Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 3. С. 42—53

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.1, 519.8

Минимизация модулярных и супермодулярных функций на L-матроидах

В. А. Баранский
Уральский государственный университет

М. Ю. Выплов, В. П. Ильев
Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского

Аннотация. Матроид можно рассматривать как идеал специального вида в булевой решётке. Предлагается аналог понятия матроида для конечных геометрических решёток и исследуется возможность обобщения теоремы Радо-Эдмондса. Получена гарантированная оценка точности жадного алгоритма для задачи минимизации супермодулярной функции на матроидной структуре в геометрической решётке.

Ключевые слова: модулярная функция; супермодулярная функция; геометрическая решётка; L-матроид; жадный алгоритм; гарантированная оценка точности.

Введение

В настоящей работе рассматриваются задачи минимизации модулярных и супермодулярных функций в конечных геометрических решётках.

Приведём необходимые определения теории решёток [2, 3]. *Решёткой* называется частично упорядоченное множество L, в котором любые два элемента имеют точную нижнюю грань $x \wedge y$ и точную верхнюю грань $x \vee y$. *Подрешёткой* решётки L называется подмножество $X \subseteq L$ такое, что если $a, b \in X$, то $a \wedge b \in X$ и $a \vee b \in X$. Если $a \leq b$ в решётке L, то *(замкнутый) интервал* $[a, b]$, состоящий из всех элементов $x \in L$, которые удовлетворяют неравнству $a \leq x \leq b$, всегда будет подрешёткой. Говорят, что элемент решётки y *покрывает* элемент x (обозначается $x <\cdot\, y$), если $x < y$ и из соотношения $x < z \leq y$ следует $y = z$. Решётка L называется *полумодулярной*, если для любых $x, y \in L$ выполняется соотношение $x \wedge y <\cdot x \Rightarrow y <\cdot\, x \vee y$. Решётка L называется *модулярной*, если для любых $x, y, z \in L$ из условия $x \leq z$

следует равенство $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$. Если решётка L содержит наименьший элемент, то этот элемент называется *нулём* и обозначается 0; аналогично, наибольший элемент решётки называется *единицей* и обозначается 1. *Высотой* (или *размерностью*) $h(x)$ элемента x конечной решётки L называется длина самой длинной цепи от 0 до x. *Атомами* (или *точками*) решётки называются элементы, покрывающие 0. *Коатомами* (или *коточками*) решётки называются элементы, покрываемые 1. Решётка называется *атомарной (точечной)*, если каждый её элемент является точной верхней гранью некоторого множества атомов. Конечная решётка называется *геометрической*, если она атомарна и полумодулярна. Любой интервал геометрической решётки также является геометрической решёткой. Элемент $x' \in L$ называется *дополнением* элемента $x \in L$, если $x \vee x' = 1$ и $x \wedge x' = 0$. В геометрической решётке дополнения существуют для всех элементов.

Подмножество I решётки L называется *порядковым идеалом*, если для любых $x, y \in L$ выполняется условие

$$(x \in I, y < x) \Rightarrow y \in I.$$

В булевой решётке всех подмножеств конечного множества понятию порядкового идеала соответствует понятие системы независимости.

Пусть V — непустое множество, $\mathcal{A} \subseteq 2^V$ — непустое семейство его подмножеств. Семейство $\mathcal{A}$ называется *системой независимости*, если для всех $A, A' \subseteq V$ выполняется *аксиома наследственности*:

$$(A1) \quad (A \in \mathcal{A}, A' \subseteq A) \Rightarrow A' \in \mathcal{A}.$$

Множество называется *независимым*, если оно принадлежит $\mathcal{A}$, и *зависимым* в противном случае. *Базами множества* $X \subseteq V$ называются максимальные по включению независимые подмножества множества X. Базы множества V называются *базами* системы независимости. *Циклами* называются минимальные по включению зависимые подмножества V.

Важным частным случаем систем независимости являются матроиды. Система независимости $\mathcal{A}$ называется *матроидом* на V, если для любого $X \subseteq V$ все базы множества X равномощны.

Хорошо известно следующее эквивалентное определение: система независимости $\mathcal{A}$ называется *матроидом* на V, если выполняется *аксиома пополнения*:

$$(A2) \quad (A, A' \in \mathcal{A}, |A'| > |A|) \Rightarrow \exists a \in A' \setminus A \ (A \cup \{a\} \in \mathcal{A}).$$

Несложно проверить, что отображение $X \to \overline{X}$ множества 2^V в себя, определенное по правилу

$$\overline{X} = X \cup \{v \in V \ : \ \exists \ A \subseteq X \text{ такое, что } A \in \mathcal{A}, \ A \cup \{v\} \notin \mathcal{A}\},$$

является оператором замыкания. Замкнутые множества матроида на множестве V образуют решётку, в которой $X \wedge Y = X \cap Y$ и $X \vee Y = \overline{X \cup Y}$ для любых $X, Y \subseteq V$.

Следующая теорема раскрывает связь между матроидами и геометрическими решётками.

Теорема (Биркгоф-Уитни). *Решётка замкнутых множеств матроида — геометрическая. И обратно, любая геометрическая решётка изоморфна решётке замкнутых множеств некоторого матроида.*

По этой причине в книге [3] геометрические решётки названы *матроидными.*

Функция $f : L \to R_+$ называется *супермодулярной на решётке* L, если для любых $x, y \in L$ выполняется неравенство

$$f(x \vee y) + f(x \wedge y) \geq f(x) + f(y).$$

В случае равенства функция f называется *модулярной на решётке* L.

Задачи оптимизации модулярных и супермодулярных функций возникают в различных областях дискретной математики и изучались в течение ряда лет многими авторами. Так, задача минимизации супермодулярной функции на булевой решётке рассматривалась В. П. Черениным [6]. В. Р. Хачатуров впервые сформулировал и исследовал задачи оптимизации супермодулярных функций на произвольных решётках [5]. В. Р. Хачатуровым вместе с соавторами предложено большое количество теоретических результатов и методов решения задач оптимизации супермодулярных функций на решётках различных типов (см. обзорную статью [10]).

Как следует из теоремы Радо–Эдмондса [8, 11], в булевой решётке задача минимизации модулярной функции на матроиде разрешима жадным алгоритмом (обычно теорема Радо-Эдмондса формулируется для задачи максимизации линейной функции, однако она верна и для задач максимизации и минимизации модулярной функции).

В случае произвольной супермодулярной функции жадный алгоритм даже на матроиде может не найти оптимальное решение и должен рассматриваться лишь как приближённый метод. В работе [4] получена гарантированная оценка точности жадного алгоритма для задачи минимизации неубывающей супермодулярной функции множеств на матроиде в терминах кривизны c_f — параметра, характеризующего ускорение возрастания целевой функции f. Для любой супермодулярной функции $c_f \in [0, 1]$ и $c_f = 0$ тогда и только тогда, когда функция f модулярна. Доказано, что $(1 - c_f)f(S_{GA}) \leq f(S_O)$, где S_{GA} — решение, найденное жадным алгоритмом, а S_O — оптимальное решение.

В настоящей работе рассматриваются задачи минимизации модулярных и супермодулярных функций на порядковых идеалах специального вида в конечных геометрических решётках. Эти задачи являются обобщениями известных задач минимизации аддитивных и супермодулярных функций на системах независимости и матроидах, к которым сводятся, например, такие NP-трудные задачи, как задача о p-медиане на минимум [9], задача аппроксимации графа [1] и др. Предлагается обобщение понятия матроида и исследуется возможность обобщения теоремы Радо-Эдмондса на геометрические решётки. Кроме того, получена оценка точности жадного алгоритма на матроидной структуре в геометрической решётке.

1. L-матроиды

Дунстан, Инглтон и Уэлш [7] ввели понятие суперматроида как обобщение понятия матроида в частично упорядоченном множестве с нулем. Для конечной решетки L это определение приобретает следующий вид. Пусть I — порядковый идеал в L. Он называется *суперматроидом* или *L-матроидом*, если для любого $x \in L$ все максимальные элементы из $I \cap [0, x]$ имеют одинаковую высоту.

В [7] доказано, что идеал I в конечной модулярной решетке L является L-матроидом, если и только если выполнена одна из следующих эквивалентных аксиом, в некотором смысле обобщающих аксиому пополнения (A2):

1^0 $x, y \in I, h(x) > h(y) \Rightarrow \exists z \in I : y \leq z \leq x \vee y, h(z) = h(x);$

2^0 $x, y \in I, h(x) > h(y) \Rightarrow \exists w \in I : w \leq x, w \vee y \in I, h(w \vee y) = h(x).$

Таким образом, в модулярной решетке имеется три эквивалентных определения L-матроида. Но уже в конечной геометрической (немодулярной) решетке эти определения неэквивалентны.

В геометрической решетке, учитывая ее атомарность, можно определить аналог матроида, напрямую обобщив аксиому пополнения (A2). Обозначим $At(L) = \{a \in L : a \cdot > 0\}$, $At(x) = \{a \in At(L) : a \leq x\}$ для любого $x \in L$.

Лемма 1. *Пусть I — порядковый идеал в конечной геометрической решётке L. Если для него выполняется условие*

3^0 $x, y \in I, h(x) > h(y) \Rightarrow \exists a \in At(x) \setminus At(y) : y \vee a \in I,$

то I является L-матроидом.

Доказательство. Предположим противное: пусть существует такой элемент $x \in L$, что интервал $[0, x]$ содержит два максимальных элемента $b_1, b_2 \in I$, причём $h(b_2) > h(b_1)$. Из 3^0 следует, что существвет такой элемент $a \in At(b_2) \setminus At(b_1)$, что $b_1 \vee a \in I$. Так как $b_1 < x$ и $b_2 \leq x$, то $a \leq b_2 \leq x$ и $b_1 \vee a \leq x$. Но $b_1 < b_1 \vee a$, поэтому b_1 не может быть максимальным элементом в $I \cap [0, x]$. Противоречие. □

Утверждение, обратное лемме 1, в общем случае неверно. Не всякий L-матроид обладает свойством 3^0, как показывает следующий пример.

Пример 1. На рис. 1 изображена немодулярная геометрическая решётка замкнутых множеств матроида на четырёх элементах, имеющего ровно один цикл $\{a, b, c, d\}$. Метка a соответствует множеству $\{a\}$, метка ad — множеству $\{a, d\}$ и т. д. Порядковый идеал I является L-матроидом, но свойство 3^0 для него не выполняется ($x = bc, y = a$).

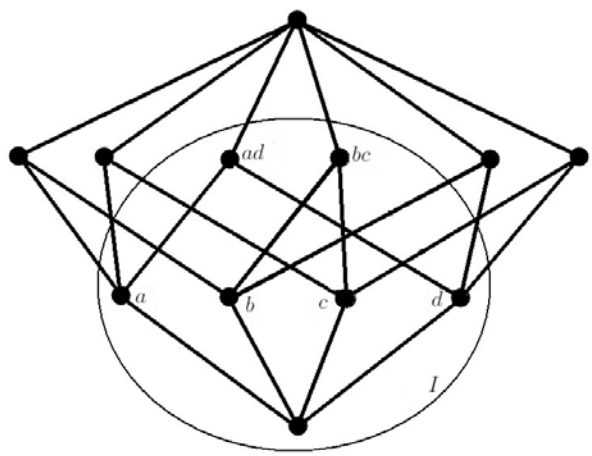

Рис. 1

2. Минимизация модулярной функции на L-матроиде

Функция $f : L \to R_+$ называется *модулярной* на решётке L, если для любых $x, y \in L$ выполняется равенство

$$f(x \vee y) + f(x \wedge y) = f(x) + f(y).$$

Рассмотрим оптимизационную задачу

$$\min\{f(x) :\ x \text{ — максимальный элемент (база) } I\}, \tag{2.1}$$

где I — L-матроид в конечной геометрической решётке L, $f : L \to R_+$ — неубывающая модулярная функция, $f(0) = 0$.

Для решения задачи (2.1) применим жадный алгоритм, который выбирает элементы решётки, начиная с нуля, таким образом, что каждый следующий элемент L-матроида должен покрывать предыдущий и возрастание целевой функции на нём должно быть наименьшим.

Жадный алгоритм GA

Шаг 0. $x_0 \leftarrow 0$, перейти на шаг 1.
Шаг i ($i \geqslant 1$). Выбрать такой $x_i \cdot\!> x_{i-1}$, что

$$f(x_i) = \min_{\substack{x \in I,\\ x \cdot> x_{i-1}}} f(x).$$

Перейти на шаг $i+1$. Если такого $x_i \cdot\!> x_{i-1}$ нет, то $S_{GA} \leftarrow x_{i-1}$.
Конец.

Справедливо следующее утверждение, обобщающее теорему Радо-Эдмондса в части, доказанной Радо [11].

Теорема 1. *Для любой неубывающей модулярной целевой функции жадный алгоритм гарантированно находит оптимальное решение задачи (2.1) на любом L-матроиде в конечной геометрической решётке L.*

Доказательство. Пусть b — база, построенная жадным алгоритмом. От противного, предположим, что существует база b' наименьшего возможного «веса» $f(b')$, такая, что $f(b') < f(b)$. Тогда $h(b') = h(b) = t$. Поскольку $b \not\leq b'$, имеем $x_t \not\leq b'$ и $x_0 \leq b'$. В качестве i возьмём наибольшее $i \in \{1, \ldots, t\}$ такое, что $x_i \not\leq b'$ и $x_{i-1} \leq b'$.

Среди баз наименьшего возможного веса возьмём базу b', для которой i принимает наибольшее возможное значение. Тогда равенство $x_i \wedge b' = x_{i-1}$ в силу полумодулярности L влечёт $b' \vee x_i \cdot\!> b'$. Возьмём максимальную цепь $x_i <\!\cdot \ldots <\!\cdot b'' < b' \vee x_i$, такую, что $b'' \in I$. Тогда b' и b'' — это базы элемента $b' \vee x_i$. Поэтому $h(b'') = h(b') = h(b) = t$, т. е. b'' — база L-матроида I. Поскольку $x_i \leq b''$, в силу выбора b' имеем $f(b'') > f(b')$. Далее, условие $h(b' \vee x_i) = h(b') + 1 = h(b'') + 1$ влечёт $b'' <\!\cdot b' \vee x_i$.

Элементы b' и b'' имеют одинаковую высоту, поэтому $[x_{i-1}, b']$ — неодноэлементная геометрическая решётка. Элемент b' является точной верхней гранью некоторого множества A атомов решётки $[x_{i-1}, b']$, т. е. $b' = \bigvee A$. Если $y \leq b''$ для любого $y \in A$, то $b' \leq b''$, откуда $b' = b''$, что противоречит условию $f(b'') > f(b')$. Следовательно, существует $y \in A$ такой, что $y \not\leq b''$ и $x_{i-1} <\!\cdot y \leq b'$. Отсюда вытекает $b'' \vee y = b' \vee x_i$ и $b'' \wedge y = x_{i-1}$. Ясно, что $b' \wedge x_i = x_{i-1}$.

Далее, имеем $f(b'' \vee y) = f(b' \vee x_i)$, и поэтому $f(b'' \vee y) + f(b'' \wedge y) = f(b' \vee x_i) + f(b' \wedge x_i)$. Отсюда в силу модулярности функции f получаем $f(b'') + f(y) = f(b') + f(x_i)$, и поэтому $f(b') + f(y) < f(b'') + f(y) = f(b') + f(x_i)$. Следовательно, $f(y) < f(x_i)$, что противоречит жадному выбору элемента x_i (на i-том шаге алгоритма GA можно было выбрать элемент меньшего веса).

Таким образом, b — база наименьшего возможного веса. □

Интересен вопрос, выполняется ли для L-матроида аналог теоремы Эдмондса [8]? А именно, верно ли, что если жадный алгоритм GA для любой модулярной целевой функции гарантированно находит оптимальную базу порядкового идеала I конечной геометрической решётки, то I является L-матроидом? Оказывается, что это в общем случае неверно как для модулярных, так и для немодулярных геометрических решёток, что иллюстрируется примерами 2 и 3.

Пример 2. На рис. 2 изображена модулярная геометрическая решётка замкнутых множеств матроида на шести элементах, имеющего ровно два цикла $\{a, b, c\}$ и $\{d, e, g\}$. Для любой модулярной функции f жадный алгоритм гарантированно находит базу минимального веса порядкового идеала I, не являющегося L-матроидом.

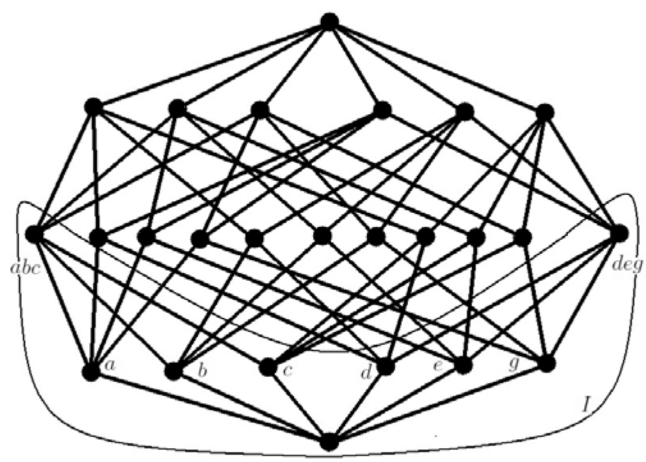

Рис. 2

Действительно, из модулярности функции следует, что $f(a) = f(b) = f(c)$, $f(d) = f(e) = f(g)$. Пусть, например, $f(a) = f(b) = f(c) = f_1 < f_2 = f(d) = f(e) = f(g)$. Тогда жадный алгоритм GA найдёт базу минимального веса: $f(abc) = 2f_1 < 2f_2 = f(deg)$.

Пример 3. На рис. 3 изображена немодулярная геометрическая решётка замкнутых множеств матроида на пяти элементах, имеющего ровно один цикл $\{a, b, d, e\}$. Для любой модулярной функции f жадный алгоритм гарантированно находит базу минимального веса порядкового идеала I, не являющегося L-матроидом (так как среди всех элементов I только для c значение $f(c)$ может быть ненулевым).

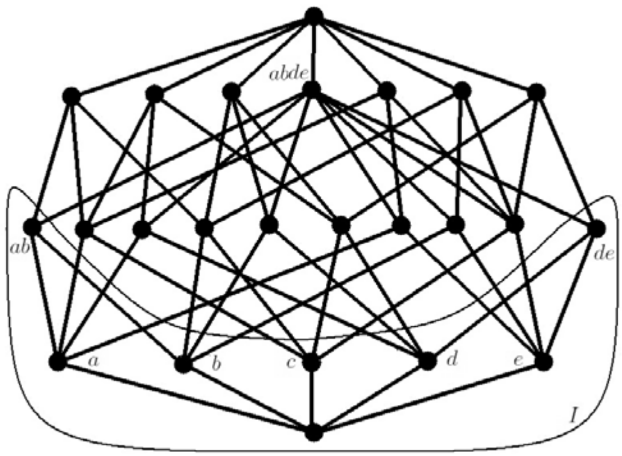

Рис. 3

Действительно, $abde = ab \vee de = a \vee de = b \vee de = ab \vee d = ab \vee e$, $ab \wedge de = 0$. Из модулярности функции следует $f(abde) = f(ab) + f(de) = f(a) + f(de) = f(b) + f(de) = f(ab) + f(d) = f(ab) + f(e)$, откуда $f(ab) = f(a) = f(b)$ и $f(de) = f(d) = f(e)$. Так как $f(ab) = f(a) + f(b)$ и $f(de) = f(d) + f(e)$, то $f(a) = f(b) = f(ab) = f(d) = f(e) = f(de) = 0$. Если $f(c) > 0$, то жадный алгоритм гарантированно найдёт оптимальное решение.

Итак, аналог теоремы Эдмондса в общем случае неверен ни для модулярных, ни для немодулярных геометрических решёток. Можно также отметить, что он неверен для любой задачи оптимизации модулярной функции (как максимизации, так и минимизации, как с ограничением на неотрицательность значений функции, так и без ограничения).

3. Минимизация супермодулярной функции на L-матроиде

Функция $f : L \to R_+$ называется *супермодулярной* на решётке L, если для любых $x, y \in L$ выполняется неравенство

$$f(x \vee y) + f(x \wedge y) \geq f(x) + f(y).$$

Рассмотрим оптимизационную задачу

$$\min\{f(x) : \ x \text{ — максимальный элемент (база) } I\}, \qquad (3.1)$$

где I — L-матроид в конечной геометрической решётке L, $f : L \to R_+$ — неубывающая супермодулярная функция, $f(0) = 0$.

Далее будет получена гарантированная оценка точности жадного алгоритма GA для задачи (3.1) в терминах кривизны целевой функции.

Кривизна c_f неубывающей супермодулярной функции на конечной решётке характеризует ускорение возрастания функции и определяется следующим образом:

$$c_f = \max_{\substack{a\in At(L),\\ d_1(a')>0}} \frac{d_1(a') - d_a(0)}{d_1(a')},$$

где $d_x(y) = f(x) - f(y)$, $x, y \in L, x\cdot> y$, a' — дополнение элемента a.

Лемма 2. *Пусть $x\cdot> a, y\cdot> b, a < b, x < y, x \nleq b$. Тогда $d_x(a) \leq d_y(b)$.*

Доказательство. Поскольку $y\cdot> b$ и $x\cdot> a$, то $y = x \vee a$ и $x \wedge b = a$. Таким образом, $d_y(b) = f(y) - f(b) = f(x \vee b) - f(b) \geq f(x) + f(b) - f(x \wedge b) - f(b) = f(x) - f(a) = d_x(a)$. □

Лемма 3. [2] *Пусть L — конечная геометрическая решётка, $[u_0, u_1] \subseteq L$; $x, a \in [u_0, u_1]$, причём $x \wedge a = u_0$. Тогда существует дополнение a' элемента a в подрешётке $[u_0, u_1]$, для которого $a' \geq x$.*

Обозначим $CoAt(L) = \{x \in L : x <\cdot 1\}, CoAt(y) = \{x \in CoAt(L) : y \leq x\}$.

Лемма 4. *Пусть L — конечная геометрическая решётка, $a \in At(L)$, a' — дополнение a. Тогда любой коатом $z \in CoAt(a')$ также является дополнением a.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда либо $z \vee a < 1$ и так как $z <\cdot 1$, то $z \vee a = z$, либо $z \wedge a > 0$ и так как $a\cdot> 0$, то $z \wedge a = a$. В любом случае имеем $z \geq a$. Но тогда из $z \geq a'$ следует $a' \vee a \leq z < 1$, что противоречит дополнительности a'. □

Лемма 5. *Пусть L — конечная геометрическая решётка. Тогда $(1 - c_f)d_{x\vee a}(x) \leq d_a(0)$ для любых $x \in L, a \in At(L) \setminus At(x)$.*

Доказательство. Заметим, что $x\vee a\cdot> x$ следует из $a\cdot> 0$ в силу полумодулярности L, поэтому мы можем рассматривать приращение $d_{x\vee a}(x)$. Заметим также, что при $d_{x\vee a}(x) = 0$ утверждение леммы тривиально выполняется, поэтому будем рассматривать случай, когда $d_{x\vee a}(x) > 0$.

Так как $x \wedge a = 0$, то по лемме 3 существует такое дополнение a' элемента a, что $a' \geq x$. Тогда в силу леммы 4 произвольный коатом $z \in CoAt(a')$ также является дополнением a. Значит, $z \geq a' \geq x$. Имеем $d_{x\vee a}(x) \leq d_1(z)$ (в случае $x = z$ это очевидно, в случае $x < z$ следует из леммы 2). Далее, из определения c_f вытекает, что

$$1 - c_f = \min_{\substack{a\in At(L),\\ d_1(a')>0}} \frac{d_a(0)}{d_1(a')} \leq \frac{d_a(0)}{d_1(z)} \leq \frac{d_a(0)}{d_{x\vee a}(x)}.$$

$\square$

Теорема 2. *Пусть S_O — оптимальное решение задачи (3.1), S_{GA} — решение, найденное жадным алгоритмом GA. Если L-матроид обладает свойством 3^0, то справедлива оценка $(1 - c_f)f(S_{GA}) \leq f(S_O)$.*

Доказательство. Пусть x_i — элемент, выбранный жадным алгоритмом на i-том шаге. Если существует цепь $\{0 = b_0 \lessdot b_1 \lessdot \ldots \lessdot b_p = S_O\}$ такая, что для всех $i = 0, 1, \ldots, p-1$ выполнено

$$(1 - c_f)d_{x_{i+1}}(x_i) \leq d_{b_{i+1}}(b_i), \tag{3.2}$$

то

$$(1 - c_f)f(S_{GA}) = (1 - c_f)\sum_{i=0}^{p-1} d_{x_{i+1}}(x_i) \leq \sum_{i=0}^{p-1} d_{b_{i+1}}(b_i) = f(S_O),$$

что и требуется доказать.

Построим нужную нам цепь, удовлетворяющую (3.2). Пусть уже найдены элементы $b_p = S_O, b_{p-1}, \ldots, b_{i+1}$. Так как $h(b_{i+1}) = h(x_i) + 1$, то по свойству 3^0 существует $a \in At(b_{i+1}) \setminus At(x_i)$, такой, что $x_i \vee a \in I$. В силу леммы 4 существует элемент $b \in CoAt([0, b_{i+1}])$, являющийся дополнением атома a в решётке $[0, b_{i+1}]$. Положим $b_i = b$. По лемме 2 $d_a(0) \leq d_{b_{i+1}}(b_i)$, в силу леммы 5 $(1 - c_f)d_{x_i \vee a}(x_i) \leq d_a(0)$. Наконец, по выбору элемента x_{i+1} жадным алгоритмом

$$d_{x_{i+1}}(x_i) = \min_{x \gtrdot x_i} d_x(x_i) \leq d_{x_i \vee a}(x_i).$$

Таким образом, $(1 - c_f)d_{x_{i+1}}(x_i) \leq (1 - c_f)d_{x_i \vee a}(x_i) \leq d_a(0) \leq d_{b_{i+1}}(b_i)$, т. е. неравенство (3.2) получено. $\square$

Пример 4. Для произвольной конечной решётки теорема 2 в общем случае неверна. На рис. 4 изображена неполумодулярная решётка, рядом с каждым элементом указано значение неубывающей супермодулярной функции f.

При любом положительном значении параметра t жадный алгоритм на L-матроиде I находит решение S_{GA}, для которого $f(S_O) = \frac{4}{8+t}f(S_{GA})$, тогда как величина $1 - c_f$ для данной функции равна $\frac{1}{2}$.

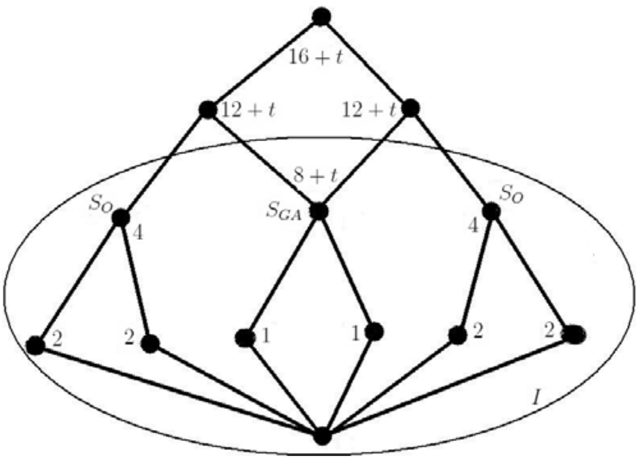

Рис. 4

Список литературы

1. Вычислительная сложность задачи аппроксимации графов / А. А. Агеев, В. П. Ильев, А. В. Кононов, А. С. Талевнин // Дискрет. анализ и исследование операций. Сер. 1. – 2006. – Т. 13, № 1. – С. 3–15.
2. Айгнер М. Комбинаторная теория / М. Айгнер. – М. : Мир, 1982. –
3. Биркгоф Г. Теория решеток / Г. Биркгоф. – М. : Наука, 1984. –
4. Ильев В. П. Задачи минимизации супермодулярных функций на матроидах и коматроидах / В. П. Ильев, С. Д. Ильева // Проблемы оптимизации и экономические приложения : материалы IV Всерос. конф. 29 июня – 4 июля 2009 г. – Омск : Полиграф. центр КАН, 2009. – С. 51–55.
5. Хачатуров В. Р. Супермодулярные функции на решетках / В. Р. Хачатуров // Проблемы прикладной математики и информатики. – М. : Наука, 1987. – С. 251–262.
6. Черенин В. П. Решение некоторых комбинаторных задач оптимального планирования методом последовательных расчетов / В. П. Черенин // Научно-методические материалы экономико-математического семинара Лаборатории экономико-математических методов АН СССР. – М., 1962. – Вып. 2.
7. Dunstan F. Supermatroids / F. Dunstan, A. Ingleton, D. Welsh // Combinatorics, Southend-on Sea. – 1972. – P. 338–353.
8. Edmonds J. Matroids and the greedy algorithm / J. Edmonds // Math. Programming. – 1971. – Vol. 1, N 2. – P. 127–136.
9. Kariv O. An algorithmic approach to network location problems. II. The p-medians / O. Kariv, S. L. Hakimi // SIAM J. Appl. Math. – 1979. – Vol. 37, N 3. – P. 539–560.
10. Khachaturov V. R. Supermodular programming on lattices / V. R. Khachaturov, R. V. Khachaturov, R. V. Khachaturov // Computer Science J. of Moldova. – 2003. – Vol. 11, N 1 (31). – P. 43–66.

11. Rado R. Note on independence functions / R. Rado // Proc. London. Math. Soc. – 1957. – Vol. 7, N 3. – P. 300–320.

V. A. Baranski, M. Yu. Vyplov, V. P. Il'ev

Minimizing modular and supermodular functions on L-matroids

Abstract. A matroid can be viewed as an ideal of special kind in the boolean lattice. An analog of the notion of matroid for the case of finite geometric lattices is proposed and the following question is studied: whether a generalization of the Rado-Edmonds theorem can be proved? A bound on worst-case behaviour of the greedy algorithm for the problem of minimizing a supermodular function on a matroidal structure in the geomitric lattice is obtained.

Keywords: modular function, supermodular function, geometric lattice, L-matroid, greedy algorithm, performance guarantee

Баранский Виталий Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, Уральский государственный университет, 620083, Екатеринбург, пр. Ленина, 51, Тел.: (343) 350-62-14 (vitali.baranski@usu.ru)

Выплов Михаил Юрьевич, программист, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, 644077, Омск, пр. Мира 55-а, Тел.: (3812) 22-26-09 (vyplov@omsu.ru)

Ильев Виктор Петрович, доктор физико-математических наук, доцент, Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского, 644077, Омск, пр. Мира 55-а, Тел.: (3812) 22-56-96 (iljev@mail.ru)

Baranski Vitali, Ural State University, 51, Lenina pr., Ekaterinburg, 620083, professor, Phone: (343) 350-62-14 (vitali.baranski@usu.ru)

Vyplov Mikhail, Omsk State University, 55-a, Mira pr., Omsk, 644077, programmer, Phone: (3812) 22-26-09 (vyplov@omsu.ru)

Il'ev Victor, Omsk State University, 55-a, Mira pr., Omsk, 644077, associate professor, Phone: (3812) 22-56-96 (iljev@mail.ru)