Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 4. С. 46—53

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.716

О двух максимальных мультиклонах и частичных ультраклонах *

В. И. Пантелеев
Восточно-Сибирская государственная академия образования

Аннотация. Рассматриваются мультифункции на конечном множестве. Описаны некоторые максимальные клоны таких функций относительно суперпозиции, определенной двумя способами.

Ключевые слова: клон; максимальный клон; мультиклон; частичный ультраклон; суперпозиция; замкнутое множество; мультифункция.

Введение

В теории дискретных функций наряду с всюду определенными функциями рассматриваются и функции, определенные не на всех наборах, при этом особое внимание уделяется функциям на конечных множествах. Для таких функций имеются различные уточнения понятия неопределенности и соответствующие определения суперпозиции. При этом важным и интересным является построение и анализ порождающих множеств и проблема эффективных критериев полноты.

В предлагаемой работе неопределенность понимается как некоторое подмножество основного множества значений функции. Для таких функций операция суперпозиции определяется двумя различными способами: в основе первого лежит объединение подмножеств, в основе второго — пересечение. При этом суперпозиция, определенная первым способом, рассматривается уже достаточно долго (см., например, [4]), а вторая была введена в работе автора [1]. Множества функций, замкнутые относительно суперпозиций, называются мультиклонами и частичными ультраклонами, соответственно. Результатом заметки является описание двух максимальных частичных ультраклонов, которые также являются и максимальными мультиклонами. Этот результат обобщает

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 12-01-00351-а.

соответствующие утверждения для мультифункций на 2-элементном множестве [1, 2].

1. Основные понятия и определения

Пусть, как обычно, $|A|$ — мощность множества A, 2^A — множество всех подмножеств A и $E_k = \{0, 1, ..., k-1\}$. Определим следующие множества функций:

$P^{\overline{*}}_{k,n} = \{f \mid f : E^n_k \to 2^{E_k}\}$, $P^{\overline{*}}_k = \bigcup\limits_n P^{\overline{*}}_{k,n}$,

$P^*_{k,n} = \{f \mid f \in P^{\overline{*}}_{k,n}$ и $|f(\tilde{\alpha})| \leq 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in E^n_k\}$, $P^*_k = \bigcup\limits_n P^*_{k,n}$

$P_{k,n} = \{f \mid f \in P^{\overline{*}}_{k,n}$ и $|f(\tilde{\alpha})| = 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in E^n_k\}$, $P_k = \bigcup\limits_n P_{k,n}$

Функции из P_k называют функциями k-значной логики, из P^*_k — частичными функциями, из $P^{\overline{*}}$ — мультифункциями.

Замечание 1. В дальнейшем договоримся не различать одноэлементные множества и элементы этого множества и, кроме того, для пустого множества будем использовать обозначение $*$, а для множества E_k будем использовать обозначение $-$.

Для того, чтобы суперпозиция

$$f(f_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_m))$$

с внешней мультифункцией $f(x_1, ..., x_n)$ и внутренними мультифункциями $f_1(x_1, ..., x_m), ..., f_n(x_1, ..., x_m)$ определяла некоторую мультифункцию $g(x_1, ..., x_m)$, необходимо определить значение мультифункции на наборах из подмножеств множества E_k.

Будем рассматривать два варианта (совпадающие в случае функций k-значной логики). Если $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in E^n_k$, то, соответственно,

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n); \tag{1}$$

$$g(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), \text{если это} \\ \qquad \text{пересечение не равно } \varnothing; \\ \bigcup\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)} f(\beta_1, \ldots, \beta_n), \text{ иначе.} \end{cases} \tag{2}$$

Замечание 2. Определения (1) и (2), приведенные выше, фактически задают два разных вложения множества $P^{\overline{*}}_k$ в множество $P_{2^{E_k}}$.

Пример 1. Рассмотрим мультифункцию $f(x, y)$, определенную на множестве E_2 и заданную таблицей:

x	0	0	1	1
y	0	1	0	1
f	$*$	1	0	$-$

Этой мультифункции соответствует две (в соответствии с определениями суперпозиции) функции 4-значной логики — f_1 и f_2:

x	0	0	1	1	$*$	$*$	$*$	$*$	0	1	$-$	0	1	$-$	$-$	$-$
y	0	1	0	1	0	1	$-$	$*$	$*$	$*$	$*$	$-$	$-$	0	1	$-$
f_1	$*$	1	0	$-$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	1	$-$	0	$-$	$-$
f_2	$*$	1	0	$-$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	1	0	0	1	$-$

Замечание 3. Суперпозиция мультифункций на E_k не совпадает с суперпозицией соответствующих им функций на множестве 2^{E_k}.

Пример 2. Рассмотрим 3 функции на множестве из 4 элементов, соответствующие мультифункциям на множестве E_2.

x	0	0	1	1	$*$	$*$	$*$	$*$	0	1	$-$	0	1	$-$	$-$	$-$
y	0	1	0	1	0	1	$-$	$*$	$*$	$*$	$*$	$-$	$-$	0	1	$-$
f	1	1	1	0	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	1	$-$	1	$-$	$-$
f_1	1	$-$	$-$	0	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
f_2	1	0	0	$-$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

Пусть $g(x, y) = f(f_1(x, y), f_2(x, y))$. Тогда значение $g(x, y)$, рассматриваемой как функция на множестве из 4-х элементов, на наборе $(-, 1)$ равно $f(f_1(-, 1), f_2(-, 1)) = f(-, -) = -$. Но, в соответствии с определением (1) суперпозиции получаем

$$g(-, 1) = g(0, 1) \cup g(1, 1) = f(f_1(0, 1), f_2(0, 1)) \cup f(f_1(1, 1), f_2(1, 1)) = \\ f(-, 0) \cup f(0, -) = f(0, 0) \cup f(1, 0) \cup f(0, 1) = 1.$$

и, соответственно, для суперпозиции (2)

$$g(-, 1) = g(0, 1) \cap g(1, 1) = f(f_1(0, 1), f_2(0, 1)) \cap f(f_1(1, 1), f_2(1, 1)) = \\ f(-, 0) \cap f(0, -) = f(0, 0) \cap f(1, 0) \cap f(0, 1) = 1.$$

Замечание 4. Значение на наборах элементов множества E_k суперпозиции мультифункций совпадает со значением на наборах из одноэлементных подмножеств множества E_k соответствующих функций на множестве 2^{E_k}.

Функции $f : (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \to \{\alpha_i\}$ называются селекторными.

Определение 1. *Клон — множество функций k-значной логики, замкнутое относительно суперпозиции и содержащее все селекторные функции.*

Определение 2. *Мультиклон — множество мультифункций, замкнутое относительно суперпозиции (1) и содержащее все селекторные функции.*

Определение 3. *Частичный ультраклон — множество мультифункций, замкнутое относительно суперпозиции (2) и содержащее все селекторные функции.*

Несложно заметить, что P_k — клон, $P_k^{\overline{*}}$ — мультиклон и частичный ультраклон.

В дальнейшем клоны, мультиклоны и частичные ультраклоны, в случаях не вызывающих недоразумений, будем называть клонами.

Пусть K — клон и K_1 — его подклон, K_1 называется максимальным подклоном в K тогда и только тогда, когда $[K_1 \cup \{f\}] = K$ для любой $f \in K \setminus K_1$. Если K совпадает с P_k или $P_k^{\overline{*}}$, то соответствующий клон будем называть просто максимальным.

Справедливы следующие утверждения о максимальных клонах.

Теорема 1. [Критерий Слупецкого] *Если множество M — множество функций k-значной логики ($k > 2$) содержит все одноместные функции и существенную функцию, принимающую все k значений, то единственным клоном, содержащим M является клон P_k* [5].

Пусть $*$ — множество всех мультифункций, принимающих только одно значение — $*$.

Теорема 2. [6] *Единственными мультиклонами, содержащими P_k, являются только $P_k \cup *$ и $P_k^{\overline{*}}$.*

Это утверждение остается справедливым, если множества P_k, $P_k \cup *$ и $P_k^{\overline{*}}$ рассматривать как частичные ультраклоны. Идеи доказательства можно посмотреть в [3]

Пусть m-местный предикат R^m на множестве 2^{E_k} имеет вид

$$R^m = \{\,(\alpha_{11}, ..., \alpha_{1m}), (\alpha_{21}, ..., \alpha_{2m}), ..., (\alpha_{p1}, ..., \alpha_{pm})\,\}.$$

Будем говорить, что функция $f(x_1, ..., x_n)$ *сохраняет* R^m, если для любых n наборов $(\beta_{11}, ..., \beta_{1m})...(\beta_{n1}, ..., \beta_{nm})$ из предиката набор

$$(f(\beta_{11}, ..., \beta_{n1}), ..., f(\beta_{1m}, ..., \beta_{nm}))$$

принадлежит предикату.

Обозначим через $Pol(R^m)$ множество мультифункций, сохраняющих предикат R^m.

Можно заметить, что множество функций k-значной логики, сохраняющих некоторый предикат, замкнуто относительно суперпозиции, а множество мультифункций, сохраняющих некоторый предикат, не обязательно замкнуто относительно суперпозиции (задаваемой формулой (1) или (2)).

Пример 3. Рассмотрим мультифункции $g(x, y) = (0110)$ и $g(x) = (01)$, заданные на множестве $\{0, 1\}$. Несложно проверить, что они сохраняют предикат $R^2 = \{(0-)\}$. Но функция $h(x) = g(f(x), f(x))$ этот предикат уже не сохраняет.

Но для мультифункций справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть задан m-местный предикат R^m на множестве 2^{E_k}. Пусть наборы $(\alpha_{11}, ..., \alpha_{m1})$,...,$(\alpha_{1n}, ..., \alpha_{mn})$ принадлежат предикату и содержат только одноэлементные подмножества. Пусть мультифункция $g(x_1, ...x_n)$ является суперпозицией $f(f_1, ..., f_s)$ мультифункций f, f_1,...,f_s, сохраняющих предикат R^m. Тогда набор*

$$(g(\alpha_{11}, ..., \alpha_{m1}), ..., g(\alpha_{1n}, ..., \alpha_{mn}))$$

принадлежит предикату.

2. Основной результат

Определим m-местный предикат R^m на множестве 2^{E_k} следующим образом:

$$R_m = \{(a_1, ..., a_m) \mid \forall i(a_i \neq *) \to \forall i \forall j(i \neq j \to a_i \neq a_j \& |a_i| = 1)\}$$

Справедлива

Теорема 3. *1) $Pol(R_m)$ — частичный ультраклон;*

2) $Pol(R_1) = P_k^*$;

3) При $1 < n < k + 1$ выполняется $PolR_n \subset PolR_{n+1}$, а при $n > k$ выполняется $PolR_n = P_k^{\overline{*}}$;

4) $PolR_k$ — максимальный частичный ультраклон.

Доказательство. 1) Если некоторый набор содержит $*$, то функция возвращает набор, содержащий $*$. Все остальные наборы являются наборами одноэлементных множеств и справедливость утверждения следует из леммы.

2) $Pol(R_1)$ — множество функций, которые на любом наборе одноэлементных множеств возвращают $*$ или одноэлементное подмножество. А по определению это множество P_k^*.

3) Заметим, что в соответствии с определением предиката, любой набор длины большей k обязательно должен содержать $*$. А тогда любая функция будет возвращать набор, содержащий $*$. Оставшаяся часть утверждения доказывается несложным образом.

4) Для доказательства этого утверждения, заметим что множество $Pol(R_k)$ содержит а) одноместные функции, принимающие все k значений, б) одноместные функции, возвращающие не менее одной $*$, в) функции вида

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \psi(x,y), \text{ если } z = 0; \\ *, \text{ иначе}, \end{cases} \tag{3}$$

где $\psi(x,y)$ — произвольная двухместная функция.

Пусть функция $g(x_1,...,x_n)$ принадлежит множеству $P_k^{\overline{*}} \setminus Pol(R_k)$. Тогда выполняется

$$\begin{pmatrix} f(\alpha_{11} & \dots & \alpha_{1,n}) \\ & \vdots & \\ f(\alpha_{k1} & \dots & \alpha_{k,n}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix} \notin R_k,$$

но при этом все наборы $(\alpha_{1i},...,\alpha_{ki}), 1 \le i \le n$ принадлежат R_k. Рассматривая наборы $(\alpha_{1i},...,\alpha_{ki})$ как одноместные функции, получим одноместную функцию $\psi(x) = (\beta_1,...,\beta_k)$ и при этом среди β_j $(1 \le j \le k)$ во-первых, нет $*$, во-вторых, встречаются два одноэлементных подмножества, или неодноэлементное подмножество.

Рассмотрим случай, когда среди β_j $(1 \le j \le k)$ встречаются два одинаковых одноэлементных подмножества, пусть это $\{\delta\}$. Пусть $\{\gamma\}$ — одноэлементное подмножество, которое не встречается среди β_j $(1 \le j \le k)$. В множестве $Pol(R_k)$ выберем одноместную мультифункцию $\phi(x)$ такую, что $\phi(\gamma) = *$, $\phi(\sigma) = \delta, \sigma \ne \gamma$. Суперпозиция $\phi(\psi(x))$ определяет одноместную функцию-константу δ.

По (3) можно получить любую одноместную функцию и существенную функцию, принимающую k различных значений, а следовательно по теореме 1 и любую функцию из P_k. А дальше можно воспользоваться замечанием б) и теоремой 3.

Случай, когда среди среди β_j $(1 \le j \le k)$ встречается неодноэлементное подмножество рассматривается аналогично.

□

Повторив рассуждения, получим

Теорема 4. *1) Для любого m множество $Pol(R_m)$ является мультиклоном;*

2) $PolR_k$ — максимальный мультиклон в $P_k^{\overline{*}}$.

Теорема 5. *Пусть предикат R_2 определяется следующим образом:*

$$\forall i(x_i \neq \varnothing) \to x_1 = 0 \& x_2 = k-1.$$

Тогда $PolR_2$ является максимальным частичным ультраклоном и максимальным мультиклоном.

Доказательство. Пусть функция $f(x_1, ..., x_n) \in P_k^{\overline{*}} \backslash PolR_2$. Отождествлением переменных из f можно получить одноместную функцию $g(x)$ такую, что $g(0) = A \neq 0$ или $g(k-1) = A \neq k-1$. Рассмотрим первый случай, второй случай рассматривается аналогично. Очевидно, что функция $h(x, y)$ такая, что $h(k-1, k-1) = k-1$, а при остальных значениях переменных она равна 0, принадлежит множеству $Pol(R_2)$. Суперпозиция $h(g(x), x)$ порождает константу 0. А теперь воспользуемся тем, что функция

$$u(x, y, z) = \begin{cases} v(x, y), & \text{если } z = 0; \\ *, & \text{иначе} \end{cases}$$

принадлежит множеству $Pol(R_2)$. □

Список литературы

1. Пантелеев В. И. Критерий полноты для доопределяемых булевых функций / В. И. Пантелеев // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонаучн. сер. – 2009. – № 2 (68). – С. 60–79.
2. Пантелеев В. И. Критерий полноты для недоопределенных частичных булевых функций / В. И. Пантелеев // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. – 2009. – Т. 9, вып. 3.– С. 95–114.
3. Пантелеев В. И. Специальные представления недоопределенных частичных булевых функций / В. И. Пантелеев // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. – 2009.– Сер. Физ.-мат. науки. – Т. 151, кн. 2. – С. 114–119.
4. Тарасов В. В. Критерий полноты для не всюду определенных функций алгебры логики / В. В. Тарасов // Проблемы кибернетики. – М.: Наука, 1975. – Вып. 30. – С. 319–325.
5. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику : учеб. пособие для вузов / С. В. Яблонский ; под ред. В. А. Садовничего. – 3-е изд., стер. – М. : Высш. шк., 2001. – 384 с.
6. Doroslovački R. One interval in the lattice of partial hyperclones / R. Doroslovački, J. Pantović, G. Vojvodić // Chechoslovak Mathematical Journal. – 2005. – N 55(130). P. 719–724.

V. I. Panteleyev

The article is about maximum multi and partial ultraclones.

Abstract. Multifunctions on the finite set are regarded. A number of maximum clones of such functions relative to the superposition which is defined of two methods are described.

Пантелеев Владимир Иннокентьевич, доктор физико-математических наук, Восточно-Сибирская государственная академия образования, 664011, Иркутск, ул. Н. Набережная, 6, тел.: (3952) 240435 (v_panteleyev@mail.ru)

Panteleyev Vladimir, East Siberian State Education Academy, 6, N. Naberezhnaya St., Irkutsk, 664011, (v_panteleyev@mail.ru)