Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 3. С. 3—19

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 531.36

О сохранении неустойчивости механических систем при эволюции диссипативных сил

А. Ю. Александров, А. В. Платонов
Санкт-Петербургский государственный университет

А. А. Косов
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. Исследуются описываемые дифференциальными уравнениями Лагранжа второго рода механические системы с нестационарной эволюцией диссипативных сил, приводящей к их доминированию или исчезновению. Доказаны теоремы о неустойчивости равновесия по линейному приближению в условиях неприменимости известных для нестационарных линеаризаций классических критериев. Рассмотрены случаи существенно нелинейных диссипативных сил, определяемых однородной функцией Рэлея или зависящих от координат, для которых также получены условия неустойчивости положения равновесия.

Ключевые слова: механические системы, диссипативные силы, устойчивость, функции Ляпунова, нестационарный параметр.

Введение

Рассмотрим механическую систему, в которой среди действующих сил присутствуют диссипативные силы и которая имеет неустойчивое положение равновесия. Предположим, что с течением времени диссипативные силы могут эволюционировать, что выражается в появлении при векторе этих сил скалярного множителя $h(t) > 0$, заданного при всех $t \geq 0$ и сохраняющего диссипативную структуру данных сил. Когда можно быть уверенным в том, что неустойчивость механической системы сохранится, несмотря на эволюцию диссипативных сил?

Проблемы устойчивости механических систем при нестационарных законах сопротивления рассматривались многими авторами (см., например, [2–4, 8, 14, 17–19] и цитированную там литературу). Основная цель данной статьи состоит в том, чтобы для двух наиболее радикальных (приводящих к доминированию или исчезновению) типов эволюции диссипативных сил указать классы систем, для которых неустойчивость положения равновесия будет сохраняться.

1. Постановка задачи

Рассмотрим голономную механическую систему с не зависящими от времени связями, имеющую n степеней свободы. Векторы обобщенных координат и скоростей обозначим соответственно через q и $\dot{q}$. Кинетическая энергия такой системы представляется квадратичной формой $T = T(q,\dot{q}) = 1/2\,\dot{q}^T A(q)\dot{q}$ с симметрической положительно определенной матрицей $A(q)$. Будем считать, что матрица $A(q)$ задана и непрерывно дифференцируема при $\|q\| < \varrho$, где $\varrho = \mathrm{const} > 0$, $\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора. Уравнения движения в форме Лагранжа второго рода имеют вид [11]

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q(t,q,\dot{q}). \tag{1.1}$$

Через $\Omega(\tau,\eta)$, где $\tau \geq 0$, $\eta > 0$, будем обозначать область $\Omega(\tau,\eta) = \{(t,q,\dot{q}) : \ t \geq \tau, \ \|q\| < \eta, \ \|\dot{q}\| < \eta\}$. Предположим, что обобщенные силы $Q(t,q,\dot{q})$ определены в области $\Omega(0,\varrho)$, непрерывны по всем аргументам, непрерывно дифференцируемы по компонентам векторов q, $\dot{q}$ и удовлетворяют условию $Q(t,0,0) \equiv 0$. Таким образом, система (1.1) имеет положение равновесия $q = \dot{q} = 0$.

Пусть при всех $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$ и всех $q \in \mathbb{R}^n$ таких, что $\|q\| < \varrho$, для кинетической энергии выполняются оценки

$$k_1\|\dot{q}\|^2 \leq T(q,\dot{q}) \leq k_2\|\dot{q}\|^2, \quad \left\|\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right\| \leq k_3\|\dot{q}\|, \quad \left\|\frac{\partial T}{\partial q}\right\| \leq k_4\|\dot{q}\|^2. \tag{1.2}$$

Здесь k_1, k_2, k_3, k_4 — некоторые положительные постоянные.

Согласно теореме о каноническом разложении силовых полей [6] вектор обобщенных сил $Q = Q(t,q,\dot{q})$ представим в виде суммы

$$Q = Q^{(p)}(t,q) + Q^{(n)}(t,q) + Q^{(d)}(t,q,\dot{q}) + Q^{(g)}(t,\dot{q}) + Q^{(v)}(t,q,\dot{q}) \tag{1.3}$$

линейных потенциальных сил $Q^{(p)}(t,q) = -C(t)q$, $C^T(t) = C(t)$, линейных неконсервативных позиционных сил $Q^{(n)}(t,q) = -P(t)q$, $P^T(t) = -P(t)$, всех присутствующих в системе (как линейных, так и нелинейных) диссипативных сил $Q^{(d)}(t,q,\dot{q}) = -B(t)\dot{q} - f(t,q,\dot{q})$, $B^T(t) = B(t)$, линейных гироскопических сил $Q^{(g)}(t,\dot{q}) = -G(t)\dot{q}$, $G^T(t) = -G(t)$, и, вообще говоря, нелинейных сил $Q^{(v)}(t,q,\dot{q})$, не являющихся диссипативными, которые будем называть возмущениями. Отметим, что возмущения $Q^{(v)}(t,q,\dot{q})$ могут, в частности, включать и ускоряющие силы, если таковые присутствуют в системе. Пусть матрица $C(t)$ непрерывно дифференцируема, а матрицы $B(t)$, $G(t)$ и $P(t)$ непрерывны при $t \geq 0$.

Через $\lambda_{\min}(\cdot)$ и $\lambda_{\max}(\cdot)$ будем обозначать соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа симметрических матриц. Для произвольной зависящей от времени матрицы $M(t)$ положим

$$\varphi_{\min}(M(t)) = \inf_{t\geq 0} \sqrt{\lambda_{\min}\left(M^T(t)M(t)\right)},$$

$$\varphi_{\max}(M(t)) = \sup_{t\geq 0} \sqrt{\lambda_{\max}\left(M^T(t)M(t)\right)}.$$

Введем обозначения

$$b_{\min} = \inf_{t\geq 0} \lambda_{\min}\left(B(t)\right), \quad b_{\max} = \sup_{t\geq 0} \lambda_{\max}\left(B(t)\right), \quad c_* = \varphi_{\max}(\dot{C}(t)),$$

$$c_0 = \varphi^2_{\min}(C(t)), \quad c_1 = \varphi_{\max}(C(t)), \quad g = \varphi_{\max}(G(t)), \quad p = \varphi_{\max}(P(t)).$$

Линейную компоненту диссипативных сил $-B(t)\dot{q}$ будем считать обладающей полной диссипацией и ограниченной, так что

$$b_{\min} > 0, \quad b_{\max} < +\infty. \tag{1.4}$$

Для нелинейных диссипативных и возмущающих сил в области $\Omega(0,\varrho)$ будем считать выполненными оценки

$$-\dot{q}^T f(t,q,\dot{q}) \leq 0, \qquad \|f(t,q,\dot{q})\| \leq d_1\|\dot{q}\|^{1+\beta_1}, \tag{1.5}$$

$$\|Q^{(v)}(t,q,\dot{q})\| \leq d_2\left(\|q\|^{1+\beta_2} + \|\dot{q}\|\right). \tag{1.6}$$

Здесь d_1, d_2, β_1 и β_2 — некоторые положительные числа.

Предположим теперь, что диссипативные силы эволюционируют, т.е. в представлении (1.3) вместо слагаемого $Q^{(d)}(t,q,\dot{q})$ следует рассматривать $h(t)Q^{(d)}(t,q,\dot{q})$. Тогда уравнения (1.1) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = \; & Q^{(p)}(t,q) + Q^{(n)}(t,q) + h(t)Q^{(d)}(t,q,\dot{q}) + \\ & + Q^{(g)}(t,\dot{q}) + Q^{(v)}(t,q,\dot{q}). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь и всюду далее функция $h(t)$ считается заданной при $t \geq 0$, непрерывно дифференцируемой и положительной. Наиболее радикальной эволюция диссипативных сил будет в двух случаях, когда для $h(t)$ выполнено условие

$$h(t) \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \tag{1.8}$$

либо условие

$$h(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{1.9}$$

Основная задача настоящей статьи — получить условия на скорость изменения параметра эволюции $h(t)$ и составляющие разложения (1.3) вектора обобщенных сил, выполнение которых обеспечит неустойчивость положения равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (1.7).

Необходимо отметить, что вектор обобщенных сил $Q(t, q, \dot{q})$, являющихся аналитическими функциями обобщенных координат и скоростей, всегда может быть представлен в виде разложения (1.3) [6]. Однако при этом возможны и такие случаи (при нелинейных законах сопротивления), когда матрица $B(t) \equiv 0$, поэтому первое неравенство в (1.4) не выполняется. Кроме того, в разложении (1.3) могут отсутствовать линейные позиционные силы, т.е. $Q^{(p)}(t, q) \equiv 0$, $Q^{(n)}(t, q) \equiv 0$. Поэтому представляет интерес получение условий неустойчивости положения равновесия при эволюции диссипативных сил и в таких случаях, когда в представлении (1.3) разложения позиционных и/или диссипативных сил в ряды по степеням обобщенных координат и скоростей начинаются с существенно нелинейных членов. Основным методом исследования является метод функций Ляпунова, поскольку ввиду существенной нелинейности системы применение других методов затруднительно.

2. Линейные диссипативные силы с нестационарным параметром

В этом разделе сначала будем рассматривать случай, когда в системе (1.7) параметр эволюции $h(t)$ удовлетворяет условию (1.8). Предположим, что неконсервативные позиционные силы являются малыми, так что уравнения движения принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = & -\big(C(t) + \varepsilon P(t)\big)q - h(t)\big(B(t)\dot{q} + f(t, q, \dot{q})\big) - \\ & - G(t)\dot{q} + Q^{(v)}(t, q, \dot{q}), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Теорема 1. *Если выполнены условия* (1.4), $p < +\infty$*,* $g < +\infty$*,* $c_0 > 0$*,* $c_1 < +\infty$*,* $c_* < +\infty$*, квадратичная форма* $q^T \dot{C}(t) q$ *неположительна, квадратичная форма* $q^T C(t) q$ *при всяком* $t \geq 0$ *может принимать отрицательные значения, а для параметра эволюции* $h(t)$ *справедливы соотношения* (1.8) *и*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{h(t)} = +\infty, \tag{2.2}$$

$$|\dot{h}(t)| \leq M_1 h^2(t) \quad \textit{при} \quad t \geq 0, \quad M_1 = \mathrm{const} > 0, \tag{2.3}$$

то положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ *системы* (2.1) *неустойчиво при любых удовлетворяющих неравенству* (1.6) *возмущающих силах* $Q^{(v)}(t, q, \dot{q})$ *и любом значении* ε*, для которого выполнена оценка*

$$|\varepsilon| < \frac{4c_0 b_{\min}}{4c_1 b_{\min} p + (M_1 k_3 c_1 + c_1 b_{\max} + p)^2}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Рассмотрим в качестве функции Ляпунова

$$V(t,q,\dot q) = -T(q,\dot q) - \frac{1}{2}\,q^T C(t) q - \frac{\gamma}{h(t)} q^T C(t)\frac{\partial T}{\partial \dot q}. \qquad (2.5)$$

Здесь γ — положительное число, которое выберем позже.

При любом фиксированном $\gamma > 0$ и достаточно большом $\tau > 0$ в силу условий теоремы и (1.2) функция (2.5) будет удовлетворять в области $\Omega(\tau,\varrho)$ оценке

$$V(t,q,\dot q) \le a_1\left(\|q\|^2 + \|\dot q\|^2\right), \quad a_1 = \mathrm{const} > 0. \qquad (2.6)$$

Вычисляя производную функции (2.5) в силу системы (2.1), получаем с учетом (1.4)–(1.6) и (2.3)

$$\dot V(t,q,\dot q) = h\dot q^T(B\dot q + f) + \varepsilon \dot q^T P q - \dot q^T Q^{(v)} - \frac{\gamma}{h}\,\dot q^T C\frac{\partial T}{\partial \dot q} -$$

$$-\frac{1}{2}\,q^T \dot C q - \frac{\gamma}{h}\,q^T C\left(\frac{\partial T}{\partial q} - h(B\dot q + f) - G\dot q - (C+\varepsilon P)q + Q^{(v)}\right) -$$

$$-q^T\left(\frac{\gamma}{h}\dot C - \frac{\gamma\dot h}{h^2}C\right)\frac{\partial T}{\partial \dot q} \ge \frac{1}{h}\left(a\|\dot q\|^2 - 2b\|q\|\,\|\dot q\| + c\|q\|^2\right) \equiv \frac{1}{h}W.$$

Здесь коэффициенты квадратичной формы $W(\|q\|,\|\dot q\|)$ двух аргументов задаются формулами

$$a = h^2 b_{\min} - d_2 h - \gamma c_1 k_3 - \gamma c_1 k_4\|q\|, \quad c = \gamma\left(c_0 - c_1 p|\varepsilon| - c_1 d_2\|q\|^{\beta_2}\right),$$

$$2b = \left(p|\varepsilon| + \gamma c_1 k_3 M_1 + \gamma c_1 b_{\max}\right) h + h d_2\|q\|^{\beta_2} +$$

$$+ \gamma c_* k_3 + h\gamma c_1 d_1\|\dot q\|^{\beta_1} + \gamma c_1 g + \gamma c_1 d_2.$$

Положим $\gamma = |\varepsilon|$. Тогда при выполнении условия (2.4) при достаточно большом $\tau > 0$ и достаточно малом $\eta > 0$ из обобщенного критерия Сильвестра следует, что в области $\Omega(\tau,\eta)$ будет иметь место неравенство $W(\|q\|,\|\dot q\|) \ge a_2\left(\|q\|^2 + \|\dot q\|^2\right)$, где a_2 — положительное число. Поэтому с учетом (2.6) в этой области справедлива оценка

$$\dot V(t,q,\dot q) \ge \frac{a_2}{h(t)}\left(\|q\|^2 + \|\dot q\|^2\right) \ge \frac{a_2}{a_1 h(t)} V(t,q,\dot q). \qquad (2.7)$$

Предположим, что положение равновесия $q = \dot q = 0$ системы (2.1) устойчиво. Тогда при достаточно малых значениях $\|q_0\|$, $\|\dot q_0\|$ движение $q(t)$, $\dot q(t)$ с начальными условиями $t_0 \ge \tau$, $q(t_0) = q_0$, $\dot q(t_0) = \dot q_0$ будет при всех $t \ge t_0$ оставаться в области $\Omega(\tau,\eta)$. Выберем начальные данные так, чтобы выполнялось неравенство $V(t_0,q_0,\dot q_0) > 0$, что всегда можно сделать в соответствии с условиями теоремы. Тогда вдоль движения будет справедливо вытекающее из (2.7) соотношение

$$V(t, q(t), \dot{q}(t)) \geq V(t_0, q_0, \dot{q}_0) \exp\left(\frac{a_2}{a_1}\int_{t_0}^{t}\frac{ds}{h(s)}\right) \to +\infty \quad \text{при} \quad t \to +\infty,$$

что противоречит неравенству (2.6). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

Замечание 1. В случае постоянной матрицы потенциальных сил ($C(t) \equiv C = \mathrm{const}$) все требования теоремы 1 к ней сводятся к невырожденности ($\det C \neq 0$) и наличию хотя бы одного отрицательного собственного числа. Таким образом, теорема 1 соответствует классическим условиям неустойчивости изолированного равновесия потенциальной системы, устанавливаемым по квадратичным членам разложения потенциальной энергии [12, 16].

Замечание 2. Для функции

$$h(t) = (t+1)^{\alpha} \tag{2.8}$$

все накладываемые на нее условия теоремы 1 будут выполнены при $0 < \alpha \leq 1$, причем коэффициент M_1 можно считать сколь угодно малым положительным числом. Поэтому в данном случае ограничение (2.4) на величину параметра ε можно ослабить, положив в нем M_1 нулем.

Пример 1. Из теоремы 1 следует, что положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы с одной степенью свободы

$$\ddot{q} + (t+1)\dot{q} - q = Q^{(v)}(t, q, \dot{q}) \tag{2.9}$$

неустойчиво при любых удовлетворяющих условию (1.6) возмущающих силах $Q^{(v)}(t, q, \dot{q})$. Отметим, что (2.9) можно рассматривать как уравнение возмущенного движения маятника по отношению к верхнему положению равновесия в случае растущего с линейной скоростью коэффициента трения. Линеаризованное уравнение $\ddot{x} + (t+1)\dot{x} - x = 0$ имеет общее решение

$$x(t) = l_1(t+1) - l_2\left((t+1)\int_0^{t+1}\exp\left(-s^2/2\right)ds + \exp\left(-(t+1)^2/2\right)\right),$$

где l_1 и l_2 — произвольные постоянные. Характеристические показатели всех нетривиальных решений линеаризованного уравнения равны нулю, поэтому известные для нестационарных линеаризаций теоремы о неустойчивости по линейному приближению [16, 10] неприменимы к системе (2.9).

Перейдем теперь к рассмотрению случая исчезающих в соответствии с (1.9) диссипативных сил в системе (1.7). При этом будем предполагать, что в уравнениях линейного приближения нестационарность связана только с параметром $h(t)$. Тогда уравнения (1.7) можно записать в виде

$$A\ddot{q} + (M + h(t)B + G)\dot{q} + (C + P)q = \widehat{Q}(t, q, \dot{q}). \tag{2.10}$$

Здесь A, M, B, C — постоянные симметрические матрицы соответственно инерционных характеристик, ускоряющих, диссипативных и потенциальных сил, причем $A = A(q)\big|_{q=0}$ — положительно определенная, а M и B — матрицы знакопостоянных (либо знакоопределенных) соответственно отрицательной и положительной квадратичных форм; G и P — кососимметрические матрицы гироскопических и циркулярных сил; $\widehat{Q}(t, q, \dot{q})$ — нелинейные силы, удовлетворяющие в области $\Omega(0, \eta)$ оценке $\left\|\widehat{Q}(t, q, \dot{q})\right\| \le d_3 \left(\|q\| + \|\dot{q}\|\right)^{1+\beta_3}$, $d_3 > 0$, $\beta_3 > 0$.

Наряду с нелинейной системой (2.10) будем рассматривать систему линейного приближения

$$A\ddot{q} + (M + h(t)B + G)\dot{q} + (C + P)q = 0. \tag{2.11}$$

С учетом (1.9) из (2.11) получается предельная линейная система с постоянными коэффициентами

$$A\ddot{x} + (M + G)\dot{x} + (C + P)x = 0. \tag{2.12}$$

С помощью невырожденной линейной замены $x = Ly$ систему (2.12) можно представить в эквивалентном, в плане устойчивости, виде

$$\ddot{y} + \left(\widetilde{M} + \widetilde{G}\right)\dot{y} + \left(\widetilde{C}_0 + \widetilde{P}\right)y = 0, \tag{2.13}$$

где матрица $\widetilde{C}_0 = L^T C L$ — диагональная, $\widetilde{M} = L^T M L$ — симметрическая, а $\widetilde{G} = L^T G L$ и $\widetilde{P} = L^T P L$ — кососимметрические.

Теорема 2. *Если для параметра $h(t)$ выполнено соотношение* (1.9) *и характеристическое уравнение системы* (2.12) *(или* (2.13)*, что эквивалентно) имеет корни с положительной вещественной частью, то положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы* (2.10) *неустойчиво.*

Доказательство. В соответствии с теоремой Перрона [13, с. 351, теорема 4] характеристические показатели линейной системы с переменными коэффициентами (2.11) совпадают с вещественными частями корней характеристического уравнения предельной системы (2.12) (или (2.13)). Поэтому сумма характеристических показателей S равна следу $-Sp\widetilde{M}$ матрицы системы (2.13), записанной как система уравнений первого порядка.

Из (1.9) следует, что

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} h(\tau)\,d\tau = 0 \quad \text{при всех} \quad t_0 \geq 0.$$

Положим $\widetilde{B} = L^T BL$. В соответствии с неравенством Ляпунова

$$S \geq \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t-t_0}\int_{t_0}^{t} Sp\left[-\widetilde{M} - h(\tau)\widetilde{B} - \widetilde{G}\right] d\tau = -Sp\widetilde{M} = S,$$

т.е. неравенство Ляпунова обращается в равенство, что означает правильность системы (2.11). Теперь утверждение доказываемой теоремы вытекает из теоремы Четаева о неустойчивости по правильному линейному приближению [16, § 70]. □

Перечислим ряд условий, гарантирующих наличие корней с положительной вещественной частью у характеристического уравнения (2.13) и, тем самым, неустойчивость равновесия системы (2.10).

Если $M \neq 0$, т.е. если ускоряющие силы присутствуют в системе (2.10), а диссипативные исчезают в соответствии с (1.9), то равновесие неустойчиво независимо от гироскопических, потенциальных и циркулярных сил. Поэтому далее считаем $M = 0$.

Если $\det(C + P) < 0$, то равновесие неустойчиво независимо от выбора матрицы G гироскопических сил [15].

Если матрицы $\widetilde{G}$ и $\widetilde{P}$ в (2.13) таковы, что $\sum\limits_{i,\,j=1}^{n} \widetilde{g}_{ij}\widetilde{p}_{ij} \neq 0$, то равновесие неустойчиво независимо от выбора матрицы $\widetilde{C}_0$ потенциальных сил [7]. Система (2.13) вообще может быть устойчива только в случае $M = 0$ и обращении в нуль всех коэффициентов при нечетных степенях в характеристическом уравнении [7]. Такое обнуление обеспечивается, если помимо M обнуляется еще и одна из матриц $\widetilde{G}$ и $\widetilde{P}$.

Если $M = 0$ и $G = 0$, а $Sp\widetilde{C}_0 < 0$, то равновесие неустойчиво независимо от выбора матрицы циркулярных сил $\widetilde{P}$ [9].

Если же $M = 0$, $P = 0$ и $\det(C + P) = \det C > 0$, то за счет выбора матрицы G возможна гироскопическая стабилизация [16]. Однако, если скорость исчезновения диссипативных сил в соответствии с (1.9) удовлетворяет некоторым условиям (см. ниже теорему 5), то и в этом случае положение равновесия будет неустойчиво.

Пример 2. Рассмотрим систему типа (2.10) с двумя степенями свободы ($n = 2$), в которой присутствуют гироскопические и циркулярные силы, т.е. матрицы G и P ненулевые. Тогда равновесие неустойчиво независимо от потенциальных сил.

Пример 3. Рассмотрим систему типа (2.10) с тремя степенями свободы ($n = 3$) и без ускоряющих сил, для которой уравнения (2.13) приведены к виду

$$\ddot{y} + \begin{pmatrix} 0 & -g_1 & -g_2 \\ g_1 & 0 & -g_3 \\ g_2 & g_3 & 0 \end{pmatrix} \dot{y} + \begin{pmatrix} c_1 & -p_1 & -p_2 \\ p_1 & c_2 & -p_3 \\ p_2 & p_3 & c_3 \end{pmatrix} y = 0. \tag{2.14}$$

Будем рассматривать трехмерные векторы $\overline{p} = \mathrm{col}\,(p_1, p_2, p_3)$, $\overline{g} = \mathrm{col}\,(g_1, g_2, g_3)$ и диагональную матрицу $\overline{C} = \mathrm{diag}\,(c_3, c_2, c_1)$. Пусть в (2.14) матрицы $\widetilde{P}$ и $\widetilde{C}_0$ (т.е. вектор $\overline{p}$ и матрица $\overline{C}$) зафиксированы и при этом векторы $\overline{p}$ и $\overline{C}\overline{p}$ неколлинеарны. Тогда равновесие будет неустойчиво при любом выборе матрицы гироскопических сил, за исключением того случая, когда вектор $\overline{g}$ является коллинеарным векторному произведению $\overline{p} \times \overline{C}\overline{p}$, т.е. матрица гироскопических сил, при которой возможна устойчивость, определяется фактически единственным образом (с точностью до скалярного множителя).

Примеры 2 и 3 показывают, что при исчезновении диссипативных сил с любой скоростью в соотношении (1.9) и одновременном присутствии гироскопических и циркулярных сил в системе, неустойчивость равновесия является типичным динамическим свойством.

3. Нелинейные диссипативные силы с нестационарным параметром

Рассмотрим теперь случай, когда в уравнениях (1.7) диссипативные силы существенно нелинейны ($B(t) \equiv 0$). Кроме того, будем предполагать, что в разложении (1.3) отсутствуют линейные неконсервативные силы ($P(t) \equiv 0$) и могут отсутствовать линейные потенциальные силы (для матрицы $C(t)$ может иметь место тождество $C(t) \equiv 0$).

Пусть уравнения представлены в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -h(t)\frac{\partial R}{\partial \dot{q}} - G(t, q, \dot{q})\dot{q} - \frac{\partial \Pi}{\partial q}. \tag{3.1}$$

Здесь функция Рэлея $R(\dot{q})$ непрерывно дифференцируема при всех $\dot{q} \in \mathbb{R}^n$, положительно определена и является однородной порядка $\nu+1$, $\nu > 1$; $G(t, q, \dot{q})$ — непрерывная и ограниченная в области $\Omega(0, \varrho)$ кососимметричная матрица; потенциальная энергия $\Pi(q)$ — дважды непрерывно дифференцируемая при $q \in \mathbb{R}^n$ однородная функция порядка $\mu + 1$, $\mu \geq 1$; нестационарный параметр $h(t)$ — положительная и непрерывно дифференцируемая при $t \geq 0$ функция. Таким образом, рассматриваемая система находится под действием потенциальных, гироскопических и эволюционирующих со временем существенно нелинейных диссипативных сил. При выполнении указанных условий положение $q = \dot{q} = 0$ является положением равновесия для (3.1).

Будем считать, что функция $\Pi(q)$ не имеет минимума в точке $q = 0$ и $\partial\Pi(q)/\partial q \neq 0$ при $q \neq 0$, т.е. у системы (3.1) нет положений равновесия, за исключением $q = \dot{q} = 0$. Известно [14], что если $h(t) \equiv \mathrm{const} > 0$, то положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ неустойчиво. Определим условия неустойчивости для переменного параметра $h(t)$. При этом рассмотрим два наиболее радикальных типа эволюции диссипативных сил, приводящих к их доминированию или исчезновению.

Исследуем сначала случай неограниченно растущего параметра.

Теорема 3. *Если для параметра эволюции $h(t)$ справедливо предельное соотношение* (1.8), *и существует число $\sigma \geq 1/\nu$, для которого выполнены следующие условия:*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{h^\sigma(t)} = +\infty, \tag{3.2}$$

$$|\dot{h}(t)| \leq K h^{1+\frac{1+\sigma}{\nu+1}}(t) \quad \textit{при} \quad t \geq 0, \quad K = \mathrm{const} > 0, \tag{3.3}$$

то положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (3.1) *неустойчиво.*

Доказательство. Функцию Ляпунова строим в виде

$$V(t, q, \dot{q}) = \Pi(q) + T(q, \dot{q}) + \frac{\gamma}{h^\sigma(t)} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)^\theta \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \tag{3.4}$$

где $\gamma > 0$, $\theta \geq 1$, причем θ — рациональное число с нечетными числителем и знаменателем. Дифференцируя (3.4) в силу системы (3.1), с учетом (3.3) получаем, что в области $\Omega(0, \varrho)$ справедлива оценка

$$\dot{V}(t, q, \dot{q}) \leq -a_1 \left(\frac{\gamma}{h^\sigma(t)} \|q\|^{\mu(\theta+1)} + h(t)\|\dot{q}\|^{\nu+1}\right) +$$

$$+ \frac{a_2\gamma}{h^\sigma(t)} \left(h(t)\|q\|^{\mu\theta}\|\dot{q}\|^\nu + \left(1 + K h^{\frac{1+\sigma}{\nu+1}}(t)\right) \|q\|^{\mu\theta}\|\dot{q}\| + \|q\|^{\mu\theta-1}\|\dot{q}\|^2\right),$$

где $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Пусть $\theta = \nu$. Тогда положительные числа $\gamma, \eta, \tau, a_3, a_4$ можно выбрать так, чтобы в области $\Omega(\tau, \eta)$ имели место неравенства

$$|V(t, q, \dot{q})| \leq a_3 \left(\|q\|^{\mu+1} + \|\dot{q}\|^2\right), \tag{3.5}$$

$$\dot{V}(t, q, \dot{q}) \leq -\frac{a_4}{h^\sigma(t)} \left(\|q\|^{\mu(\nu+1)} + \|\dot{q}\|^{\nu+1}\right). \tag{3.6}$$

Предположим, что положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ устойчиво. Зададим $t_0 \geq \tau$ и найдем точку $\tilde{q}_0$ такую, что $\Pi(\tilde{q}_0) < 0$ и решение $q(t)$ системы (3.1) с начальными данными $q(t_0) = \tilde{q}_0$, $\dot{q}(t_0) = 0$ при всех $t \geq t_0$ удовлетворяет условиям $\|q(t)\| < \eta$, $\|\dot{q}(t)\| < \eta$.

Рассмотрим функцию $\tilde{V}(t) = V(t, q(t), \dot{q}(t))$. Функция $\tilde{V}(t)$ монотонно убывает и ограничена на промежутке $[t_0, +\infty)$, причем $\tilde{V}(t_0) < 0$. Учитывая неравенство (3.5), получаем, что $\|q(t)\| + \|\dot{q}(t)\| \geq \varrho_0$ при $t \geq t_0$, где ϱ_0 — положительная постоянная. А тогда из оценки (3.6) и условия (3.2) следует, что $\tilde{V}(t) \to -\infty$ при $t \to +\infty$. Приходим к противоречию, которое и доказывает теорему. □

Далее наряду с системой (3.1) рассмотрим возмущенную систему

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -h(t)\frac{\partial R}{\partial \dot{q}} - G(t, q, \dot{q})\dot{q} - \frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q^{(v)}(t, q, \dot{q}). \qquad (3.7)$$

Здесь вектор-функция $Q^{(v)}(t, q, \dot{q})$ задана и непрерывна в области $\Omega(0, \varrho)$ и удовлетворяет неравенству $\|Q^{(v)}(t, q, \dot{q})\| \leq \varepsilon\|q\|^{\delta} + d\|\dot{q}\|^{\xi}$, где $\varepsilon, d, \delta, \xi$ — положительные постоянные. Таким образом, система (3.7) также имеет положение равновесия $q = \dot{q} = 0$. Определим условия, при выполнении которых неустойчивость этого положения равновесия сохраняется и для возмущенной системы.

Теорема 4. *Если параметр $h(t)$ удовлетворяет условиям (1.8) и*

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{h^{1/\nu}(t)} = +\infty, \qquad (3.8)$$

$$|\dot{h}(t)| \leq K h^{1+\frac{1}{\nu}}(t) \quad \text{при} \quad t \geq 0, \quad K = \mathrm{const} > 0, \qquad (3.9)$$

то при $\delta \geq \mu\nu$, $\xi \geq \nu$ и достаточно малых значениях ε положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (3.7) неустойчиво.

Доказательство. Снова рассмотрим функцию Ляпунова (3.4). Для ее производной в силу возмущенной системы (3.7) в области $\Omega(0, \varrho)$ справедлива оценка

$$\dot{V}(t, q, \dot{q}) \leq -a_1\left(\frac{\gamma}{h^{\sigma}(t)}\|q\|^{\mu(\theta+1)} + h(t)\|\dot{q}\|^{\nu+1}\right) +$$

$$+ a_2\left(\|\dot{q}\| + \frac{\gamma}{h^{\sigma}(t)}\|q\|^{\mu\theta}\right)\left(\varepsilon\|q\|^{\delta} + d\|\dot{q}\|^{\xi}\right) +$$

$$+ \frac{a_3\gamma}{h^{\sigma}(t)}\left(h(t)\|q\|^{\mu\theta}\|\dot{q}\|^{\nu} + \left(1 + Kh^{\frac{1}{\nu}}(t)\right)\|q\|^{\mu\theta}\|\dot{q}\| + \|q\|^{\mu\theta-1}\|\dot{q}\|^2\right).$$

Здесь a_1, a_2, a_3 — положительные постоянные. В данном случае учет возмущений в системе (3.7) приводит к тому, что у нас не остается произвола в выборе параметра σ. Его значение должно определяться по формуле $\sigma = 1/\nu$. Дальнейшее доказательство с учетом (3.8) и (3.9) проводится аналогично доказательству теоремы 3. □

Определим теперь условия неустойчивости положения равновесия системы (3.1) с исчезающими со временем диссипативными силами.

Теорема 5. *Если для параметра эволюции $h(t)$ справедливо предельное соотношение* (1.9)*, и существует число $\sigma \geq 1$, для которого выполнены следующие условия:*

$$\int_0^{+\infty} h^{\sigma}(t)\,dt = +\infty, \tag{3.10}$$

$$|\dot{h}(t)| \leq K h^{1+\frac{1-\sigma}{\nu+1}}(t) \quad \textit{при} \quad t \geq 0, \quad K = \mathrm{const} > 0, \tag{3.11}$$

то положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (3.1) *неустойчиво.*

Используя функцию Ляпунова

$$V(t,q,\dot{q}) = \Pi(q) + T(q,\dot{q}) + \gamma h^{\sigma}(t) \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)^{\theta} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

где $\gamma > 0$, $\theta \geq 1$, причем θ — рациональное с нечетными числителем и знаменателем, доказательство настоящей теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 3.

Замечание 3. Теорема 5 справедлива и при $\nu = 1$ (для линейных диссипативных сил).

Замечание 4. Пусть параметр $h(t)$ определяется по формуле (2.8), где $\alpha < 0$. Тогда условия (3.10) и (3.11) будут выполнены при $\alpha \geq -1$.

4. Нелинейные диссипативные силы, зависящие от обобщенных координат

В теории механизмов и машин встречаются дифференциальные уравнения механических систем с диссипативными силами позиционно-вязкого трения, зависящие не только от обобщенных скоростей (линейным образом), но и от обобщенных координат [5]. Поэтому рассмотрим теперь тот случай, когда уравнения (1.7) имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial T}{\partial q} = -h(t)\frac{\partial F}{\partial q}\dot{q} - G(t,q,\dot{q})\dot{q} - \frac{\partial \Pi}{\partial q}. \tag{4.1}$$

Здесь матрица гироскопических сил $G(t,q,\dot{q})$ и потенциальная энергия $\Pi(q)$ обладают свойствами, указанными в разделе 3. Будем считать, что компоненты вектора $F(q)$ являются непрерывно дифференцируемыми при $q \in \mathbb{R}^n$ однородными функциями порядка $\nu+1$, $\nu > 0$. Кроме того, предположим, что всех $q, \dot{q} \in \mathbb{R}^n$ справедлива оценка

$$\dot{q}^T \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} \geq c\|q\|^\nu \|\dot{q}\|^2,$$

где c — положительная постоянная. Введем обозначение $\zeta = \max\{\nu; 2\}$.

Система (4.1) имеет положение равновесия $q = \dot{q} = 0$. В случае, когда $h(t) \equiv \mathrm{const} > 0$, это положение равновесия неустойчиво [14]. Исследуем условия неустойчивости при переменном параметре $h(t)$, неограниченно возрастающем, либо стремящимся к нулю с ростом времени.

Рассмотрим сначала случай эволюции диссипативных сил, приводящей к их доминированию.

Теорема 6. *Если для параметра $h(t)$ справедливо соотношение* (1.8), *и существует число $\sigma \geq 1$, для которого выполнены условия* (3.2) *и*

$$|\dot{h}(t)| \leq K h^{1+\frac{1+\sigma}{\zeta}}(t) \quad \textit{при} \quad t \geq 0, \quad K = \mathrm{const} > 0, \tag{4.2}$$

то положение равновесия $q = \dot{q} = 0$ системы (4.1) *неустойчиво.*

Доказательство. Построим функцию Ляпунова для (4.1) в виде

$$V(t,q,\dot{q}) = \Pi(q) + T(q,\dot{q}) - \frac{\gamma_1}{h^\sigma(t)}\|\dot{q}\|^{\beta-1} q^T \dot{q} + \frac{\gamma_2}{h^\sigma(t)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)^{\frac{\kappa}{\mu}} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \tag{4.3}$$

где $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $\beta \geq 1$, $\kappa \geq \mu$, причем величина κ/μ является рациональным числом с нечетными числителем и знаменателем.

В области $\Omega(0, \varrho)$ справедливы оценки

$$|V(t,q,\dot{q})| \leq a_1(\|q\|^{\mu+1} + \|\dot{q}\|^2) + \frac{\gamma_1}{h^\sigma(t)}\|q\|\|\dot{q}\|^\beta + \frac{\gamma_2 k_3}{h^\sigma(t)}\|q\|^\kappa \|\dot{q}\|,$$

$$\dot{V}(t,q,\dot{q}) \leq \frac{1}{h^\sigma(t)}\Big(-a_2\Big(\gamma_2\|q\|^{\kappa+\mu} + \gamma_1\|\dot{q}\|^{\beta+1} + h^{1+\sigma}(t)\|q\|^\nu\|\dot{q}\|^2\Big) +$$

$$+ a_3\Big(\gamma_1 h^{\frac{1+\sigma}{\zeta}}(t)\|q\|\|\dot{q}\|^\beta + \gamma_2 h^{\frac{1+\sigma}{\zeta}}(t)\|q\|^\kappa\|\dot{q}\| + \gamma_1\|q\|^{\mu+1}\|\dot{q}\|^{\beta-1} + \gamma_1\|q\|\|\dot{q}\|^\beta +$$

$$+ \gamma_1 h(t)\|q\|^{\nu+1}\|\dot{q}\|^\beta + \gamma_2\|q\|^{\kappa-1}\|\dot{q}\|^2 + \gamma_2 h(t)\|q\|^{\kappa+\nu}\|\dot{q}\| + \gamma_2\|q\|^\kappa\|\dot{q}\|\Big)\Big),$$

где a_1, a_2, a_3 — некоторые положительные постоянные.

Используя доказанную в работе [1] лемму 1.2, получаем, что если $\kappa \geq \mu + \nu$, $\beta \geq 1 + \max\{\nu; 2(\kappa-1)/(\kappa+\mu-\nu)\}$, то положительные числа γ_1, γ_2, η, τ и a_4 можно выбрать так, чтобы в области $\Omega(\tau, \eta)$ имели место неравенства

$$|V(t,q,\dot{q})| \leq 2a_1\left(\|q\|^{\mu+1} + \|\dot{q}\|^2\right), \quad \dot{V}(t,q,\dot{q}) \leq -\frac{a_4\left(\|q\|^{\kappa+\mu} + \|\dot{q}\|^{\beta+1}\right)}{h^\sigma(t)}.$$

Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 3. □

Замечание 5. Если нестационарный параметр имеет вид (2.8), где $\alpha > 0$, то условия (3.2) и (4.2) будут выполнены при $\alpha \le 1$.

Наряду с системой (4.1) рассмотрим теперь возмущенную систему

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q} - \frac{\partial T}{\partial q} = -h(t)\frac{\partial F}{\partial q}\dot q - G(t,q,\dot q)\dot q - \frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q^{(v)}(t,q,\dot q). \qquad (4.4)$$

Здесь вектор-функция $Q^{(v)}(t,q,\dot q)$ задана и непрерывна в области $\Omega(0,\varrho)$ и удовлетворяет неравенству $\|Q^{(v)}(t,q,\dot q)\| \le \varepsilon\|q\|^{\delta} + d\|q\|^{\xi}\|\dot q\|$, где ε, d, δ, ξ — положительные постоянные. Таким образом, система (4.4) также имеет положение равновесия $q = \dot q = 0$.

Теорема 7. *Пусть параметр $h(t)$ удовлетворяет условиям* (1.8), (2.2) *и $|\dot h(t)| \le Kh^{1+\frac{2}{\varsigma}}(t)$ при $t \ge 0$, $K = \mathrm{const} > 0$. Тогда при $\delta \ge \mu+\nu$, $\xi \ge \nu$ и достаточно малых значениях ε положение равновесия $q = \dot q = 0$ системы* (4.4) *неустойчиво.*

Доказательство теоремы 7 проводится аналогично доказательству теоремы 6. При этом в функции (4.3) следует положить $\sigma = 1$.

Перейдем теперь к случаю исчезающих диссипативных сил.

Теорема 8. *Если для параметра эволюции $h(t)$ справедливо предельное соотношение* (1.9), *и существует число $\sigma \ge 1$, для которого выполнены условия* (3.10) *и $|\dot h(t)| \le Kh^{1+\frac{1-\sigma}{\varsigma}}(t)$ при $t \ge 0$, $K = \mathrm{const} > 0$, то положение равновесия $q = \dot q = 0$ системы* (4.1) *неустойчиво.*

С использованием функции Ляпунова

$$V(t,q,\dot q) = \Pi(q) + T(q,\dot q) - \gamma_1 h^{\sigma}(t)\|\dot q\|^{\beta-1}q^T\dot q + \gamma_2 h^{\sigma}(t)\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}\right)^{\frac{\kappa}{\mu}}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i},$$

где $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $\beta \ge 1$, $\kappa \ge \mu$, причем κ/μ — рациональное число с нечетными числителем и знаменателем, доказательство настоящей теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 6.

5. Условия неустойчивости для систем с отрицательно определенным потенциалом

Предположим теперь, что уравнения (1.7) представимы в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q} - \frac{\partial T}{\partial q} = h(t)Q^{(d)}(t,q,\dot q) - \frac{\partial \Pi}{\partial q} + N(t,q,\dot q) + Q^{(v)}(t,q,\dot q). \qquad (5.1)$$

Здесь векторы $Q^{(d)}(t,q,\dot q)$, $N(t,q,\dot q)$, $Q^{(v)}(t,q,\dot q)$ соответственно диссипативных, неконсервативных и возмущающих сил непрерывны в области $\Omega(0,\varrho)$; потенциальная энергия $\Pi(q)$ — непрерывно дифференцируемая при $q\in\mathbb{R}^n$ однородная функция порядка $\mu+1$, $\mu\geq 1$; нестационарный параметр $h(t)$ — положительная и непрерывная при $t\geq 0$ функция. Пусть в области $\Omega(0,\varrho)$ справедливы оценки $\|Q^{(d)}(t,q,\dot q)\|\leq c_1\left(\|q\|^\lambda\|\dot q\|+\|\dot q\|^\nu\right)$, $\|Q^{(v)}(t,q,\dot q)\|\leq c_2\left(\|q\|^\delta+\|\dot q\|^\xi\right)$, где c_1, c_2, ν, λ, δ, ξ — положительные постоянные. Таким образом, система (5.1) имеет положение равновесия $q=\dot q=0$.

Теорема 9. *Если параметр $h(t)$ удовлетворяет условию (1.9), а функция $\Pi(q)$ отрицательно определена, то при выполнении неравенств*

$$\lambda\geq\frac{\mu-1}{2},\quad \nu\geq\frac{2\mu}{\mu+1},\quad \delta>\mu,\quad \xi>\frac{2\mu}{\mu+1} \tag{5.2}$$

положение равновесия $q=\dot q=0$ системы (5.1) неустойчиво.

Доказательство. Функцию Ляпунова строим в виде $V(q,\dot q)=q^T\dfrac{\partial T}{\partial\dot q}$. Дифференцируя ее в силу системы (5.1), получаем, что в области $\Omega(0,\varrho)$ справедлива оценка

$$\dot V(t,q,\dot q)\geq 2k_1\|\dot q\|^2+a_1\|q\|^{\mu+1}-$$
$$-a_2\|q\|\Big(\|\dot q\|^2+\|q\|^\delta+\|\dot q\|^\xi+h(t)\left(\|q\|^\lambda\|\dot q\|+\|\dot q\|^\nu\right)\Big),$$

где $a_1>0$, $a_2>0$.

Если выполнены неравенства (5.2), то при достаточно больших t и достаточно малых значениях $\|q\|$ и $\|\dot q\|$ имеем

$$\dot V(t,q,\dot q)\geq k_1\|\dot q\|^2+\frac{a_1}{2}\|q\|^{\mu+1}.$$

Следовательно [13], положение равновесия $q=\dot q=0$ системы (5.1) неустойчиво. □

Замечание 6. По сравнению с теоремами 5 и 8, в теореме 9 накладываются более жесткие условия на потенциал (предполагается его отрицательная определенность), но при этом не требуется дополнительных условий на скорость стремления к нулю нестационарного параметра. Кроме того, неустойчивость положения равновесия имеет место при произвольных неконсервативных силах.

Список литературы

1. Александров А. Ю. Устойчивость движений неавтономных динамических систем / А. Ю. Александров. – СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2004.

2. Александров А. Ю. Об устойчивости положений равновесия нелинейных неавтономных механических систем / А. Ю. Александров // Прикл. математика и механика. – 2007. – Т. 71, № 3. – С. 361–376.
3. Александров А. Ю. Об асимптотической устойчивости положений равновесия механических систем с нестационарным ведущим параметром / А. Ю. Александров, А. А. Косов // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 2008. – № 3. – С. 8–22.
4. Андреев А. С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы / А. С. Андреев // Прикл. математика и механика. – 1984. – Т. 48, № 2. – С. 225–232.
5. Вульфсон И. И. Учет нелинейных диссипативных сил при ограниченной исходной информации / И. И. Вульфсон // Теория механизмов и машин. – 2003. – № 1. – С. 70–77.
6. Зубов В. И. Каноническая структура векторного силового поля / В. И. Зубов // Проблемы механики твердого деформируемого тела. – Л.: Судостроение, 1970. – С. 167–170.
7. Карапетян А. В. Об устойчивости неконсервативных систем / А. В. Карапетян // Вестн. МГУ. Сер. Математика и механика. – 1975. – № 4. – С. 109–113.
8. Косов А. А. Об экспоненциальной устойчивости и стабилизации неавтономных механических систем с неконсервативными силами / А. А. Косов // Прикл. математика и механика. – 2007. – Т. 71, № 3. – С. 411–426.
9. Лахаданов В. М. О влиянии структуры сил на устойчивость движения / В. М. Лахаданов // ПММ. – 1974. – Т. 38, № 2. – С. 246–253.
10. Леонов Г. А. Проблема обоснования первого приближения в теории устойчивости движения / Г. А. Леонов // Успехи механики. – 2003. – Т. 2, № 3. – С. 3–35.
11. Лурье А. И. Аналитическая механика / А. И. Лурье. – М. : Физматгиз, 1961.
12. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. – М. ; Л. : ОНТИ, 1935.
13. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин. – М. : Наука, 1966. – 525 с.
14. Матросов В. М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем / В. М. Матросов. – М. : Физматлит, 2001. – 384 с.
15. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения / Д. Р. Меркин. – М. : Наука, 1987.
16. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике / Н. Г. Четаев. – М. : Изд-во АН СССР, 1962. – 535 с.
17. Хатвани Л. О действии демпфирования на свойства устойчивости равновесий неавтономных систем / Л. Хатвани // Прикл. математика и механика. – 2001. – Т. 65, № 4. – С. 725–732.
18. Hatvani L. A necessary and sufficient condition for the asymptotic stability of the damped oscillator / L. Hatvani, T. Krisztin, V. Totik // J. Different. Equat. – 1995. – Vol. 119, N 1. – P. 209–223.
19. Sun J. A less conservative stability test for second-order linear time-varying vector differential equations / J. Sun, O. G. Wang, Q. C. Zhong // Intern. J. of Control. – 2007. – Vol. 80, N 4. – P. 523–526.

A. Yu. Aleksandrov, A. A. Kosov, A. V. Platonov

On the preservation of instability of mechanical systems under the evolution of dissipative forces

Abstract. The mechanical systems described by the Lagrange differential equations of the second kind with nonstationary evolution of dissipative forces are studied. It is assumed that the evolution results in domination, or disappearing of dissipative forces. In the case of nonapplicability of known for nonstationary linearizations classical criteria, the theorems on the instability by the linear approximation of the equilibrium position are proved. The systems with essentially nonlinear dissipative forces are investigated. It is assumed that dissipative forces are determined by the homogeneous Rayleigh function, or depend on generalized coordinates. For such systems, the conditions of instability of the equilibrium position are also obtained.

Keywords: mechanical systems, dissipative forces, stability, Lyapunov functions, nonstationary parameter.

Александров Александр Юрьевич, доктор физико-математических наук; Санкт-Петербургский государственный университет; 198504, г. Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 35; тел.: (812) 428 45 08 (alex43102006@yandex.ru).

Косов Александр Аркадьевич, кандидат физико-математических наук; Учреждение Российской академии наук Институт динамики систем и теории управления СО РАН; 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134; тел.: (3952) 42 71 00 (kosov_idstu@mail.ru).

Платонов Алексей Викторович, кандидат физико-математических наук; Санкт-Петербургский государственный университет; 198504, г. Санкт-Петербург, Петродворец, Университетский пр., 35; тел.: (812) 428 45 08 (al-platon1@yandex.ru).

Aleksandrov Alexander Yurjevich, Professor; St. Petersburg State University; 35, Universitetskii pr., Petrodvorets, St. Petersburg, 198504; Phone: (812) 428 45 08 (alex43102006@yandex.ru).

Kosov Alexander Arkadyevich, Leading researcher; Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (IDSTU SB RAS); Post Box 292, 134, Lermontov str., Irkutsk, 664033, Russia; Phone: (3952) 42 71 00 (kosov_idstu@mail.ru).

Platonov Alexey Victorovich, Associate professor; St. Petersburg State University; 35, Universitetskii pr., Petrodvorets, St. Petersburg, 198504; Phone: (812) 428 45 08 (al-platon1@yandex.ru).