Серия «Математика»
2012. Т. 5, № 4. С. 66—78

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 512.562

Неаксиоматизируемость класса критических решеток

О. Е. Перминова
Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Аннотация. Рассматриваются критические решетки, т. е. решетки без нетривиальных эндоморфизмов, не имеющие нетривиальных собственных подрешеток без нетривиальных эндоморфизмов. Доказано, что класс критических решеток неаксиоматизируем.

Ключевые слова: решетка; эндоморфизм; жесткая решетка; критическая решетка; аксиоматизируемость.

Введение

Решетка называется *жесткой*, если любой её эндоморфизм является постоянным эндоморфизмом (т. е. преобразует все элементы в какой-либо один элемент) или тождественным эндоморфизмом. *Критической* назовем жесткую решетку, у которой нет собственных жестких подрешеток, исключая тривиальных — одно- и двухэлементных подрешеток.

Одним из основных вопросов при изучении класса алгебраических систем является вопрос об его элементарной характеризации, а именно, аксиоматизируем ли этот класс на языке первого порядка. В статье дается отрицательный ответ на данный вопрос для класса критических решеток. Отметим, что класс жестких решеток, подклассом которого является класс критических решеток, неаксиоматизируем [1]. Учитывая экспоненциальный рост числа жестких решеток [2], можно говорить о сложности описания как класса жестких, так и класса критических решеток.

Известно [3], что алгебраическая система элементарно эквивалентна своей ультрастепени по любому ультрафильтру. Поэтому для доказательства арифметической незамкнутости класса K критических решеток достаточно показать, что для бесконечной решетки L из K существует некритическая решетка $\overline{L^*}$, являющаяся ее ультрастепенью по некоторому ультрафильтру.

В первом разделе работы приведены описание решетки L и доказательство ее критичности. Во втором разделе даются понятия фильтра (главного и неглавного), ультрафильтра, ультрапроизведения и ультрастепени алгебраической системы по ультрафильтру. В третьем разделе приведено доказательство того, что существует ультрастепень решетки L, не являющаяся жесткой, и, следовательно, некритической решеткой. Отсюда следует

Теорема. *Класс всех критических решеток неаксиоматизируем.*

1. Конструкция счетной критической решетки

Для решеток будем придерживаться системы понятий и обозначений, принятых в книге [4]. В частности, нам потребуются отношение $\sim$, транзитивное замыкание $\approx$ отношения $\sim$ (см. с. 174 из [4]). Интервалы, связанные отношением $\approx$, называются *проективными.* Кроме того, будем использовать определения простой решетки и склеивающего эндоморфизма. *Простой* называется решетка, обладающая только тривиальными конгруэнциями [5]. Произвольная решетка R является простой тогда и только тогда, когда R обладает только тривиальными гомоморфизмами (т. е. образы R при гомоморфизме либо изоморфны R, либо одноэлементны). *Склеивающим эндоморфизмом* решетки R [2] будем называть любой ее эндоморфизм φ такой, что $\varphi x = \varphi y$ для некоторых различных элементов $x, y \in R$.

На множестве $L = \{a_i, b_i, c_i \,|i \in Z\} \cup \{d\}$ определим частичный порядок $\leq$, который имеет следующее отношение покрытия:

$$a_i \prec a_{i+1},\, b_i \prec b_{i+1},\, a_i \prec c_i,\, c_i \prec b_{i+1}\, (i \in Z),\, a_i \prec b_i\, (i \in Z \backslash 0),\, a_0 \prec d, d \prec b_0.$$

Диаграмму частично упорядоченного множества L см. на рис. 1.

Легко проверить, что множество L относительно определенного таким образом частичного порядка является решеткой.

Далее нам потребуется следующая лемма, справедливость которой следует из теоремы 10.2 монографии [5],

Лемма 1. *Если любые два интервала решетки проективны, то решетка является простой.*

Рассмотрим теперь решетку L, изображенную на рис. 1.

Лемма 2. *Решетка L не имеет склеивающих эндоморфизмов, отличных от постоянных.*

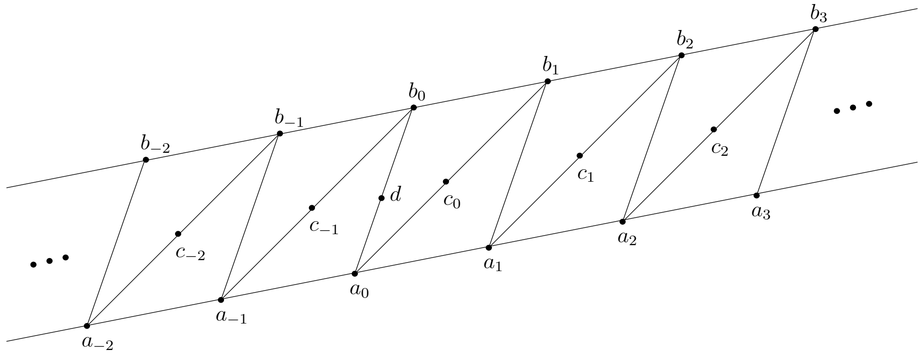

Рис. 1. Решетка L

Доказательство. Покажем, что все простые интервалы решетки L проективны. При этом интервал $[a, b]$ называется *простым*, если $a \prec b$. Поскольку бриллиант является простой решеткой, достаточно проверить, что $[a_0, d] \approx [d, b_0]$. Указанное отношение следует из цепочки

$$[a_0, d] \sim [a_1, b_1] \sim [a_{-1}, b_{-1}] \sim [d, b_0] \,.$$

На основании леммы 1 решетка L является простой, и поэтому любой её склеивающий эндоморфизм является постоянным. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Решетка L не имеет автоморфизмов, отличных от тождественного.*

Доказательство. Пусть φ - нетождественный автоморфизм решетки L и $\varphi a_0 \neq a_0$. Поскольку a_0 покрываем тремя элементами d, c_0, a_1, элемент a_0 отображается в элемент, имеющий три покрытия. Следовательно, $\varphi a_0 = a_i$ ($i \in \mathrm{Z}$). Предположим сначала, что $\varphi a_0 = a_i$, где $i \neq 0$. По свойству покрываемости $\varphi \{d, c_0, a_1\} \subseteq \{b_i, c_i, a_{i+1}\}$. Очевидно, из $d \vee a_1 = b_1$ следует $\varphi b_1 = b_{i+1}$. Тогда четырехэлементная цепь $\{a_0, d, b_0, b_1\}$ отображается в трех элементную цепь, что противоречит инъективности φ. Следовательно, наше предположение неверно и $\varphi a_0 = a_0$. Отсюда вытекает, что $\varphi \{d, c_0, a_1\} \subseteq \{d, c_0, a_1\}$. Элементы d, c_0 покрываемы одним элементом, a_1 - тремя. Поэтому $\varphi a_1 = a_1$. Отсюда следует, что цепь $\{a_0, d, b_0, b_1\}$ отображается в себя. Поэтому на элементах этой цепи φ действует тождественно. Следовательно, $\varphi c_0 = c_0$ и $\varphi d = d$. Таким образом, автоморфизм φ действует, как тождественный на элементах интервала $[a_0, b_1]$.

Двойной индукцией по множествам N и $\mathrm{Z} \backslash \mathrm{N}$ нетрудно показать, что φ действует тождественно на каждом бриллианте $\{a_j, b_j, c_j, a_{j+1}, b_{j+1}\}$ ($j \in \mathrm{Z}$) решетки L. Следовательно, решетка L обладает только тождественным автоморфизмом. Лемма доказана. □

Из лемм 2 и 3 вытекает, что решетка L является жесткой.

Для доказательства того, что жесткая решетка L является критической, нам потребуется следующая

Лемма 4 ([1, лемма 2]). *Если решетку L можно разбить в объединение двух подрешеток L_1 и L_2 так, что хотя бы одна из них неодноэлементна, и для любых $x \in L_1$, $y \in L_2$, либо x меньше y, либо x и y несравнимы, то L обладает нетривиальным эндоморфизмом, т. е. не является жесткой.*

Также нам потребуется решетка $\hat{L}$ (см. рис. 2), описание которой дано в работе [2]. На рис. 2 через P и Q обозначены частично упорядоченные множества $\{x \in \hat{L} \mid x < b_0 \text{ и } x \notin \{a_0, d_1, ..., d_m\}\}$ и $\{y \in \hat{L} \mid y > a_n \text{ и } y \notin \{f_1, ..., f_k, b_n\}\}$, соответственно.

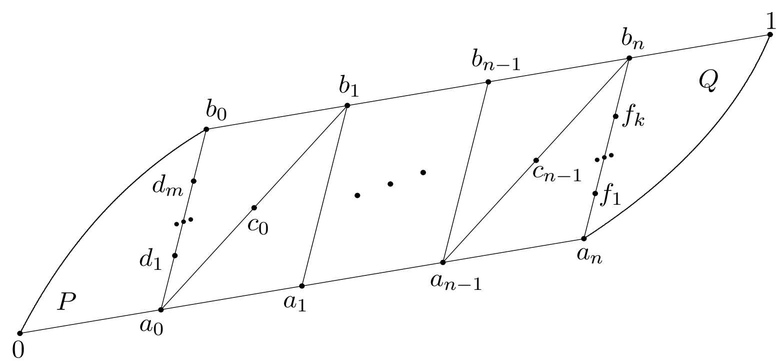

Рис. 2. Решетка $\hat{L}$

Лемма 5 ([2, лемма 6]). *Для решетки $\hat{L}$ справедливы следующие утверждения:*

(i) *при $n \geq 3$ является нежесткой любая более чем двухэлементная подрешетка решетки $\hat{L}$, не содержащая собственное подмножество элементов "$(n-2)$-бриллиантной" решетки $B_{n-2} = \{a_i,\ b_i,\ c_j \mid 1 \leq i \leq n-1, \quad 1 \leq j \leq n-2\}$;*

(ii) *при $n \geq 2$ являются нежесткими: подрешетка $\hat{L}' = \hat{L} \backslash P$; подрешетка $\hat{L}'' = \hat{L} \backslash Q$; любая собственная подрешетка решетки $\hat{L}'$ или $\hat{L}''$, содержащая хотя бы один бриллиант из множества бриллиантов $C_i = \{a_i,\ b_i,\ c_i,\ a_{i+1},\ b_{i+1}\}$ при $(1 \leq i \leq n-1)$ или $(0 \leq i \leq n-2)$, соответственно.*

Замечание 1. Как следует из доказательства леммы 5, приведенного в работе [2], она справедлива также в случае, когда хотя бы одно из частично упорядоченных множеств P и Q бесконечно.

В доказательстве следующей леммы через $B_{n,q}$ будем обозначать «n-бриллиантную» решетку, определенную на множестве

$$B_{n,q} = \{a_i, b_i, c_j | q \leq i \leq q+n, q \leq j \leq q+n-1, i, j, q \in Z, n \in N\}$$

следующим отношением покрытия $a_i \prec a_{i+1}$, $b_i \prec b_{i+1}$, $a_i \prec b_i$, $a_i \prec c_i \prec b_{i+1}$ $(q \leq i \leq q+n-1)$, $a_{q+n} \prec b_{q+n}$.

Лемма 6. *Решетка L не содержит жестких подрешеток, кроме одно- и двухэлеметных подрешеток.*

Доказательство. Доказательство основано на лемме 5 и замечании 1 к ней.

Обозначим через S произвольную подрешетку решетки L.

Разобьем доказательство на рассмотрение двух случаев $d \in S$ и $d \notin S$.

(1) $d \notin S$.

Пусть все элементы множества $\{a_k, b_k, c_k | k \in \mathrm{Z}\}$ принадлежат S. В этом случае подрешетка S является нежесткой, так как S имеет инъективный эндоморфизм φ такой, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} a_{k+1}, & x = a_k, \\ b_{k+1}, & x = b_k, \\ c_{k+1}, & x = c_k, \quad \text{где } k \in \mathrm{Z}. \end{cases}$$

Пусть теперь хотя бы один элемент из множества элементов $\{a_k, b_k, c_k |\ k \in \mathrm{Z}\}$ не принадлежит подрешетке S и $|S| \geq 3$. Тогда найдется "n-бриллиантная" решетка $B_{n,q}$ такая, что подрешетка S не содержит собственное подмножество элементов решетки $B_{n,q}$. Поэтому на основании утверждения (i) леммы 5 подрешетка S является нежесткой.

(2) $d \in S$. Рассмотрим возникающие здесь подслучаи.

Пусть подрешетка S $(|S| \geq 3)$ не содержит собственное подмножество множества элементов $M_1 = \{a_k, b_k, c_k | k \geq 1\}$ или собственное подмножество множества элементов $M_{-1} = \{a_l, b_l, c_l | l \leq -1\}$. Тогда найдется "$n$-бриллиантная" решетка $B_{n,q}$ $(q \geq 1)$ или $B_{n,r}$ $(r \leq -1)$ соответственно такая, что подрешетка S не содержит собственное подмножество элементов решетки $B_{n,q}$ или $B_{n,r}$, соответственно. Следовательно, на основании утверждения (i) леммы 5 подрешетка S является нежесткой.

Рассмотрим оставшиеся случаи.

1. Подрешетка S не содержит ни одного элемента из множества M_1 и содержит все элементы множества M_{-1}.

2. Подрешетка S не содержит ни одного элемента из множества M_{-1} и содержит все элементы множества M_1.

3. Подрешетка S содержит все элементы множеств M_1 и M_{-1}.

4. Подрешетка S не содержит ни одного элемента из множеств M_1 и M_{-1}.

Рассмотрим случай 1. Из $d \vee c_0 = b_1 \notin S$ следует, что $c_0 \notin S$. Поскольку подрешетка S содержит все бриллианты из множества бриллиантов $C_i = \{a_{i-1}, b_{i-1}, c_{i-1}, a_i, b_i\}$ при $i \leq -1$, на основании утверждения (ii) леммы 5 подрешетка S является нежесткой.

Заметим, что решетка L является самодвойственной. Рассуждениями, двойственными проведенным в случае 1, нетрудно показать, что и в случае 2 подрешетка S является нежесткой.

Рассмотрим теперь случай 3. Из $d \vee b_{-1} = b_0$ и $d \wedge a_1 = a_0$ следует, что $b_0, a_0 \in S$. Если $c_{-1} \notin S$, то S имеет две подрешетки $S_1 = \{x | x \leq b_{-1}\}$ и $S_2 \subseteq \{y | y \geq a_0\}$, удовлетворяющие условиям леммы 4. Следовательно, S обладает нетривиальным эндоморфизмом φ таким, что $\varphi S_1 = \{x\} \subseteq S_1$ и $\varphi S_2 = \{y\} \subseteq S_2$ для некоторых x и y. Случай $c_0 \notin S$ рассматривается аналогично. Если $c_{-1}, c_0 \in S$, то $S = L$.

Рассмотрим случай 4. Из $d \wedge c_{-1} = a_{-1} \notin S$ и $d \vee c_0 = b_1 \notin S$ следует, что $c_{-1}, c_0 \notin S$. Тогда подрешетка S является либо одноэлементной, либо двухэлементной решеткой, либо трехэлементной цепью $\{a_0, d, b_0\}$. Трехэлементная цепь, очевидно, не является жесткой решеткой. Лемма доказана. □

Из жесткости решетки L и из леммы 6 следует

Лемма 7. *Решетка L является критической.*

2. Доказательство арифметической незамкнутости класса критических решеток

Напомним необходимые для дальнейшего понятия, описание которых см. в [3].

Фильтром над непустым множеством J называется любая непустая совокупность D подмножеств множества J, удовлетворяющая следующим требованиям.

1. Пересечение любых двух подмножеств из D принадлежит D.
2. Все надмножества любого подмножества, принадлежащего D, принадлежат D.
3. Пустое подмножество $\emptyset$ не принадлежит D.

Из условий 1, 2 непосредственно вытекает, что пересечение любого конечного числа множеств, принадлежащий фильтру, принадлежит этому же фильтру и что базисное множество J принадлежит каждому фильтру над J. Совокупность всех надмножеств какого-либо фиксированного непустого множества $M \subseteq J$, очевидно удовлетворяет требованиям 1, 2, 3 и поэтому является фильтром. Фильтры этого вида называются *главными.* Остальные фильтры называются *неглавными.* Ясно, что фильтр D тогда и только тогда является главным, когда D содержит пересечение всех своих множеств. Семейство всех фильтров над J частично упорядочено относительно включения. Максимальные фильтры, т. е. фильтры, не содержащиеся ни в каком другом фильтре, называются *ультрафильтрами.* С помощью леммы Цорна легко доказывается, что над каждым бесконечным множеством существуют неглавные ультрафильтры. Легко понять, что любое множество, входящее в неглавный ультрафильтр, бесконечно. Фильтр D над множеством J тогда и только тогда является ультрафильтром, когда для любого $M \subseteq J$ либо $M \in D$, либо $J \setminus M \in D$ ([3]).

Пусть каждому элементу α множества J поставлена в соответствие некоторая алгебраическая система $\mathsf{a}_\alpha = \langle A_\alpha, \sigma \rangle$ фиксированной сигнатуры σ. Элементами декартова произведения $\Phi = \Pi A_\alpha$ $(\alpha \in J)$ носителей A_α указанных систем являются функции f, определенные на J, которые удовлетворяют условию $f(\alpha) \in A_\alpha$. Наряду с $f(\alpha)$ будем писать f^α.

Пусть D — какой-нибудь фильтр над J. Вводим на Φ бинарное отношение $\equiv_D$, полагая по определению

$$f \equiv_D g \Leftrightarrow \{\alpha \in J | f^\alpha = g^\alpha\} \in D. \tag{2.1}$$

В [3] доказано, что $\equiv_D$ есть отношение эквивалентности на Φ, и мы можем образовать фактор-множество $A = \Phi/_{\equiv_D}$, которое называется *фильтрованным по D произведением множеств A_α*. Символом fD обозначается класс элементов из Φ, эквивалентных f по $\equiv_D$.

На множестве A можно определить алгебраическую систему сигнатуры σ. Пусть R — какой-то m-арный предикатный символ из σ. По определению полагаем

$$R(f_1 D, \dots, f_m D) = \text{И} \Leftrightarrow \{\alpha | R(f_1^\alpha, \dots, f_m^\alpha) = \text{И}\} \in D. \tag{2.2}$$

В [3] доказано, что истинностное значение предиката $R(f_1 D, \dots, f_m D)$ не зависит от выбора представителей $f_1, \dots, f_m$ в классах $f_1 D, \dots, f_m D$.

Если F есть n-арный функциональный символ из σ, то в соответствии с условием 2.1 полагаем

$$F(f_1 D, \dots, f_n D) = fD \Leftrightarrow \{\alpha | F(f_1^\alpha, \dots, f_n^\alpha) = f^\alpha\} \in D. \tag{2.3}$$

Как и в случае предикатного символа R, можно проверить, что соотношение 2.3 задает на A всюду определенную функцию F.

Определения 2.2 и 2.3 превращают фильтрованное произведение $A = \prod A_\alpha / D$ в алгебраическую систему $\langle A, \sigma \rangle$, называемую *фильтрованным по фильтру D произведением систем $\mathsf{a}_\alpha (\alpha \in D)$* и обозначаемую $\prod \mathsf{a}_\alpha / D$.

Произведения систем, фильтрованные по ультрафильтру, называются *ультрапроизведениями.* Если все сомножители a_α в ультрапроизведении совпадают с фиксированной системой Σ, то ультрапроизведение называется *ультрастепенью* системы Σ по ультрафильтру D.

Возьмем произвольную ультрастепень $\overline{L^*}$ решетки L по неглавному ультрафильтру над Z. Покажем, что ее можно разбить в объединение двух, удовлетворяющих требованиям леммы 4, подрешеток. Отсюда $\overline{L^*}$ — нежесткая, и, следовательно, некритическая решетка.

Далее нам потребуется следующее

Замечание 2. Пусть D - неглавный ультрафильтр над множеством J. Тогда для любого натурального $n > 1$, любого $M \in D$ и любого разбиения $M = \bigcup_{i=1}^n M_i$ существует единственное i, для которого $M_i \in D$.

Доказательство. Пусть $n = 2$. Разобьем M на два произвольных непустых множества M_1 и M_2. Это возможно, ибо D - неглавный фильтр и, стало быть, M - бесконечно. Допустив, что $M_1, M_2 \notin D$, и воспользовавшись тем, что D - ультрафильтр, получим $J \setminus M_1, J \setminus M_2 \in D$, откуда $J \setminus M \in D$, что противоречиво. Отметим, что M_1, M_2 не могут принадлежать D одновременно, иначе $M_1 \cap M_2 = \varnothing \in D$, что противоречиво. Отсюда, либо $M_1 \in D$, либо $M_2 \in D$. Сославшись на очевидную индукцию, можно утверждать справедливость замечания для любого натурального n. □

Обозначим через Ω множество всех элементов решетки L.

Лемма 8. *Любая ультрастепень $\overline{L^*}$ решетки L по неглавному ультрафильтру над Z разбивается на три неодноэлементные подрешетки $\overline{L}, \overline{L_1}$ и $\overline{L_2}$ такие, что*

$\overline{L} = \{fD \in \overline{L^*} | f = f_s, s \in \Omega\}$, *где f_s – функция из Z в $\Omega : f_s(z) = s$ для любого $z \in$ Z,*

$\overline{L_1} = \{aD \in \overline{L^*} \backslash \overline{L}|$ *существует $x \in \Omega$ такое,что* $\{z | a^z < x\} \in D\}$,

$\overline{L_2} = \{vD \in \overline{L^*} \backslash \overline{L}|$ *существует $y \in \Omega$ такое,что* $\{z | v^z > y\} \in D\}$,

причем для любых элементов $aD \in \overline{L_1}$, $fD \in \overline{L}$, $vD \in \overline{L}_2$ выполняются следующие условия:

1) элемент aD меньше элемента fD или несравним с ним;

2) элемент aD меньше элемента vD или несравним с ним;

3) элемент fD меньше элемента vD или несравним с ним.

Доказательство. Покажем сначала, что решетка $\overline{L^*}$ не имеет элементов, отличных от элементов множеств $\overline{L}$, $\overline{L_1}$ и $\overline{L_2}$.

Возьмем произвольный элемент uD решетки $\overline{L^*}$, где u - функция из Z в Ω. Если $uD \in \overline{L}$, то по определению $\overline{L}$ существует s такое, что $\{z \,| u^z = s\} \in D$. Пусть теперь $uD \notin \overline{L}$. Будем говорить, что множество всех значений u^z функции *u ограничено снизу*, если существует элемент $x \in \Omega$ такой, что для любого $z \in \mathrm{Z}$ выполняется $u^z \leq x$. Соответственно, множество всех значений u^z функции u *ограничено сверху*, если существует элемент $y \in \Omega$ такой, что для любого $z \in \mathrm{Z}$ выполняется $u^z \geq y$. Из конструкции решетки L ясно, что множество всех значений u^z функции u можно представить в виде объединения двух множеств таких, что все элементы первого множества ограничены снизу, а все элементы второго множества ограничены сверху. Иными словами, существуют $x, y \in \Omega$ такие, что для любого $z \in \mathrm{Z}$ выполняется $u^z \leq x$ или $u^z \geq y$. В самом деле, на роль x претендует b_i, на роль y претендует a_i для некоторого $i \in \mathrm{Z}$. В общем случае, одно из множеств может быть пусто. Также данные множества могут иметь непустое пересечение. Нетрудно понять, что множество аргументов $M = \mathrm{Z}$ функции u, принадлежащее D, можно представить в виде $M = \bigcup\limits_{i=1}^{3} M_i$, где $M_1 = \{z \in M \,|y \leq u^z \leq x\}$, $M_2 = \{z \in M \backslash M_1 \,|u^z < x\}$, $M_3 = \{z \in M \backslash M_1 \,|u^z > y\}$. Тогда M_1, M_2, M_3 - разбиение множества M. Отметим, что пустое множество не принадлежит D по определению фильтра. Тогда, согласно замечанию 2, возможен один из следующих случаев:

1) $M_1 \neq \emptyset$, $M_1 \in D$, $M_2, M_3 \notin D$,
2) $M_2 \neq \emptyset$, $M_2 \in D$, $M_1, M_3 \notin D$,
3) $M_3 \neq \emptyset$, $M_3 \in D$, $M_1, M_2 \notin D$.

Пусть имеет место первое. Приведем это предположение к противоречию. Из конструкции решетки L видно, что множество $u\,(M_1)$ конечно. Следовательно, существует $n \in \mathrm{N}$ такое, что $u\,(M_1) = \{j_1, ..., j_n\}$. Обозначим $M_{j_q} = \{z \in M_1 \,|u^z = j_q\}$, $1 \leq q \leq n$. Тогда $M_{j_1}, ..., M_{j_n}$- разбиение множества M_1. Согласно замечанию 2 можно предположить, что $M_{j_1} \in D$. Но тогда $\{z \,|u^z = j_1\} = T \supseteq M_{j_1} \in D$ и поскольку D - фильтр, $T \in D$. Отсюда $uD \in \overline{L}$ по определению множества $\overline{L}$, что противоречиво.

Таким образом, реализуется либо второй, либо третий случай.

Во втором случае множество $\{z|u^z < x\} = T \supseteq M_2 \in D$ и поскольку D - фильтр, $T \in D$. Отсюда элемент uD принадлежит $\overline{L}_1$ по определению данного множества.

Третий случай рассматривается аналогично второму случаю.

Итак, $\overline{L}$, $\overline{L_1}$, $\overline{L_2}$ — разбиение решетки $\overline{L^*}$.

Покажем теперь, что для любых элементов $aD \in \overline{L_1}$, $fD \in \overline{L}$, $vD \in \overline{L_2}$ выполняются следующие условия:

1) элемент aD меньше элемента fD или несравним с ним,
2) элемент aD меньше элемента vD или несравним с ним,
3) элемент fD меньше элемента vD или несравним с ним.

Покажем сначала, что выполняется первое условие. Предположим противное. Пусть существуют $aD \in \overline{L_1}$ и $f_sD \in \overline{L}$ такие, что $aD \geq f_sD$, или, иначе, $\{z\,|a^z \geq f_s^z\} \in D$. По определению $\overline{L_1}$ и $\overline{L}$ соответственно

$$aD \in \overline{L_1} \Leftrightarrow aD \in \overline{L^*} \backslash \overline{L} \text{ и существует } x \in \Omega \text{ такое, что } \{z|a^z < x\} \in D,$$
$$f_sD \in \overline{L} \Leftrightarrow \text{существует } s \in \Omega \text{ такое, что } \{z|f_s^z = s\} \in D.$$

Тогда

$$\{z|s \leq a^z < x\} = M \supseteq (\{z|a^z \geq f_s^z\} \cap \{z|a^z < x\} \cap \{z|f_s^z = s\}) \in D$$

и поскольку D - фильтр, $M \in D$. Как было показано ранее, поскольку множество $a\,(M)$ конечно, элемент aD принадлежит $\overline{L}$, что противоречиво.

Третье условие доказывается аналогично первому условию.

Покажем теперь, что выполняется второе условие. Предположим противное. Пусть существуют $aD \in \overline{L_1}$ и $vD \in \overline{L_2}$ такие, что $aD \geq vD$, или, иначе, $\{z\,|a^z \geq v^z\} \in D$. По определению $\overline{L_1}$ и $\overline{L_2}$ соответственно

$$aD \in \overline{L_1} \Leftrightarrow aD \in \overline{L^*} \backslash \overline{L} \text{ и существует } x \in \Omega \text{ такое, что } \{z|a^z < x\} \in D,$$
$$vD \in \overline{L_2} \Leftrightarrow vD \in \overline{L^*} \backslash \overline{L} \text{ и существует } y \in \Omega \text{ такое, что } \{z|v^z > y\} \in D.$$

Тогда

$$\{z\,|y < a^z < x\} = M \supseteq (\{z\,|a^z \geq v^z\} \cap \{z\,|a^z < x\} \cap \{z\,|v^z > y\}) \in D$$

и поскольку D — фильтр, $M \in D$. Как было показано ранее, поскольку множество $a\,(M)$ конечно, элемент aD принадлежит $\overline{L}$, что противоречиво.

Покажем теперь, что $\overline{L}$, $\overline{L_1}$ и $\overline{L_2}$ - подрешетки решетки $\overline{L^*}$.

Пусть $x, y \in L$, $f_xD, f_yD \in \overline{L}$. Покажем, что $f_xD \wedge f_yD$ принадлежит $\overline{L}$. Пусть $f_xD \wedge f_yD = fD$, что равносильно $\left\{z|\, f_x^z \wedge f_y^z = f^z\right\} \in D$. Пусть $s = x \wedge y$ в решетке L. Тогда

$$\{z|f^z = s\} = M \supseteq (\{z|f_x^z \wedge f_y^z = f^z\} \cap \{z|f_x^z = x\} \cap \{z|f_y^z = y\}) \in D$$

и поскольку D — фильтр, $M \in D$. Отсюда по определению множества $\overline{L}$ элемент fD принадлежит $\overline{L}$. Аналогично доказывается, что $f_xD \vee f_yD \in \overline{L}$. Итак, $\overline{L}$ - подрешетка решетки $\overline{L^*}$.

Пусть теперь $aD, bD \in \overline{L_1}$. Здесь сразу отмечаем, что $aD \wedge bD \in \overline{L_1}$, поскольку ни один из элементов $\overline{L}$ и $\overline{L_2}$ не может располагаться ниже aD.

Рассмотрим $aD \vee bD$. Определим функцию $f : \mathrm{Z} \to \Omega$ следующим образом: $f\,(z) = a\,(z) \vee b\,(z)$. Из определения функции f следует $\{z|a^z \vee b^z = f^z\} = \mathrm{Z} \in \mathrm{D}$, что равносильно $aD \vee bD = fD$.

Покажем сначала, что $fD \in \overline{L^*} \backslash \overline{L}$. Допустим противное, $fD \in \overline{L}$. Тогда по определению $\overline{L}$ существует $x \in \Omega$ такое, что $K = \{z|f^z = x\} \in D$.

Предположим, что в K мы отыскали бесконечное подмножество $K_1 \in D$ такое, что множества $a(K_1) = \{a^z | z \in K_1\}$ и $b(K_1) = \{b^z | z \in K_1\}$ конечны. Приведем это предположение к противоречию. Пусть имеет место первое. Тогда существует $n \in \mathrm{N}$ такое, что $a\,(K_1) = \{j_1, ..., j_n\}$. Обозначим $M_q = \{z \in K_1 \,| a^z = j_q\}$, $1 \le q \le n$. Тогда $M_1, ..., M_n$ — разбиение множества K_1. Согласно замечанию 2 можно предположить, что $M_1 \in D$. Но тогда $\{z \,| a^z = j_1\} = T \supseteq M_1 \in D$ и поскольку D - фильтр, $T \in D$. Отсюда $aD \in \overline{L}$ по определению множества $\overline{L}$, что противоречиво. Аналогично рассуждая, приводим к противоречию и второе предположение.

Итак, можно считать, что для любого бесконечного подмножества $K_1 \in D$ из K множества $a(K_1)$ и $b(K_1)$ бесконечны. Рассматривая теперь на K_1 отношение эквивалентности $a^{-1} \circ a$ и выбирая в каждом его классе в точности по одному элементу, получаем бесконечное множество $K_2 \subseteq K_1$, на котором a действует взаимно-однозначно. Воспользовавшись тем, что $b(K_2)$ по-прежнему бесконечно, и выбирая из каждого класса эквивалентности $b^{-1} \circ b$ на K_2 в точности по одному элементу, получаем бесконечное множество $K_3 \subseteq K_2$, на котором и b действует взаимно-однозначно. Вспомнив определение f и K, заключаем, что в решетке L существуют две последовательности элементов без повторяющихся членов $\{x_i\}_{i \in \mathrm{Z}}$ и $\{y_i\}_{i \in \mathrm{Z}}$, такие, что $x = x_i \vee y_i$ для любого $i \in Z$. Без ограничения общности можно считать, что x_i несравним с y_i для любого $i \in Z$. Коль скоро элементы a_i, c_i, d вообще не разложимы в объединение несравнимых элементов, они не могут играть роль элемента x. Значит, нужно рассмотреть лишь элементы b_i. Легко, однако, понять, что достаточно рассмотреть только элемент b_0. Выпишем все с точностью до симметрии пары несравнимых элементов, дающих в объединении b_0:

(a_0, b_j), (a_0, c_j), (d, b_j), (d, c_j), (c_{-1}, b_j), (c_{-1}, c_{j-1}), где $j = -1, -2, \ldots$

Поскольку в каждую из выписанных пар входит один из элементов a_0, d, c_{-1}, видим, что и элемент b_0 не может играть роль x. Таким образом, мы пришли к противоречию и, следовательно, $aD \vee bD = fD \in \overline{L^*} \backslash \overline{L}$.

Покажем теперь, что $aD \vee bD = fD \in \overline{L_1}$. По определению

$$aD \in \overline{L_1} \Leftrightarrow aD \in \overline{L^*} \backslash \overline{L} \text{ и существует } x \in \Omega \text{ такое, что } \{z | a^z < x\} \in D,$$
$$bD \in \overline{L_1} \Leftrightarrow bD \in \overline{L^*} \backslash \overline{L} \text{ и существует } y \in \Omega \text{ такое, что } \{z | b^z < y\} \in D.$$

Пусть $w = x \wedge y$ в решетке L.

Тогда

$$\{z \,| f^z \le w\} = M \supseteq (\{z \,| a^z \wedge b^z = f^z\} \cap \{z \,| a^z < x\} \cap \{z \,| b^z < y\}) \in D$$

и поскольку D — фильтр, то $M \in D$. Множество M можно представить в виде $M = M_1 \cup M_2$, где $M_1 = \{z \in M | \, f^z < w\}$ и $M_2 =$

$\{z \in M \,|\, f^z = w\}$. Тогда M_1, M_2 — разбиение множества M. Согласно замечанию одно из множеств M_1, M_2 принадлежит D. Легко понять, что $M_2 \in D$ приводит к противоречию. Следовательно, $M_1 \in D$. Но тогда $\{z|f^z < w\} = T \supseteq M_1 \in D$ и поскольку D — фильтр, $T \in D$. Отсюда по определению множества $\overline{L_1}$ элемент fD принадлежит $\overline{L_1}$. Итак, $\overline{L_1}$ — подрешетка решетки $\overline{L^*}$.

Аналогично доказывается, что $\overline{L_2}$ — подрешетка решетки $\overline{L^*}$. Лемма доказана. □

Рассмотрим решетку $\overline{L^*}$. Обозначим через $\overline{L'}$ объединение подрешеток $\overline{L_1}$ и $\overline{L}$ решетки $\overline{L^*}$. Если множество $\overline{L'}$ является подрешеткой решетки $\overline{L^*}$, то к решетке $\overline{L^*}$ применима лемма 4. Легко понять, что в качестве подрешеток L_1 и L_2 в лемме 4 надо взять подрешетки $\overline{L'}$ и $\overline{L_2}$, соответственно.

Таким образом, для завершения доказательства основного результата нам осталось доказать следующую лемму.

Лемма 9. *Частично упорядоченное множество $\overline{L'}$ является подрешеткой решетки $\overline{L^*}$.*

Доказательство. Достаточно показать, что для любых элементов $aD \in \overline{L_1}$ и $fD \in \overline{L}$ элементы $aD \wedge fD$, $aD \vee fD$ принадлежат $\overline{L'}$.

Отметим, что $aD \wedge fD \leq aD \in \overline{L_1}$. Поскольку ни один из элементов решеток $\overline{L}$ и $\overline{L_2}$ не может быть меньше элемента решетки $\overline{L_1}$, элемент $aD \wedge fD$ принадлежит решетке $\overline{L_1}$, и, следовательно, множеству $\overline{L'}$.

Покажем теперь, что $aD \vee fD$ принадлежит $\overline{L'}$. Возможны следующие случаи: элемент aD меньше элемента fD и элемент aD несравним с элементом fD. Очевидно, в первом случае $aD \vee fD = fD \in \overline{L}$. Отсюда, $aD \vee fD \in \overline{L'}$. Пусть теперь, элемент aD несравним с элементом fD. По определению $\overline{L_1}$ и $\overline{L}$ соответственно

$$aD \in \overline{L_1} \Leftrightarrow aD \in \overline{L^*} \backslash \overline{L} \text{ и существует } x \in \Omega \text{ такое, что } \{z|a^z < x\} \in D,$$
$$fD \in \overline{L} \Leftrightarrow \text{существует } s \in \Omega \text{ такое, что } \{z|f^z = s\} \in D.$$

Пусть $w = x \vee s$ в решетке L, $aD \vee fD = hD$ в решетке $\overline{L^*}$. Отметим, что $aD \vee fD = hD$ равносильно $\{z|a^z \vee f^z = h^z\} \in D$. Тогда $\{z|h^z \leq w\} = M \supseteq (\{z|a^z \vee f^z = h^z\} \cap \{z|a^z < x\} \cap \{z|f^z = s\}) \in D$ и поскольку D — фильтр, то $M \in D$. Если существует элемент $r \in \Omega$ такой, что $r \leq s$ и множество $\{z|h^z = r\} \in D$, то элемент hD принадлежит решетке $\overline{L}$ по определению. Иначе, элемент hD принадлежит решетке $\overline{L_1}$.

Итак, $\overline{L'}$ - подрешетка $\overline{L^*}$. Лемма доказана. □

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору В. А. Баранскому за постоянное внимание к работе, ценные советы и замечания.

Список литературы

1. Важенин Ю. М. О жестких решетках и графах Ю. М. Важенин, Е. А. Перминов // Исслед. по соврем. Алгебре / Урал. гос. ун-т. – Свердловск, 1979. – С. 3–21.
2. Перминова О. Е. О конечных критических решетках / О. Е. Перминова // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2009. – Т. 15, N 2. – С. 185–193.
3. Мальцев А. И. Алгебраические системы / А. И. Мальцев. – М. : Наука, 1970. – 392 с.
4. Гретцер Г. Общая теория решеток / Г. Гретцер. – М. : Мир, 1982. – 456 с.
5. Crawley P., Dilworth R. P. Algebraic theory of lattices / P. Crawley, R. P. Dilworth. – New Jersey : Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, 1973. – 193 p.

O. E. Perminova
On nonaxiomatizability of critical lattices class

Abstract. Rigid lattices, i.e., lattices, any its endomorphism is a constant endomorphism (mapping all elements to a some single element) or the identity endomorphism, are investigated. It is proved that the class of critical lattices is not axiomatizable.

Keywords: lattice, endomorphism, rigid lattice, critical lattice, axiomatizability.

Перминова Ольга Евгеньевна, аспирант, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19 тел.: (343)3507579 (perminova_oe@mail.ru)

Perminova Olga, Ural Federal University named after First President of Russia B. N. Yeltsin 19, Mira Street, Ekaterinburg, 620002
Phone: (343)3507579 (perminova_oe@mail.ru)