некоторые методы и схемы приближенного построения и оценки интегральных воронок и их сечений-множеств достижимости изложены в работах [2, 3, 8, 12, 13, 14, 15, 18, 19]. В настоящей работе для того, чтобы не усложнять выкладки, предполагаем, что множество W уже вычислено. Для начальных позиций управляемой системы, содержащихся в W, предлагается метод приближенного построения управления, обеспечивающего решение задачи о сближении с определенной степенью точности. При этом, в основе метода лежит технология копирования локальных управлений, возникающих в некой вспомогательной системе — поводыре, эволюционирующем вблизи множества W. Работа является непосредственным продолжением и дополнением исследований [3, 12, 13]; она также близка по тематике к работам [9, 10]. В работе также используются примеры из [1, 16, 17].

1. Управляемые системы и дифференциальные включения, инвариантные и слабо инвариантные множества

Пусть на промежутке $[t_0, \vartheta]$, $t_0 < \vartheta < \infty$ задана управляемая система

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

Здесь u — вектор управляющих воздействий, удовлетворяющий включению

$$u \in P, \tag{1.2}$$

где P — компакт в евклидовом пространстве R^p.

Предполагается, что правая часть системы (1.1) удовлетворяет условиям

Условие A. *Вектор-функция $f(t, x, u)$ определена и непрерывна на $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ и для любой ограниченной и замкнутой области $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ существует такая постоянная $L = L(D) \in [0, \infty)$, что*

$$\|f(t, x^{(1)}, u) - f(t, x^{(2)}, u)\| \leqslant L\|x^{(1)} - x^{(2)}\|, \quad (t, x^{(i)}, u) \in D \times P, \quad i = 1, 2. \tag{1.3}$$

Условие B. *Существует такая постоянная $\gamma \in (0, \infty)$, что*

$$\|f(t,x,u)\| \leqslant \gamma(1 + \|x\|), \quad (t,x,u) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P. \tag{1.4}$$

Здесь $\|f\|$ — норма вектора f в евклидовом пространстве.

Полагаем $\mathcal{F}(t,x) = \{f(t,x,u); u \in P\}$, $F(t,x) = \mathrm{co}\mathcal{F}(t,x)$, $(t,x) \in [t_0,\vartheta] \times \mathbb{R}^n$; здесь $\mathrm{co}\{f\}$ — выпуклая оболочка множества $\{f\}$ векторов f.

Наряду с системой (1.1) будем рассматривать дифференциальное включение (д.в.) на $[t_0, \vartheta]$

$$\frac{dx}{dt} \in F(t,x). \tag{1.5}$$

Напомним некоторые известные определения.

Решением уравнения (1.1) на $[t_0,\vartheta]$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ называется такая абсолютно непрерывная на $[t_0,\vartheta]$ вектор-функция $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, что

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t), u(t))$$

почти всюду (п.в.) на $[t_0,\vartheta]$; здесь $u(t)$ — некоторое допустимое управление, то есть такая измеримая по Лебегу вектор-функция на $[t_0,\vartheta]$, что $u(t) \in P$ на $[t_0,\vartheta]$.

Решением д.в. (1.5) на $[t_0,\vartheta]$ с начальным условием $x(t_0) = x_0$ называется такая абсолютно непрерывная на $[t_0,\vartheta]$ вектор-функция $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, что

$$\frac{dx(t)}{dt} \in F(t, x(t))$$

п.в. на $[t_0,\vartheta]$.

Пусть $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$ и $x_* \in \mathbb{R}^n$.

Определение 1. *Назовем множеством достижимости $X(t^*, t_*, x_*)$ управляемой системы (1.1), отвечающим моменту t^*, множество всех таких $x^* \in \mathbb{R}^n$, что $x^* = x(t^*)$ для некоторого решения $x(t)$, $x(t_*) = x_*$ уравнения (1.1).*

Полагая $X_* \subset \mathbb{R}^n$, введем обозначение $X(t^*, t_*, X_*) = \bigcup\limits_{x_* \in X_*} X(t^*, t_*, x_*)$ — множество достижимости управляемой системы (1.1), отвечающее моменту t^* и начальному множеству X_*

Определение 2. *Назовем интегральной воронкой управляемой системы (1.1) на $[t_*, \vartheta]$ с начальным условием $x(t_*) = x_*$ множество $X(t_*, x_*) = \bigcup\limits_{t^* \in [t_*, \vartheta]} \big(t^*, X(t^*, t_*, x_*)\big)$ в $[t_*, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$; здесь $(t^*, X^*) = \big\{(t^*, x^*) : x^* \in X^*\big\}$.*

Введем также обозначение $X(t_*, X_*) = \bigcup\limits_{x_* \in X_*} X(t_*, x_*)$ — интегральная воронка управляемой системы (1.1) на $[t_*, \vartheta]$, отвечающая начальной паре (t_*, X_*), $X_* \subset \mathbb{R}^n$.

Аналогично для д.в. (1.5) определяются множества достижимости $Y(t^*, t_*, x_*)$, $Y(t^*, t_*, X_*)$ и интегральные воронки $Y(t_*, x_*)$, $Y(t_*, X_*)$ на $[t_*, \vartheta]$.

Обозначим через $\mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ метрическое пространство, элементы которого — компакты из $\mathbb{R}^n$, а метрика — хаусдорфова метрика

$$d(F_*, F^*) = \max\big\{h(F_*, F^*), h(F^*, F_*)\big\},$$

где $h(F_*, F^*) = \max\limits_{f_* \in F_*} \rho(f_*, F^*)$, $\rho(f_*, F^*) = \min\limits_{f^* \in F^*} \|f_* - f^*\|$ — расстояние от точки f_* до множества F^*.

Пусть $X_* \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$. Из условий A и B, наложенных на правую часть системы (1.1) — вектор-функцию $f(t, x, u)$, следует, что $Y(t^*) = Y(t^*, t_*, X_*) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$ при $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$ и, кроме того, отображение $(t^*, t_*, X_*) \mapsto Y(t^*, t_*, X_*)$ непрерывно в хаусдорфовой метрике.

Напомним теперь определения понятий инвариантности и слабой инвариантности множеств относительно управляемой системы и дифференциального включения.

Пусть задано непустое замкнутое множество Φ в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

Определение 3. *Множество Φ называется инвариантным относительно системы (1.1) (д.в. (1.5)), если для любых $t_* \in [t_0, \vartheta]$, $(t_*, x_*) \in \Phi$, справедливо $X(t_*, x_*) \subset \Phi$ ($Y(t_*, x_*) \subset \Phi$).*

Приведем эквивалентное определение инвариантного множества $\Phi \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

Определение 4. *Множество Φ называется инвариантным относительно системы (1.1) (д.в. (1.5)), если для любых t_*, t^* ($t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$), $(t_*, x_*) \in \Phi$ справедливо $X(t^*, t_*, x_*) \subset \Phi(t^*)$ $\big(Y(t^*, t_*, x_*) \subset \Phi(t^*)\big)$; здесь $\Phi(t^*) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : (t^*, x^*) \in \Phi\}$.*

Наряду с определением инвариантных множеств приведем определение слабо инвариантных множеств $\Phi \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

Определение 5. *Множество Φ называется слабо инвариантным относительно системы (1.1) (д.в. (1.5)), если для любых $(t_*, x_*) \in \Phi$ существует решение $x(t)$, $x(t_*) = x_*$ системы (1.1) (д.в. (1.5)) на $[t_*, \vartheta]$ удовлетворяющее включению $(t, x(t)) \in \Phi$, $t \in [t_*, \vartheta]$.*

Приведенные понятия инвариантных и слабо инвариантных множеств, как будет показано в последующих разделах, оказываются полезными при разработке алгоритмов приближенного построения интегральных воронок и решений задач управления, в том числе задачи о сближении.

2. Задача о сближении системы (1.1) с компактом в $\mathbb{R}^n$. Алгоритм решения задачи в частном случае

Сформулируем задачу о сближении системы (1.1) с компактным целевым множеством в пространстве $\mathbb{R}^n$ в фиксированный момент времени ϑ. Рассмотрим систему (1.1) в предположении, что в дополнение к условиям A, B она удовлетворяет условию C выпуклости вектограммы скоростей (см. ниже). При этих условиях на систему (1.1) обсудим схему решения этой задачи, основанную на использовании слабо инвариантных множеств. Приведем алгоритм приближенного построения решений в этой задаче.

Пусть M — компакт в $\mathbb{R}^n$ и $x_0 \in \mathbb{R}^n$

Учитывая специфику задачи о сближении, будем называть решения системы (1.1) (д.в. (1.5)) движениями системы (1.1) (д.в. (1.5)).

Задача 1. Требуется найти допустимое управление $u(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, порождающее движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x_0$ системы (1.1) на промежутке $[t_0, \vartheta]$, которое удовлетворяет включению $x^*(\vartheta) \in M$.

Вообще говоря, не при любых значениях параметров (t_0, x_0), ϑ и M задача (1) разрешима. Допустим все же, что система (1.1) и эти параметры таковы, что задача (1) имеет решение. Зададим такое число $\gamma_0 \in (0, \infty)$, что $h(M, \{\mathbf{0}\}) < \gamma_0$; здесь $\mathbf{0}$ — нуль в $\mathbb{R}^n$.

Введем в рассмотрение замкнутую и ограниченную область

$$\mathfrak{D} = \big\{(t, x): \ t \in [t_0, \vartheta], \ x \in B\big(\mathbf{0}; \gamma(t)\big)\big\} \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n;$$

здесь $\gamma(t) = \big(\gamma_0 + (t - t_0)\gamma\big)e^{\gamma(t-t_0)}$ при $t \in [t_0, \vartheta]$ и число γ определено в условии B, $B(\mathbf{0}; \gamma)$ — замкнутый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в $\mathbf{0}$ и радиуса γ.

Область $\mathfrak{D}$ представляет собой интегральную воронку д.в.

$$\frac{dx}{dt} \in U(x) = B\big(\mathbf{0}; \gamma(1 + \|x\|)\big)$$

на $[t_0, \vartheta]$ с начальным множеством $\mathfrak{D}(t_0) = B(\mathbf{0}; \gamma_0)$. Из определения $\mathfrak{D}$ следует, что при некотором малом $\varepsilon_* > 0$ имеет место $Y(t, t_0, M) + B(\mathbf{0}; \varepsilon_*) \subset \mathfrak{D}(t)$, $t \in [t_0, \vartheta]$.

По области $\mathfrak{D}$ построим еще одну ограниченную и замкнутую область D в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ такую, что $\mathfrak{D}(\vartheta) = D(t_0)$ и $\mathfrak{D} \subset D$. А именно, полагаем $D = \big\{(t, x): \ t \in [t_0, \vartheta], \ x \in B\big(\mathbf{0}; r(t)\big)\big\}$, где $r(t) = \big(r_0 + (t - t_0)\gamma e^{\gamma(t-t_0)}\big)$, $r_0 = \gamma(\vartheta)$.

Из определения D следует, что для любых $(t_*, x_*) \in D$, $t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta$ и любого движения $x(t)$, $x(t_*) = x_*$ системы (1.1) или д.в. (1.5) верно $(t, x(t)) \in D$ на $[t_*, t^*]$.

Именно эту область вместе с константами $L = L(D)$ и $K = \max\{\|f\| : f \in F(t, x), \ (t, x) \in D\} < +\infty$ будем использовать в последующих рассуждениях.

Предположим, что наряду с условиями A и B выполняется следующее условие:

Условие C.$\mathcal{F}(t,x) = F(t,x)$ *при* $(t,x) \in D$.

Тогда, как известно, справедливо равенство

$$X(t^*,t_*,x_*) = Y(t^*,t_*,x_*), (t_*,x_*) \in D, t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta,$$

и, значит, множества $X(t^*,t_*,x_*) \in \mathrm{comp}(\mathbb{R}^n)$.

Полагаем $M^* = M \cap X(\vartheta,t_0,x_0)$ — компакт в $\mathbb{R}^n$. Компакт M^* непуст, согласно нашему допущению о разрешимости задачи (1) при заданных (t_0,x_0), ϑ и M.

Предполагая, что умеем вычислять M^* и что M^* уже вычислено нами, выберем произвольную точку $x^*_\vartheta \in M^*$.

Точка x^*_ϑ — одна из тех точек в M, в которые может прийти движение системы (1.1) в момент ϑ, отправляясь из $x(t_0) = x_0$. В выделении таких точек, как видим, множество $X(\vartheta,t_0,x_0)$ играет значительную роль. В алгоритмах (приближенного) вычисления множеств достижимости системы (1.1) мы ограничиваемся вычислением границы этих множеств. Так, при вычислении множества $X(\vartheta,t_0,x_0)$ мы ограничиваемся вычислением его границы $\partial X(\vartheta,t_0,x_0)$. При этом мы не сохраняем в памяти для каждой точки $x^* \in \partial X(\vartheta,t_0,x_0)$ и, тем более, для каждой точки $x^* \in X(\vartheta,t_0,x_0)$ то управление $u(t)$ на $[t_0,\vartheta]$, которое приводит систему (1.1) в эту точку x^* в момент ϑ. Это утверждение справедливо и для точки x^*_ϑ : мы не сохраняем в памяти то управление $u^*(t)$ на $[t_0,\vartheta]$, которое которое породило движение $x^*(t)$ системы (1.1), приходящее в x^*_ϑ в момент ϑ.

В связи с этим возникает важный вопрос: “Как, зная точку $x^*_\vartheta \in M^*$, восстановить по ней допустимое управление $u^*(\cdot)$ на $[t_0,\vartheta]$, приводящее систему (1.1) в эту точку в момент ϑ?”

Для ответа на этот вопрос введем конструкции, тесно связанные с понятием множества достижимости.

Рассмотрим начальную точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$, промежуток $[t_0,\vartheta]$ и управление $u(t)$ на $[t_0,\vartheta]$, порождающее некоторое движение $x(t)$, $x(t_0) = x_0$, системы (1.1) на $[t_0,\vartheta]$. Справедливо равенство

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t,x(t),u(t)), \quad x(t_0) = x_0 \tag{2.1}$$

при почти всех $t \in [t_0,\vartheta]$.

Наряду с “прямым” временем $t \in [t_0,\vartheta]$ введем так называемое “обратное” время $\tau \in [t_0,\vartheta]$;

$$\tau = t_0 + \vartheta - t, \quad t \in [t_0,\vartheta].$$

Поставим в соответствие системе (1.1)

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u), t \in [t_0,\vartheta]$$

управляемую систему в $\mathbb{R}^n$, отвечающую “обратному” времени τ :

$$\frac{dz}{d\tau} = f^0(\tau, z, v), \quad \tau \in [t_0, \vartheta]; \tag{2.2}$$

здесь $f^0(\tau, z, v) = -f(t_0 + \vartheta - \tau, z, v)$, $(\tau, z, v) \in [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n \times P$.

Любой паре моментов t_*, t^* $(t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta)$ сопоставим пару моментов τ_*, τ^* $(t_0 \leqslant \tau^* < \tau_* \leqslant \vartheta)$ по формулам $\tau_* = t_0 + \vartheta - t_*$, $\tau^* = t_0 + \vartheta - t^*$.

Заметим, что движению $x(t)$ (2.1) системы (1.1), порожденному управлением $u(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, можно сопоставить движение $z(\tau)$ системы (2.2), удовлетворяющее соотношению

$$\frac{dz(\tau)}{d\tau} = f^0\big(\tau, z(\tau), v(\tau)\big), \quad z(t_0) = x(\vartheta)$$

при почти всех $\tau \in [t_0, \vartheta]$;

здесь управление $v(\tau)$ на $[t_0, \vartheta]$ определено равенством $v(\tau) = u(t)$, $\tau = t_0 + \vartheta - t$.

Можно сказать, что мы записали движение $x(t)$ системы (1.1) в терминах “обратного” времени τ как движение $z(\tau)$ системы (2.2).

Движения $x(t)$ и $z(\tau)$ на $[t_0, \vartheta]$ связаны равенством

$$x(t) = z(\tau), \quad \tau = t_0 + \vartheta - t \tag{2.3}$$

точно также как и порождающие их управления $u(t)$ и $v(\tau)$ на $[t_0, \vartheta]$.

Обратимся снова к точке $x^*_\vartheta \in M^*$. Рассмотрим интегральную воронку $Z = Z(t_0, z_0)$, $z_0 = x^*_\vartheta$ системы (2.2), представляющую собой замкнутое множество в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$.

Введем множество W в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$: $W(t) = Z(\tau)$, $t = t_0 + \vartheta - \tau$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$.

Множество W — замкнутое множество в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$, поскольку Z — замкнутое множество в $[t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$. Кроме того, согласно определению W и свойству (2.3) двойственности движений систем (1.1) и (2.2), множество W есть множество разрешимости для системы (1.1) в задаче о сближении ее с точкой x^*_ϑ в момент ϑ. Точнее, W — множество всех (t_*, x_*), из которых возможно приведение движения $x(t)$ системы (1.1) в точку x^*_ϑ в момент ϑ.

По построению множества W, выполняется $W \subset D$ и, кроме того, все движения $x(t)$, $t \in [t_*, \vartheta]$, начинающиеся в W (т.е. $(t_*, x(t_*)) \in W$), удовлетворяют включению $(t, x(t)) \in D$, $t \in [t_*, \vartheta]$.

Также по построению W и в силу выбора точки (t_0, x_0), имеем $(t_0, x_0) \in W$ и W слабо инвариантно относительно системы (1.1). Слабой инвариантностью множества W мы воспользуемся при конструировании управления на $[t_0, \vartheta]$, обеспечивающего приведение движения системы (1.1) из точки x_0 в x^*_ϑ в момент ϑ.

Для этого зададим на оси τ некоторое разбиение $\Gamma = \{\tau_0 = t_0, \tau_1, \ldots, \tau_i, \ldots, \tau_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ с равными шагами $\Delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i = \Delta > 0$, $i = \overline{0, N-1}$, где диаметр Δ мал.

Вообразим себе сначала идеальную картину: продвигаясь последовательно от $Z(\tau_0) = \{x^*_\vartheta\}$ малыми шагами $[\tau_i, \tau_{i+1}]$, $i = \overline{0, N-1}$, мы смогли вычислить (точно) сечения $Z(\tau_i)$ интегральной воронки Z системы (2.2). В множестве разрешимости W задачи о сближении системы 1.1) с точкой x^*_ϑ этим сечениям $Z(\tau_i)$ соответствуют сечения $W(t_j)$, $j = N-i$, отвечающие разбиению $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta]$ на оси t.

Допустим, что мы умеем вычислять не только множества $W(t_j)$, $j = \overline{N-i,}$ но и множества достижимости $X(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$, $x^{(j)} \in \mathbb{R}^n$, $j = \overline{0, N-1}$.

Рассмотрим при этом условии первый промежуток $[t_0, t_1]$ разбиения Γ. Так как $x^{(0)} = x_0 \in W(t_0)$ и W слабо инвариантно относительно системы (1.1), то

$$W(t_1) \bigcap X(t_1, t_0, x^{(0)}) \neq \varnothing,$$

и, значит, существует управление $u^*(t)$ на $[t_0, t_1)$, порождающее движение $x^*(t)$ системы (1.1), удовлетворяющее включению $x^{(1)} = x^*(t_1) \in W(t_1)$.

Переходим к промежутку $[t_1, t_2]$ разбиения Γ. Для точки $x^{(1)} \in W(t_1)$ выполняется

$$W(t_2) \bigcap X(t_2, t_1, x^{(1)}) \neq \varnothing,$$

и, значит, существует управление $u^*(t)$ на $[t_1, t_2)$, порождающее такое движение $x^*(t)$ системы (1.1) на $[t_1, t_2]$, что $x^{(2)} = x^*(t_2) \in W(t_2)$.

Так, продолжая последовательно переходить от промежутка $[t_j, t_{j+1}]$ разбиения Γ к следующему промежутку $[t_{j+1}, t_{j+2}]$, мы сконструируем управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, порождающее движение $x^*(t)$ системы (1.1), для которого $x^*(\vartheta) = x^*_\vartheta$.

В итоге, при условии идеальной картины, мы, двигаясь малыми шагами $[t_j, t_{j+1}]$ разбиения Γ, сконструировали управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, порождающее движение $x^*(t)$ системы (1.1), для которого $x^*(\vartheta) = x^*_\vartheta$.

Однако в реальности мы не в состоянии вычислять (точно) ни множества $W(t_j)$, ни множества $X(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$ даже при тех Γ, у которых t_j и t_{j+1} близки. Мы можем делать это лишь в редких случаях и, как правило, можем вести лишь приближенные вычисления.

Откажемся теперь от идеальной картины, но не полностью. Будем предполагать все же, что умеем вычислять множества $W(t_j)$ (точно), а множества $X(t^*, t_*, x_*)$ приближенно как множества $\tilde{X}(t^*, t_*, x_*) = x_* + (t^* - t_*)F(t_*, x_*)$ $((t_*, x_*) \in D, t_0 \leqslant t_* < t^* \leqslant \vartheta)$ и, в частности, умеем лишь приближенно вычислять множества $X(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$ как множества $\tilde{X}(t_{j+1}, t_j, x^{(j)}) = x^{(j)} + \Delta F(t_j, x^{(j)})$.

Между множествами $X(t^*, t_*, x_*)$ и $\tilde{X}(t^*, t_*, x_*)$, как известно, налицо хорошая степень близости:

$$\sup_{(t_*,x_*)\in D, t^*\in[t_*,\vartheta]} d\big(X(t^*, t_*, x_*), \tilde{X}(t^*, t_*, x_*)\big) \leqslant \omega(t^* - t_*),$$

здесь $\omega(\delta){=}\delta\omega^*\big((1{+}K)\delta\big)$, $\delta > 0$; $\omega^*(\rho){=}\max\big\{\|f(t_*, x_*, u){-}f(t^*, x^*, u)\| :$ (t_*, x_*) и (t^*, x^*) из D, $|t_* - t^*|{+}\|x_*{-}x^*\| \leqslant \rho$, $u \in P\big\}$, $\rho > 0$; число $K \in (0, \infty)$ определено на с. 99.

Из определения функции $\omega^*(\rho)$ следует, что $\omega^*(\rho) \downarrow 0$ при $\rho \downarrow 0$ и поэтому функция $\omega(\delta)$ есть также монотонная функция от $\delta > 0$ — величина порядка малости по δ, более высокого, чем первый порядок при $\delta \downarrow 0$.

Приступим к описанию пошагового построения управления $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, цель которого состоит в приведении движения $x^*(t)$ системы (1.1) в точку x^*_ϑ в момент ϑ. Отметим, что мы не отказываемся здесь от предположения об умении (точно) вычислять множества $W(t_j)$ лишь потому, что такой отказ существенно усложнил бы выкладки. Учитывая нашу возможность вычислять множества $X(t_{j+1}, t_j, x^{(j)})$ лишь приближенно, мы сможем построить управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, приводящее движение $x^*(t)$ в момент ϑ лишь в некоторую окрестность точки x^*_ϑ.

Рассмотрим, как и в случае идеальной картины, промежуток $[t_0, t_1]$. Так как W слабо инвариантно относительно системы (1.1) и $x_0 \in W(t_0)$, то

$$W(t_1) \bigcap X(t_1, t_0, x_0) \neq \varnothing$$

и, значит,

$$W(t_1)_{\omega(\Delta)} \bigcap \tilde{X}(t_1, t_0, x_0) \neq \varnothing;$$

здесь Φ_ω — ω-окрестность множества Φ в $\mathbb{R}^n$.

Выберем некоторую точку $\tilde{x}^{(1)} \in W(t_1)_{\omega(\Delta)} \bigcap \tilde{X}(t_1, t_0, x_0)$. Справедливо представление для точки

$$\tilde{x}^{(1)} = x_0 + \Delta f^0, \qquad \text{где } f^{(0)} \in F(t_0, x_0).$$

Так как в рассматриваемом случае $F(t_0, x_0) = \mathcal{F}(t_0, x_0)$, то уравнение

$$f(t_0, x_0, u) = f^{(0)} \tag{2.4}$$

относительно u разрешимо в P, то есть существует вектор $u^{(0)} \in P$, удовлетворяющий (2.4).

Будем считать, что мы умеем решать уравнение (2.4), и для некоторых классов систем (1.1) это действительно так. Например, для систем (1.1) вида $f(t, x, u) = f(t, x) + B(t, x)u$ уравнение (2.4) сводится к решению линейного уравнения относительно управления u

$$B(t_0, x_0)u = \big(f^{(0)} - f(t_0, x_0)\big);$$

здесь $B(t,x)$ — матрица-функция от t,x.

В случае, если $B(t,x)$ — неособая $(n\times n)$-матрица-функция (т.е. $\det B(t,x)\neq 0$ при $(t,x)\in D$), будем иметь решение

$$u^{(0)}=B(t_0,x_0)^{-1}\big(f^{(0)}-f(t_0,x_0)\big),$$

при этом справедливо $u^{(0)}\in P$.

Поскольку сам вектор $f^{(0)}$ представим в виде

$$f^{(0)}=\Delta^{-1}(\tilde{x}^{(1)}-x_0),$$

то в случае неособой $n\times n$-матрицы-функции $B(t,x)$ справедливо равенство

$$u^{(0)}=\Delta^{-1}B(t_0,x_0)^{-1}\big(\tilde{x}^{(1)}-x_0-\Delta f(t_0,x_0)\big).$$

Итак, для системы (1.1) управление $u^{(0)}\in P$ определяем из уравнения (2.4), и в некоторых случаях удается выписать формулу для $u^{(0)}$. К сожалению, это возможно далеко не всегда.

Управление $u^*(t)$ на $[t_0,t_1)$ определяем равенством

$$u^*(t)=u^{(0)}\in P,\quad t\in[t_0,t_1).$$

Далее переходим к второму промежутку $[t_1,t_2]$ разбиения Γ. Для точки $\tilde{x}^{(1)}\in W(t_1)_{\omega(\Delta)}$ ищем ближайшую точку $x^{(1)}$ на $W(t_1)$. Справедливо неравенство $\|x^{(1)}-\tilde{x}^{(1)}\|\leqslant\omega(\Delta)$.

В силу слабой инвариантности W и $x^{(1)}\in W(t_1)$ имеем $W(t_2)\bigcap X(t_2,t_1,x^{(1)})\neq\varnothing$. Из этого соотношения и неравенства $d(X(t_2,t_1,x^{(1)}),\tilde{X}(t_2,t_1,x^{(1)}))\leqslant\omega(\Delta)$ следует

$$W(t_2)_{\omega(\Delta)}\bigcap\tilde{X}(t_2,t_1,x^{(1)})\neq\varnothing.$$

Выберем некоторую точку $\tilde{x}^{(2)}\in W(t_2)_{\omega(\Delta)}\bigcap\tilde{X}(t_2,t_1,x^{(1)})$. Так как $\tilde{x}^{(2)}\in\tilde{X}(t_2,t_1,x^{(1)})$, то $\tilde{x}^{(2)}=x^{(1)}+\Delta f^{(1)}$, где $f^{(1)}\in F(t_1,x^{(1)})$.

Из уравнения

$$f(t_1,x^{(1)},u)=f^{(1)}\tag{2.5}$$

определяем вектор $u^{(1)}\in P$.

Уравнение (2.5) можно записать в виде

$$f(t_1,x^{(1)},u)=\Delta^{-1}(\tilde{x}^{(2)}-x^{(1)}),$$

так что справедливо $\tilde{x}^{(2)}=x^{(1)}+\Delta f(t_1,x^{(1)},u^{(1)})$.

Управление $u^*(t)$ на $[t_1,t_2)$ задаем равенством $u^*(t)=u^{(1)}\in P$.

Затем переходим к следующему промежутку $[t_2,t_3]$ разбиения Γ. Для точки $\tilde{x}^{(2)}$ определяем точку $x^{(2)}$, ближайшую на $W(t_2)$. Выполняется неравенство $\|x^{(2)}-\tilde{x}^{(2)}\|\leqslant\omega(\Delta)$.

Учитывая слабую инвариантность множества W и $x^{(2)} \in W(t_2)$, получаем $W(t_3) \bigcap X(t_3, t_2,\ x^{(2)}) \neq \varnothing$. Выбираем некоторую точку $\tilde{x}^{(3)} \in W(t_3)_{\omega(\Delta)} \bigcap \tilde{X}(t_3, t_2, x^{(2)})$.

Для точки $\tilde{x}^{(3)}$ справедливо представление $\tilde{x}^{(3)} = x^{(2)} + \Delta f^{(2)}$, где $f^{(2)} \in F(t_2, x^{(2)})$.

Из уравнения

$$f(t_2, x^{(2)}, u) = f^{(2)} \tag{2.6}$$

определяем вектор $u^{(2)} \in P$.

Так как $f^{(2)} = \Delta^{-1}(\tilde{x}^{(3)} - x^{(2)})$, то вектор $u^{(2)}$ удовлетворяет равенству $\tilde{x}^{(3)} = x^{(2)} + \Delta f(t_2, x^{(2)}, u^{(2)})$.

Управление $u^*(t)$ на $[t_2, t_3]$ определяем равенством $u^*(t) = u^{(2)} \in P$.

Затем переходим к следующему промежутку $[t_3, t_4]$. Так продвигаясь вперед по шагам $[t_j, t_{j+1}]$ разбиения Γ, построим кусочно-постоянное управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$:

$$u^*(t) = u^{(j)} \in P \text{ при } t \in [t_j, t_{j+1}), j = \overline{0, N-1}.$$

Это управление порождает движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x_0$ системы (1.1) на $[t_0, \vartheta]$.

Покажем, что при достаточно малых $\Delta > 0$ движение $x^*(t)$ мало отстоит в моменты t_j от множеств $W(t_j)$, то есть мала величина $\rho(x^*(t_j), W(t_j))$ — расстояние от $x^*(t_j)$ до $W(t_j)$.

Для этого покажем, что во все моменты t_j мала величина $\rho_j = \|x^*(t_j) - x^{(j)}\|$; здесь $x^{(j)}$ — точка из $W(t_j)$, которая определяется аналогично точкам $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$.

Итак, сначала рассмотрим первый шаг $[t_0, t_1]$ и оценим сверху величину ρ_1. Справедливо равенство

$$x^*(t_1) - x^{(1)} = (x^*(t_1) - \tilde{x}^{(1)}) + (\tilde{x}^{(1)} - x^{(1)}). \tag{2.7}$$

Первое слагаемое в правой части (2.7) представимо в виде

$$x^*(t_1) - \tilde{x}^{(1)} = \Big(x_0 + \int\limits_{t_0}^{t_1} f(t, x^*(t), u^{(0)})\, dt\Big) - \Big(x_0 + \Delta f(t_0, x_0, u^{(0)})\Big)$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big(f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f(t_0, x_0, u^{(0)})\Big)\, dt.$$

По построению области D, все рассматриваемые нами позиции содержатся в $D \subset [t_0, \vartheta] \times \mathbb{R}^n$ и, в частности, $(t, x^*(t)) \in D$ при $t \in [t_0, t_1]$. Принимая это во внимание, оценим величину

$$\|f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f(t_0, x_0, u^{(0)})\|, \quad t \in [t_0, t_1).$$

Справедлива при $t \in [t_0, t_1)$ оценка

$$\|f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f(t_0, x_0, u^{(0)})\| \leqslant \omega^*\big(|t - t_0| + \|x^*(t) - x_0\|\big) \leqslant \omega^*\big((1+K)\Delta\big). \tag{2.8}$$

Учитывая (2.8), получаем

$$\|x^*(t_1) - \tilde{x}^{(1)}\| = \int\limits_{t_0}^{t_1} \|f(t, x^*(t), u^{(0)}) - f(t_0, x_0, u^{(0)})\|\, dt \leqslant \omega(\Delta). \tag{2.9}$$

Из равенства (2.7), оценок $\|\tilde{x}^{(1)} - x^{(1)}\| \leqslant \omega(\Delta)$ и (2.9) следует

$$\rho_1 = \|x^*(t_1) - x^{(1)}\| \leqslant 2\omega(\Delta).$$

Отсюда следует оценка $\rho\big(x^*(t_1), W(t_1)\big) \leqslant 2\omega(\Delta)$.

Рассмотрим теперь второй шаг $[t_1, t_2]$ и оценим сверху величину ρ_2. Справедливо равенство

$$x^*(t_2) - x^{(2)} = (x^*(t_2) - \tilde{x}^{(2)}) + (\tilde{x}^{(2)} - x^{(2)}). \tag{2.10}$$

Первое слагаемое в правой части (2.10) имеет вид

$$x^*(t_2) - \tilde{x}^{(2)} = s^{(1)} + \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f(t, x^*(t), u^{(1)}) - f(t_1, x^{(1)}, u^{(1)})\Big)\, dt,$$

где $s^{(1)} = x^*(t_1) - x^{(1)}$

Справедливо неравенство

$$\|x^*(t_2) - \tilde{x}^{(2)}\| \leqslant \|s^{(1)}\| + \int\limits_{t_1}^{t_2} \big\|f(t, x^*(t), u^{(1)}) - f(t_1, x^{(1)}, u^{(1)})\big\|\, dt. \tag{2.11}$$

Оценим сверху подынтегральное выражение в (2.11) при $t \in [t_1, t_2)$.

$$\begin{aligned} &\|f(t, x^*(t), u^{(1)}) - f(t_1, x^{(1)}, u^{(1)})\| \leqslant \\ &\qquad \leqslant \|f(t, x^*(t), u^{(1)}) - f(t_1, x^*(t_1), u^{(1)})\| + \\ &\qquad + \|f(t_1, x^*(t_1), u^{(1)}) - f(t_1, x^{(1)}, u^{(1)})\| \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant \omega^*((1+K)\Delta) + L\|s^{(1)}\|, \end{aligned} \tag{2.12}$$

где $L = L(D)$ — константа Липшица вектор-функции $f(t, x, u)$ в D.

Из неравенств (2.11) и (2.12) следует

$$\|x^*(t_2) - \tilde{x}^{(2)}\| \leqslant e^{L\Delta}\|s^{(1)}\| + \omega(\Delta). \tag{2.13}$$

Учитывая оценки (2.13) и $\|\tilde{x}^{(2)} - x^{(2)}\| \leqslant \omega(\Delta)$, получаем

$$\rho_2 = \|x^*(t_2) - x^{(2)}\| \leqslant e^{L\Delta}\rho_1 + 2\omega(\Delta).$$

Отсюда следует оценка

$$\rho(x^*(t_2), W(t_2)) \leqslant e^{L\Delta}\rho_1 + 2\omega(\Delta).$$

Теперь переходим к следующему шагу $[t_2, t_3]$. На этом шаге оценим сверху величину ρ_3.

Справедливо равенство

$$x^*(t_3) - x^{(3)} = \big(x^*(t_3) - \tilde{x}^{(3)}\big) + (\tilde{x}^{(3)} - x^{(3)}). \tag{2.14}$$

Первое слагаемое в правой части равенства (2.14) имеет вид

$$x^*(t_3) - \tilde{x}^{(3)} = s^{(2)} + \int\limits_{t_2}^{t_3} \Big(f(t, x^*(t), u^{(2)}) - f(t_2, x^{(2)}, u^{(2)})\Big)\, dt,$$

где $s^{(2)} = x^*(t_2) - x^{(2)}$.

Учитывая при $t \in [t_2, t_3)$ оценку

$$\|f(t, x^*(t), u^{(2)}) - f(t_2, x^{(2)}, u^{(2)})\| \leqslant L\rho_2 + \omega^*((1+K)\Delta),$$

получаем

$$\|x^*(t_3) - \tilde{x}^{(3)}\| \leqslant e^{L\Delta}\rho_2 + \omega(\Delta). \tag{2.15}$$

Учитывая оценки (2.15) и $\|\tilde{x}^{(3)} - x^{(3)}\| \leqslant \omega(\Delta)$, получаем

$$\rho_3 = \|x^*(t_3) - x^{(3)}\| \leqslant e^{L\Delta}\rho_2 + 2\omega(\Delta). \tag{2.16}$$

Отсюда следует оценка

$$\rho\big(x^*(t_3), W(t_3)\big) \leqslant e^{L\Delta}\rho_2 + 2\omega(\Delta).$$

Далее переходим к следующему шагу $[t_3, t_4]$ разбиения Γ и так вплоть до последнего шага $[t_{N-1}, t_N]$. На шаге $[t_j, t_{j+1}]$ верна оценка сверху величины ρ_{j+1} :

$$\rho_{j+1} \leqslant e^{L\Delta}\rho_j + 2\omega(\Delta), \tag{2.17}$$

где $j = \overline{1, N-1}$ (здесь дополнительно ввели $\rho_0 = 0$).

Из рекуррентной оценки (2.17) получаем, что все величины ρ_j малы при малых $\Delta > 0$, а также верна оценка

$$\rho_N \leqslant e^{L(\vartheta - t_0)} N\Delta 2\omega^*\big((1+K)\Delta\big),$$

из которой следует оценка

$$\rho\big(x^*(t_N), W(t_N)\big) \leqslant 2e^{L(\vartheta - t_0)}(\vartheta - t_0)\omega^*\big((1+K)\Delta\big).$$

Принимая во внимание $W(t_N) = \{x^*_\vartheta\}$, получаем

$$\|x^*(\vartheta) - x^*_\vartheta\| \leqslant 2e^{L(\vartheta - t_0)}(\vartheta - t_0)\omega^*((1+K)\Delta). \tag{2.18}$$

Из оценки (2.18) следует, что при диаметре Δ разбиения Γ, стремящемся к нулю, правая часть оценки (2.18) стремится к нулю и, значит, $\|x^*(\vartheta) - x^*_\vartheta\| \to 0$. Следовательно, видим, что с измельчением диаметра Δ разбиения Γ кусочно-постоянное управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, построенное по разбиению Γ, обеспечивает приведение движения $x^*(t)$ системы (1.1) в момент ϑ в сколь угодно малую окрестность точки x^*_ϑ.

На основе приведенных построений и выкладок сформируем следующее утверждение, представляющее один из основных результатов настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть управляемая система 1.1 удовлетворяет условиям* **A**, **B**, **C**, *а начальная позиция* (t_0, x_0) *системы 1.1 такова, что* $M \cap X(\vartheta, t_0, x_0) \neq \varnothing$. *Пусть также* $x^*_\vartheta \in M \cap X(\vartheta, t_0, x_0)$ *и* Γ *— конечное равномерное разбиение промежутка* $[t_0, \vartheta]$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *можно построить допустимое кусочно-постоянное управление* $u^*(t)$ *на* $[t_0, \vartheta]$, *отвечающее разбиению* Γ *и порождающее движение* $x^*(t)$, $x(t_0) = x_0$ *системы (1.1), которое удовлетворяет равенству* $\|x^*(\vartheta) - x^*_\vartheta\| \leqslant \varepsilon$.

Набор $\{\tilde{x}^{(j)}\}$ точек $\tilde{x}^{(j)}$, содержащихся вблизи множеств $W(t_j)$, $j = \overline{0, N}$, мы трактуем как своеобразного дискретного в $\mathbb{R}^n$ поводыря для движения $x^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$. Этот поводырь формировался по ходу дела по шагам $[t_j, t_{j+1}]$ разбиения Γ и параллельно с ним формировалось кусочно-постоянное управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, которое сразу же использовалось при формировании движения $x^*(t)$ системы (1.1). Таким образом, управления в системе Σ (1.1) формируются на основе копирования управления, порождающего движение поводыря. Этот поводырь $\{\tilde{x}^{(j)}, j = \overline{0, N}\}$, приходящий в момент $t_N = \vartheta$ в $\omega(\Delta)$-окрестность точки x^*_ϑ, притягивает и движение $x^*(t)$ системы (1.1) в момент ϑ в малую окрестность точки x^*_ϑ.

Итак, мы рассмотрели систему (1.1) в предположении, что для нее выполняется условие C. Была описана процедура управления системой (1.1), базирующаяся на копировании управления поводыря и обеспечивающая для начальных точек $x_0 \in W(t_0)$ сколь угодно точное наведение системы (1.1) в момент ϑ на целевое множество x^*_ϑ. Желаемая точность наведения системы (1.1) на x^*_ϑ обеспечивалась за счет измельчения шага разбиения Γ промежутка $[t_0, \vartheta]$.

3. Применение алгоритмов приближенного вычисления решений к конкретным задачам о сближении

В этом разделе рассмотрим две конкретные задачи о сближении с целью в фазовом пространстве в фиксированный момент времени. Мы приведем здесь постановки задач и графическое представление результатов приближенных вычислений их решений.

Пример 1. Маятниковый осциллятор. Задан сферический маятниковый осциллятор, представляющий собой маятник с абсолютно твердым стержнем длины $l = 1$ и грузом массы $m = 1$. Маятник прикреплен к неподвижной точке подвеса и плоскость колебаний маятника вращается вокруг вертикальной оси (проходящей через точку подвеса) с постоянной угловой скоростью $\omega = 1$.

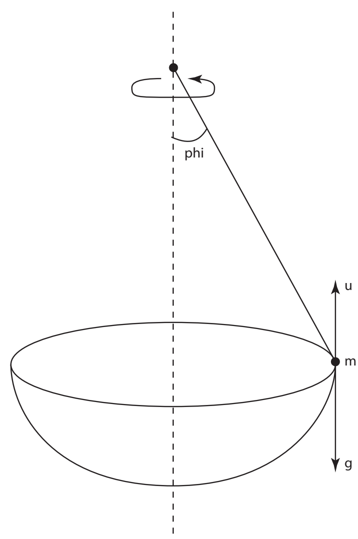

Рис. 1.

Пусть φ — угол отклонения стержня маятника от вертикальной оси. На маятник действует сила гравитации mg, а также находящаяся в нашем распоряжении сила u, при помощи которой мы управляем маятником. Эта сила направлена вертикально и проявляется в уравнениях движения маятника в виде скаляра u, ограниченного по модулю. Считаем, что управление маятником осуществляется на промежутке времени $[t_0, \vartheta] = [0, 3]$. Полагая в качестве переменных состояния маятника $x_1 = \varphi$, $x_2 = \dot{\varphi}$, запишем уравнения движения сферического маятника в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = (-g + u)\sin x_1 + 2\sin 2x_1. \end{cases} \tag{3.1}$$

При указанных выше значениях параметров ($l = 1$, $m = 1$, $\omega = 1$, $g = 9.8$) считаем, что управление $u = u(t)$ стеснено на $[t_0, \vartheta] = [0, 3]$

ограничением
$$|u(t)| \leqslant 3. \tag{3.2}$$

Считаем также, что задано целевое множество $M = \{x_f\}$, где $x_f = (2,0) \in \mathbb{R}^2$.

Задача состоит в том, чтобы для управляемой системы 3.1, 3.2 выделить в пространстве $\mathbb{R}^2$ множество $W(t_0)$ начальных точек x_0, из которых возможно приведение управляемой системы 3.1, 3.2 в момент $\vartheta = 3$ на целевое множество M и для нескольких произвольных точек $x_0 \in W(t_0)$ выделить управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ и порожденное им движение $x^*(t)$, $x^*(t_0) = x_0$, удовлетворяющее включению $x^*(\vartheta) \in M$, то есть равенству $x^*(\vartheta) = x_f$.

Система 3.1 удовлетворяет всем условиям (условия A, B, C), которые наложены на управляемую систему в §1, §2. Поскольку точно решить сформулированную задачу по управлению сферическим маятником невозможно, будем решать ее приближенно, используя алгоритмы приближенного построения решений, изложенные в §2, базирующиеся на использовании конструкций поводыря.

Зададим конечное равномерное разбиение $\Gamma = \{t_0, t_1, \ldots, t_j, \ldots, t_N = \vartheta\}$ промежутка $[t_0, \vartheta] = [0, 3]$ с диаметром $\Delta = 0.01$. Пятясь во времени по моментам t_j разбиения Γ от целевого множества $W(\vartheta) = M$, вычислим последовательно аппроксимации $\tilde{W}(t_j)$, $j = \overline{N-1, 0}$ множеств $W(t_j)$ из §2, являющихся сечениями множества разрешимости W в задаче о сближении с M.

Аппроксимации $\tilde{W}(t_j)$ мы представляем в этой задаче в виде многоугольников на плоскости $\mathbb{R}^2$. Затем, выбрав какую-либо начальную точку $x_0 \in \tilde{W}(t_0)$, построим, последовательно продвигаясь по шагам $[t_j, t_{j+1}]$ разбиения Γ, кусочно-постоянное управление $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ и порожденное им движение $x^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$, приходящее в момент ϑ в некоторую малую ε-окрестность M_ε множества M.

Ниже мы приведем графическое представление нескольких множеств $\tilde{W}(t_j)$ в $\mathbb{R}^2$ из полного набора $\{\tilde{W}(t_j) \colon t_j \in \Gamma\}$, дающее определенное представление об эволюции множеств $W(t_j)$, $t_j \in \Gamma$. Также приведем график скалярного управления $u^*(t)$ на $[t_0, \vartheta]$ и изображение в пространстве $\mathbb{R}^3$ движения $x^*(t)$, порожденного этим управлением.

На рисунках 2 – 4 изображены аппроксимации $\tilde{W}(t_j)$, отвечающие моментам $t_0 = 0$, $t_{50} = 0.5$, $t_{100} = 1$, $t_{150} = 1.5$, $t_{200} = 2$ $t_{250} = 2.5$. Моменту $t_{300} = 3$ отвечает целевое множество $M = \{x_f\}$, $x_f = (2,0) \in \mathbb{R}^2$. Последовательность рисунков соответствует «обратному» времени.

На рисунках 5 – 6 для начального условия в задаче о сближении — точки $x_0 = (-0.4318, 3.9678)$, содержащейся в $\tilde{W}(t_0)$, изображено движение маятникого осциллятора, приходящие в некоторую малую ε-окрестность M_ε множества M и порождающее его управление. Неточное попадание движения на целевое множество M обусловлено тем, что оно реализованы на базе аппроксимирующих разрешающих конструкций.

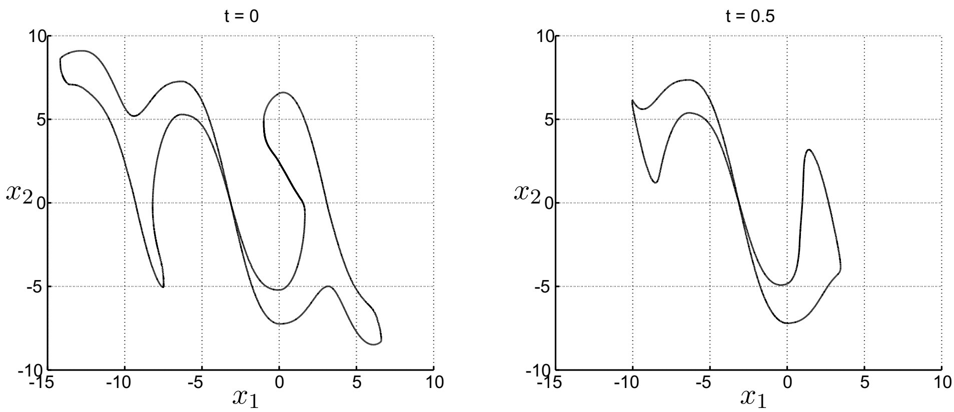

Рис. 2

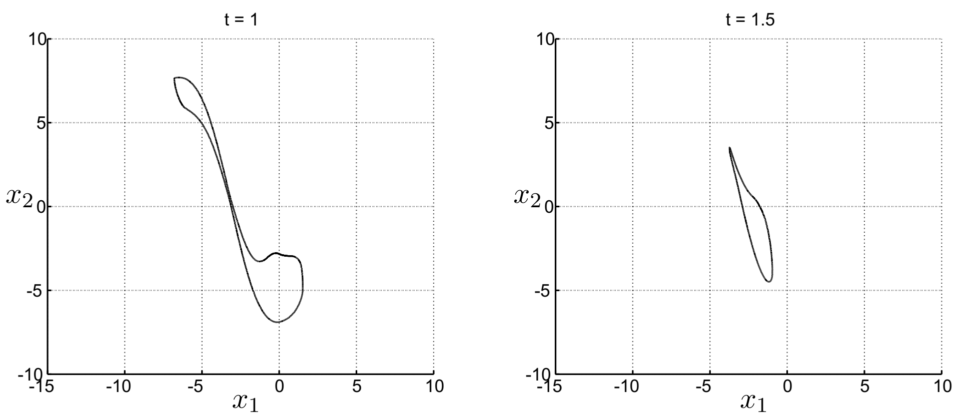

Рис. 3

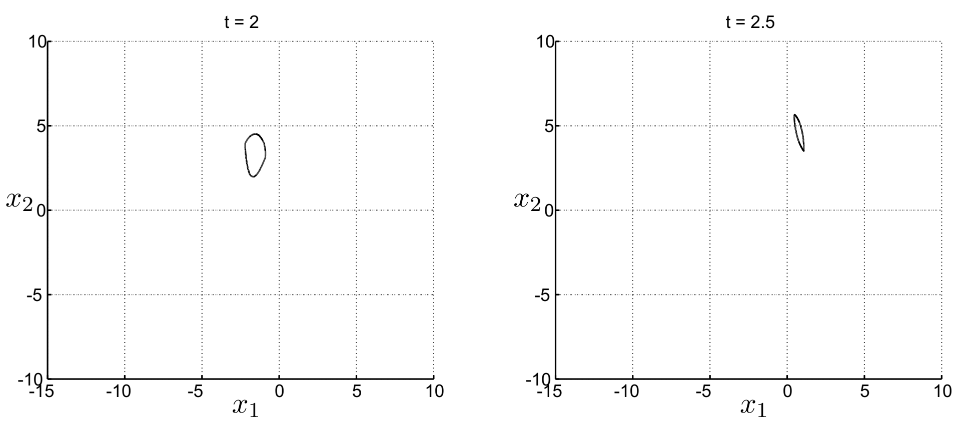

Рис. 4

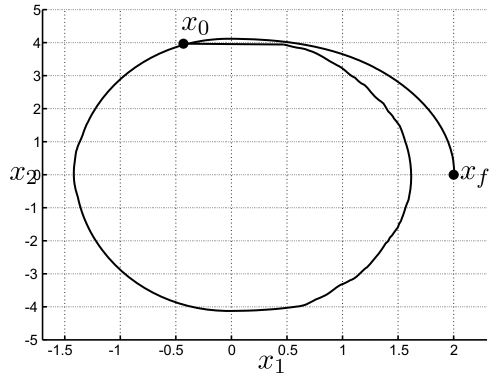

Рис. 5

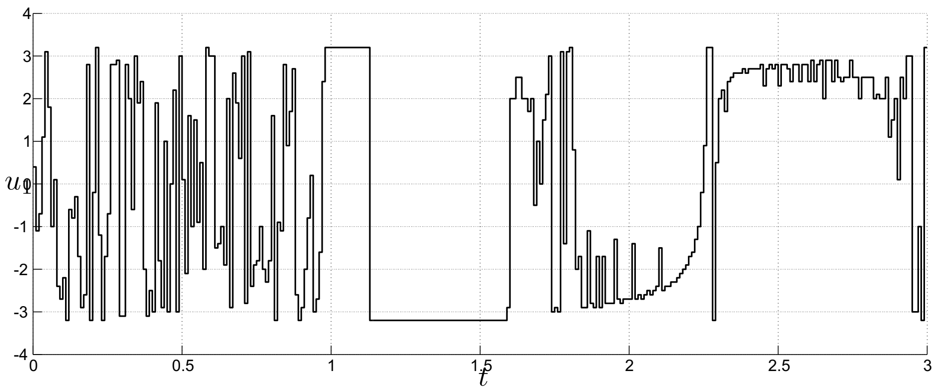

Рис. 6

Пример 2. Задача вариационного исчисления.

Пусть в некоторой ограниченной замкнутой области $X \subset \mathbb{R}^2$ с кусочно-гладкой границей задана непрерывная функция $f(x, y) > 0$. Среди кусочно гладких кривых Γ, лежащих в X и соединяющих точки A и B, требуется выделить такую кривую Γ_0, на которой принимает минимальное значение интегральный функционал

$$\int\limits_{\Gamma_0} f(x, y) d\Gamma. \tag{3.3}$$

Данная задача является классической задачей вариационного исчисления и, как известно, допускает аналитическое решение только в исключительных случаях.

Для численного решения данной задачи, в частности, используется подход (см., например, [4]), восходящий к основателю вариационного исчисления И. Бернулли, основанный на аналогии между задачей вариационного исчисления и распространением света в оптически-неоднородной среде, который состоит в следующем. С точки зрения геометрической оптики выражение (3.3) определяет время, за которое выпущенный в начальный момент времени из точки $A(x_0, y_0)$ свет, двигаясь в оптически-неоднородной среде с локальной скоростью $c(x, y) = 1/f(x, y)$, достигает точки $B(x_1, y_1)$. В соответствии с принципом Гюйгенса, всякая точка области X, которой свет достиг, становится новым источником света. Следовательно, выпустив световую волну из точки A, можно построить траекторию ее движения и зафиксировать "квант", достигающий первым точки B. Далее, пятясь во времени, можно восстановить траекторию движения этого "кванта", которая является искомой кривой Γ_0.

Легко видеть, что данный подход весьма похож на метод приближенного построения решений задачи о сближении, описанный в §2. Это сходство не является случайным. Можно показать(обосновывающие выкладки и рассуждения здесь опущены), что множество $X(t^*) \subset X$ точек $\mathbf{x} = (x, y)$, которых свет достиг к моменту времени t^*, представляет собой объединение множеств достижимости $X(t, t_0, \mathbf{x}_0), t \in [t_0, t^*]$ (здесь $t_0 = 0, \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0) = A$) и является проекцией на $\mathbb{R}^2$ интегральной воронки $X(t_0, \mathbf{x}_0) = \bigcup\limits_{t \in [t_0, t^*]} (t, X(t, t_0, \mathbf{x}_0))$ управляемой системы

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cos u}{f(x, y)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\sin u}{f(x, y)}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, \tag{3.4}$$

рассматриваемой на промежутке $[t_0, t^*]$ с начальным условием

$$(x(t_0), y(t_0)) = \mathbf{x}_0.$$

Систему (3.4) можно незначительно (с точки зрения структуры множеств достижимости) подправить до системы (3.5)

$$\frac{dx}{dt} = \frac{w \cos u}{f(x, y)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{w \sin u}{f(x, y)}, \quad 0 \leq u \leq 2\pi, w \in [0, 1]. \tag{3.5}$$

с тем же самым начальным условием; здесь w — дополнительный к u параметр управления, регулирующий длину вектора скоростей системы (3.5).

Тогда, например, при условии липшицевости функции $f(\mathbf{x}) = f(x, y)$ по переменной $\mathbf{x}$ дополняющем условие положительности функции $f(\mathbf{x})$ на X, мы получим, что система (3.5) удовлетворяет условиям A, B, C, наложенным на на управляемую систему (1.1) в §1, §2. В таком случае с помощью указанного в §2 метода возможно приведение движения управляемой системы (3.5), а также системы (3.4) в сколь угодно малую окрестность точки B.

Список литературы

1. Вдовин С. А. Построение множества достижимости интегратора Брокетта / С. А. Вдовин, А. М. Тарасьев, В. Н. Ушаков // Прикл. математика и механика. – 2004. – Т. 68, вып. 5. – С. 707–724.
2. Гусев М. И. Оценки множества достижимости многомерных управляемых систем с нелинейными перекрестными связями / М. И. Гусев // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2009. – Т. 15, № 4. – С. 82–94.
3. Гусейнов Х. Г. Об аппроксимации областей достижимости управляемых систем / Х. Г. Гусейнов, А. Н. Моисеев, В. Н. Ушаков // Прикл. математика и механика. — 1998. — Т. 62, вып. 2. — С. 179–187.
4. Казаков А. Л. Об одном подходе к решению задач оптимизации, возникающих в транспортной логистике / А. Л. Казаков, А. А. Лемперт // Автоматика и телемеханика. – 2011. – №7. – С. 50–57.
5. Красовский Н. Н. Лекции по теории управления. Вып. 4. Основная игровая задача наведения. Поглощение цели. Экстремальная стратегия / Н. Н. Красовский. – Свердловск : Урал. гос. ун-т, 1970. – 96 с.
6. Красовский Н. Н. Управление динамической системой / Н. Н. Красовский. – М. : Наука, 1985. – 520 с.
7. Красовский Н. Н. Позиционные дифференциальные игры / Н. Н. Красовский, А. И. Субботин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 1974. – 456 с.
8. Костоусова Е. К. Об ограниченности и неограниченности внешних полиэдальных оценок множеств достижимости линейных дифференциальных систем / Е. К. Костоусова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2009. – Т. 15, № 4. – С. 134–145.
9. Никольский М. С. Об аппроксимации множества достижимости дифференциального включения / М. С. Никольский // Вестн. МГУ. Сер. 15, Вычисл. математика и кибернетика. – 1987. – №4. – С. 31–34.
10. Никольский М. С. Об оценке изнутри множества достижимости нелинейного интегратора Р. Брокетта / М. С. Никольский // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 96, №11. – С. 1501–1505.
11. Понтрягин Л.С. О линейных диф. играх I / Л. С. Понтрягин // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 156, № 4. – С. 738–741.
12. Ушаков В. Н. Аппроксимация множеств достижимости и интегральных воронок / В. Н. Ушаков, А. Р. Матвийчук, А. В. Ушаков // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. – 2011. – Вып. 4. – С. 23–39.
13. Ушаков В. Н. Построение интегральных воронок дифференциальных включений / В. Н. Ушаков, А. П. Хрипунов // ЖВМ и П.Ф. – 1994. – Т. 34, № 7. — С. 965–977.
14. Филиппова Т. Ф. Дифференциальные уравнения эллипсоидальных оценок множеств достижимости нелинейной динамической управляемой системы / Т. Ф. Филиппова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 1. – С. 223–232.
15. Черноусько Ф. Л. Оценивание фазового состояния динамических систем: Метод эллипсоидов / Ф. Л. Черноусько. – М. : Наука, 1988.
16. Astolfi A. Robust stabilization of the angular velocity of a rapid body / A. Astolfi, A. Rapaport // Systems and control letters. – 1998. – Vol. 34. – P. 257–264.
17. Brokett R. W. Asymptotic stability and feedback stabilization / R. W. Brokett // Differential Geometric Control Theory / eds. Brokett R. W. [et al.]. – Boston : Birkhauser, 1983. – P. 181–191.
18. Kurzhanski A. B. Ellipsoidal calculus for estimation and control / A. B. Kurzhanski, I. Valyi. – Boston : Birkhauser, 1997. – 321 p.

19. Kurzhanski A. A. Ellipsoidal toolbox [Electronic recource] / A. A. Kurzhanski, P. Varaiya. – URL: http://code.google.com/p/ellipsoids, 2005.

V. N. Ushakov, A. R. Matviychuk, A. V. Ushakov, A. L. Kazakov

On the solutions construction of the problem of convergence to a fixed point in time

Abstract. One game pursuit problem with compact target set at the finite time moment is studied. The enquiry of its solution construction is researched.

Keywords: controlled system, game pursuit problem, reachable set, integral fusion

Ушаков Владимир Николаевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16,
тел.: (343)3753456 (`ushak@imm.uran.ru`)

Матвийчук Александр Ростиславович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16, тел.: (343)3753438 (`matv@uran.ru`)

Ушаков Андрей Владимирович, аспирант, Институт математики и механики УрО РАН, 620990, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, д. 16, тел.: (343)3753456 (`aushakov.pk@gmail.com`)

Казаков Александр Леонидович, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, а/я 292, тел.: (3952)453033, (`kazakov@icc.ru`)

Ushakov Vladimir, Institute of Mathematics and Mechanics of Ural
linebreak Branch of the Russian Academy of Sciences, 16, S.Kovalevskaja street, Ekaterinburg, 620219, Corresponding Member of the RAS, Phone: (343)3753456 (`ushak@imm.uran.ru`)

Matviychuk Alexander, Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 16, S.Kovalevskaja street, Ekaterinburg, 620219, Researcher, Phone: (343)3753438 (`matv@uran.ru`)

Ushakov Andrey, Institute of Mathematics and Mechanics of Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 16, S.Kovalevskaja street, Ekaterinburg, 620219, PhD student, Phone: (343)3753456
(`aushakov.pk@gmail.com`)

Kazakov Alexander, Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, 134, Lermontov street, Post Box 292 , Irkutsk, Russia, 664033, Chief Researcher,
Phone: (3952)453033, (`kazakov@icc.ru`)