



Серия «Математика»

2014. Т. 7. С. 3–18

Онлайн-доступ к журналу:

<http://isu.ru/izvestia>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

УДК 518.5

Многокритериальная оптимизация динамики пучков

Л. В. Владимирова

Санкт-Петербургский государственный университет

Аннотация. В статье рассмотрена задача оптимизации динамики заряженного пучка, которая формулируется как задача управления ансамблем траекторий соответствующей динамической системы. Качество управляемого процесса оценивается значениями функционалов, заданных на траекториях пучка. К данной задаче применяется подход многокритериальной оптимизации, в том числе рассматривается метод главных критериев. Проведена многокритериальная оптимизация продольной динамики пучка электронов в ускорителе на бегущей волне. Представлена приближенная компромиссная кривая.

Ключевые слова: многокритериальная оптимизация, эффективные управления, компромиссная кривая, пучок заряженных частиц, линейный ускоритель.

Введение

Работа посвящена многокритериальной оптимизации в задачах управления динамикой пучка заряженных частиц. Проблема оптимизации динамики заряженных пучков в ускоряющих и фокусирующих системах является актуальной и рассматривается многими авторами. В частности, этой тематике посвящены исследования, проводимые в Санкт-Петербургском университете [3; 5; 7-10; 12; 14-18], в рамках которых применялась рассмотренная в данной статье методика и получены результаты.

Многие прикладные оптимизационные задачи физики пучков по существу являются многокритериальными, так как при выборе наилучшего решения приходится рассматривать несколько критериев качества [1; 2; 19]. Когда критерии противоречивы, то улучшение результатов по одному критерию ведёт к ухудшению значений другого критерия. В таком случае имеет смысл применять многокритериальную оптимизацию. Решением будет множество эффективных управлений, при которых векторы критериев качества будут неулучшаемы [1; 13; 19].

Опыт численной оптимизации продольной динамики заряженных частиц показал, что требуется рассматривать, по крайней мере, два критерия: один из них связан с высоким качеством группировки по фазам, а другой «отвечает» за малый разброс частиц по энергиям [3; 7; 19], причем эти критерии противоречивы.

1. Множество Парето и множество эффективных управлений

Приведём необходимые определения и алгоритм метода многокритериальной оптимизации [1; 13].

Будем рассматривать задачи оптимального управления системами, в которых качество управляемого процесса оценивается вектором критериев

$$K(u) = (K_1(u), K_2(u), \dots, K_m(u)). \quad (1.1)$$

Здесь заданные функции $K_i(u)$, $i = \overline{1, m}$, называются *частными критериями*, u — управление, являющееся r -мерной вектор-функцией, зависящей от параметров $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$u = (u_i(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad i = \overline{1, r}). \quad (1.2)$$

Обозначим через U некоторый класс допустимых управлений. Вектор параметров $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ принимает значения в компакте $\Pi \subset E^n$. Каждому набору параметров $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ по (1.2) соответствует определённое управление u .

Обозначим через $\mathcal{K} = \{K(u), u \in U\} \subset E^m$ множество достижимых значений вектора критериев (1.1). Будем предполагать, что все частные критерии необходимо *минимизировать*.

Пусть имеются некоторые управления $u', u'' \in U$ и $K' = K(u')$, $K'' = K(u'')$ соответствующие значения векторов критериев в заданных управлениях.

Определение 1. Будем говорить, что вектор K' предпочтительнее вектора K'' ($K' \leq K''$) относительно нестрогого предпочтения (\leq) тогда и только тогда, когда выполняются нестрогие неравенства

$$K'_i \leq K''_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (1.3)$$

и хотя бы для одного $i = i_0$ выполняется строгое неравенство

$$K''_{i_0} < K'_{i_0}. \quad (1.4)$$

При этом говорят, что управление u' предпочтительнее управления u'' .

Определение 2. Вектор критериев $K^* = K(u^*) \in \mathcal{K}$ называется оптимальным по Парето, если не существует вектора $K \in \mathcal{K}$ такого, что $K \leq K^*$ (K предпочтительнее K^*), а соответствующее управление u^* называется эффективным управлением.

Обозначим через $\mathcal{K}^P \subset \mathcal{K}$ множество векторов критериев, оптимальных по Парето или множество неулучшаемых векторов критериев, а через $P(U) \subset U$ множество управлений, соответствующее множеству \mathcal{K}^P . Множество \mathcal{K}^P будем называть множеством Парето, а множество $P(U)$ — множеством эффективных управлений.

2. Алгоритм выделения множества Парето

Представим алгоритм построения приближенного множества Парето, считая, что множество \mathcal{K} аппроксимируется конечным числом точек. Продемонстрируем графически при $m = 2$ выделение из всех векторов критериев множества Парето. Для этого изобразим в пространстве критериев N точек $(K_1(u^i), K_2(u^i))$, $i = \overline{1, N}$ — значения векторных критериев (см. рис. 1, $N = 10$). Далее выберем произвольную точку и проведем пунктиром лучи параллельно положительному направлению осей. Точка, находящаяся в вершине образованного угла, по определению (1.3)–(1.4) предпочтительнее всех точек, находящихся на сторонах и внутри этого угла.

Отбросим все точки внутри и на сторонах построенного угла. Перейдем к любой другой из оставшихся точек и сделаем ту же самую процедуру. Процедура перебора точек закончится тем, что останутся точки, для которых нет предпочтительных. Такие точки на рис. 1 помечены звездочкой и составляют множество Парето. Эта процедура верна для любого m [13].

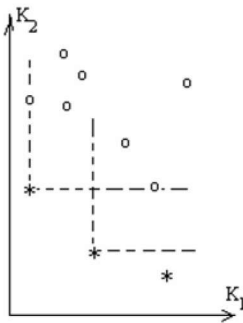


Рис. 1.

Множество Парето называют множеством неулучшаемых векторов критериев, то есть в множестве Парето нельзя найти такого вектора

критериев, у которого улучшался бы какой-либо из частных критериев, а остальные частные критерии при этом не ухудшались.

Компромиссная кривая. Особый интерес для практики представляет случай с двумя критериями ($m = 2$). Тогда множество паретовских точек является одномерным многообразием на плоскости и допускает графическое представление. Множество точек Парето в двумерном пространстве критериев называют *компромиссной кривой*.

3. Метод главных критериев [1-2; 4; 11; 19]

Метод главных критериев состоит в том, что на некоторые частные критерии (менее значительные по сравнению с другими частными критериями) задаются ограничения. Это позволяет сводить исходную многокритериальную задачу к многокритериальной задаче с меньшим числом частных критериев.

Пусть в качестве главных критериев выбраны, например, два из рассматриваемых критериев $K_{i_1}(u)$, $K_{i_2}(u)$, $i_1, i_2 = \overline{1, m}$, которые назовём *главными*. Для остальных критериев задаются *пороговые значения* h_i , $1 \leq i \leq m$, $i \neq i_1, i_2$ и накладываются ограничения

$$K_i(u) \leq h_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad i \neq i_1, i_2, \quad u \in U. \quad (3.1)$$

Условия (3.1) означают, что значения неглавных критериев не должны быть больше назначенной пороговой величины. Пороговые значения выбираются по смыслу поставленной задачи. Таким образом, можно многокритериальную задачу с m частными критериями свести к многокритериальной задаче с двумя критериями. В таком случае появляется возможность графического представления искомого множества Парето в виде компромиссной кривой.

4. Множество приближённо эффективных управлений [1; 13; 19]

Пусть N — число пробных точек, используемых для построения приближенного множества Парето. Смоделируем вектор параметров $(\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_n^{(i)})$ для i -го управления $u^{(i)}$ как значение случайного вектора, равномерно распределённого в параллелепипеде

$$\Pi = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : \theta_j^* \leq \alpha_j \leq \theta_j^{**}, \quad j = \overline{1, n}\}. \quad (4.1)$$

Тогда компоненты вектора параметров будут вычисляться по формулам

$$\alpha_j^{(i)} = \theta_j^* + (\theta_j^{**} - \theta_j^*) \cdot q_{i,j}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, N}. \quad (4.2)$$

Здесь $q_{i,j}$ — независимые реализации случайной величины, равномерно распределенной в интервале $(0, 1)$. Величины θ_j^* , θ_j^{**} , $j = \overline{1, n}$, задаются в соответствии с требованиями рассматриваемой задачи. Далее, используя соотношение (1.2), найдём управления $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(N)}$, которые составят множество $U_N = \{u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, u^{(N)}\}$. Соответствующее множество значений векторов критериев

$$K^{(i)} = K(u^{(i)}) = (K_1(u^{(i)}), K_2(u^{(i)}), \dots, K_m(u^{(i)})), \quad i = \overline{1, N},$$

обозначим через $\mathcal{K}_N : \mathcal{K}_N = \{K^{(1)}, K^{(2)}, \dots, K^{(N)}\}$.

Определение 3. Управление $u^{(0)} \in U_N$ называется приближенно эффективным, если не существует управления $u^{(i)} \in U_N$, для которого вектор критериев $K^{(i)} \in \mathcal{K}_N$ был бы предпочтительнее $K^{(0)}$ ($K^{(0)} = K(u^{(0)})$).

Множество всех приближенно эффективных управлений из U_N обозначим $P(U_N)$, а соответствующее ему множество в пространстве критериев через \mathcal{K}_N^P . Множество \mathcal{K}_N^P есть приближённое множество Парето.

Алгоритм поиска приближённого множества Парето аналогичен приведенному в п. 2 алгоритму нахождения множества Парето. Приближённое множество Парето для случая $m = 2$, т. е. для двух критериев, изображено на рис. 2. Это множество представляет собой $N_1 \leq N$ точек. На рис. 2 $N_1 = 6$. Соединим эти точки отрезками прямых и получим приближенную компромиссную кривую.

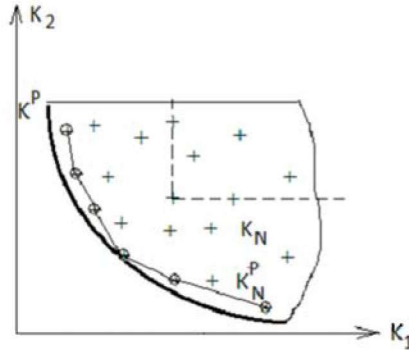


Рис. 2.

Сходимость приближённой компромиссной кривой к точной при стремлении числа испытаний к бесконечности. В работе [13] показывается, что при возрастании количества пробных точек N приближенная компромиссная кривая (ломаная) стремится к точной компромиссной кривой: $\mathcal{K}_N^P \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \mathcal{K}^P$. На рис. 2 точное множество

Парето \mathcal{K}^P — это сплошная линия, являющаяся юго-западной границей множества \mathcal{K} .

5. Задача оптимального управления ансамблем траекторий пучка заряженных частиц

Представим применение метода многокритериальной оптимизации к задачам управления пучком траекторий.

Рассмотрим задачу управления пучком заряженных частиц в линейном волноводном ускорителе. Введем следующую математическую модель управления, предложенную Д. А. Овсянниковым [7]. Пусть эволюция пучка частиц описывается следующими дифференциальными уравнениями:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} f(t, x, u) + \rho(t, x) \operatorname{div}_x f(t, x, u) = 0 \quad (5.2)$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0 \in \overline{M_0}, \quad (5.3)$$

$$\rho(0, x) = \rho_0(x). \quad (5.4)$$

Здесь $t \in [0, T]$ — независимая переменная (число T фиксировано); $x \in \Omega \subset E^n$ — n -мерный вектор фазовых координат частицы, Ω — открытое множество; $u = u(t)$ — r -мерная вектор-функция управления; $f(t, x, u)$ — n -мерная вектор-функция; M_0 — открытое ограниченное множество ненулевой меры; $\rho_0(x)$ — непрерывно дифференцируемая неотрицательная функция, $\int_{M_0} \rho_0(x_0) dx_0 = 1$. Считаем, что начальное

положение частицы x_0 есть значение n -мерной случайной величины X_0 , распределенной в M_0 с плотностью распределения вероятностей $\rho_0(x_0)$. Фазовое состояние частицы $x(t, x_0, u)$ будем рассматривать как значение n -мерной случайной величины X_t с плотностью распределения вероятностей $\rho(t, x)$. Взаимосвязь плотностей распределения вероятностей $\rho_0(x_0)$ и $\rho(t, x)$ определяется уравнением (5.2) с начальным условием (5.4).

Считаем, что $f, \operatorname{div}_x f$ непрерывны по совокупности своих аргументов и имеют непрерывные частные производные по x . Класс допустимых управлений D состоит из кусочно-непрерывных вектор-функций $u(t)$, принимающих значения в компакте $U \subset E^r$.

При сделанных предположениях для любой точки $(\bar{t}, \bar{x}) \in [0, T] \times \Omega$ существует единственное решение задачи Коши для системы (5.1) с

начальным условием $x(\bar{t}) = \bar{x}$ при произвольном допустимом управлении. Будем предполагать, что при любом управлении $u \in D$ решение $x = x(t, x_0, u)$, соответствующее начальному условию $x(0) = x_0$, определено на всем интервале $[0, T]$ при любом $x_0 \in \overline{M_0}$ (здесь $\overline{M_0}$ — замыкание множества M_0).

Пучок траекторий. В силу сделанных предположений каждому управлению $u = u(t)$ можно сопоставить согласно системе (5.1)–(5.2) семейство траекторий

$$x = x(t, x_0, u), \tag{5.5}$$

отвечающих всевозможным значениям случайной величины X_0 . Семейство траекторий (5.5) называется *пучком (или ансамблем) траекторий, исходящих из множества M_0* . Образ множества M_0 в силу системы (5.1)–(5.2) при управлении $u = u(t)$ в момент t

$$M_{t,u} = \{x_t = x(t, x_0, u) : x_0 \in M_0\}, \tag{5.6}$$

т. е. множество возможных значений случайной величины X_t , будем называть *сечением пучка траекторий, исходящего из M_0* .

Постановка задачи. Введем функционал

$$I(u) = \int_0^T \int_{M_{t,u}} \Phi(t, x_t) \rho(t, x_t) dx_t dt + \int_{M_{T,u}} g(x_T) \rho(T, x_T) dx_T, \tag{5.7}$$

где $\Phi(t, x)$, $g(x)$ — непрерывно дифференцируемые неотрицательные функции. Функционал (5.7) в зависимости от вида функций $\Phi(t, x)$ и $g(x)$ может иметь разный физический смысл.

Задачу минимизации функционала (5.7) по допустимым управлениям u будем называть задачей программного управления пучком траекторий. Управление $u^{(0)}$, доставляющее минимум (5.7), определим как *оптимальное управление* по отношению к функционалу (5.7).

Рассмотрим задачу минимизации функционала (5.7). Это частный случай задачи программного управления ансамблем траекторий системы (5.1) с учётом плотности их распределения [7,3]. Мы интерпретируем функцию $\rho(t, x)$ как плотность распределения вероятностей случайной величины X_t , характеризующей фазовое состояние частицы при значении t независимой переменной. Тогда интегралы

$$\int_{M_{t,u}} \Phi(t, x_t) \rho(t, x_t) dx_t, \quad \int_{M_{T,u}} g(x_T) \rho(T, x_T) dx_T$$

представляют собой, соответственно, математические ожидания случайных величин $\Phi(t, X_t)$, $g(X_T)$.

6. Многокритериальная оптимизация динамики пучка электронов в линейном ускорителе

Рассмотрим продольное движение электронов в ускорителе на бегущей волне. Пусть z — продольная координата частицы; $\xi = \frac{z}{\lambda}$ — приведённая продольная координата, λ — длина ускоряющей волны, γ — приведённая энергия, β — приведённая скорость ($\beta\gamma = \sqrt{\gamma^2 - 1}$), φ — фаза частицы. Продольное движение заряженной частицы описывается следующими обыкновенными дифференциальными уравнениями [7]:

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma}{d\xi} &= -u_1(\xi) \sin \varphi, \\ \frac{d\varphi}{d\xi} &= 2\pi \left(\frac{1}{u_2(\xi)} - \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} \right). \end{aligned} \quad (6.1)$$

В данном случае независимой переменной является ξ , $x = \begin{pmatrix} \gamma \\ \varphi \end{pmatrix}$ — фазовый вектор.

В качестве управляющих функций (компонент двумерного вектора $u(\xi)$) используются $u_1(\xi) = \frac{eE_0(\lambda\xi)\lambda}{m_0c^2}$, где $E_0(\lambda\xi)$ — амплитуда ускоряющей волны, m_0 , e — соответственно масса покоя и заряд электрона, и $u_2(\xi) = \beta_{\Phi}(\xi)$, где $\beta_{\Phi}(\xi) = \frac{v_{\Phi}(\xi)}{c}$ — приведённая фазовая скорость ускоряющей волны.

Введём множество начальных данных для системы (6.1):

$$M_0 = \left(1 + \frac{W_0}{m_0c^2} - \Delta\gamma, \quad 1 + \frac{W_0}{m_0c^2} + \Delta\gamma \right) \times (-\pi, \pi).$$

Здесь $2\Delta\gamma$ — начальный разброс энергий электронов на входе в ускоритель. Далее осуществляется численное моделирование продольной динамики J модельных частиц с начальными фазовыми состояниями частиц $x_0^{(k)} = (\gamma_0^{(k)}, \varphi_0^{(k)}) \in M_0$, $k = \overline{1, J}$. Векторы $x_0^{(k)}$ представляют собой значения случайного вектора X_0 , распределённого с плотностью $\rho_0(x_0) = \frac{1}{4\pi\Delta\gamma}$, то есть равномерно на множестве M_0 .

Постановка задачи. Требуется подобрать амплитуду и фазовую скорость ускоряющей волны такими, чтобы на выходе ускорителя при $\xi = L$ ($L = \bar{L}/\lambda$) получить заданную приведенную энергию $\hat{\gamma}$, минимальную фазовую неоднородность пучка при максимальном захвате частиц в режим ускорения.

В соответствии с такой постановкой задачи определим вид функций $\Phi(t, x)$, $g(x)$, входящих в определение функционала качества (5.7).

Качество управляемого процесса будем оценивать тремя критериями, которые представляют собой функционалы вида (5.7).

Задача сводится к минимизации следующих функционалов [7]:

$$K_1(u) = \int_{M_{L,u}} \Phi_1(\gamma_L) \rho(L, \gamma_L, \varphi_L) d\gamma_L d\varphi_L, \quad (6.2)$$

$$K_2(u) = \int_0^L \int_{M_{\xi,u}} \Phi_2(\varphi_\xi) \rho(\xi, \gamma_\xi, \varphi_\xi) d\gamma_\xi d\varphi_\xi d\xi, \quad (6.3)$$

где

$$\Phi_1(\gamma_L) = (\gamma_L - \hat{\gamma})^2, \\ \Phi_2(\varphi_\xi) = \begin{cases} (\varphi(\xi) - \varphi_{\max}(\xi))^2, & \varphi(\xi) \geq \varphi_{\max}(\xi) \\ 0, & \varphi_{\min} < \varphi(\xi) < \varphi_{\max}(\xi) \\ (\varphi(\xi) - \varphi_{\min}(\xi))^2, & \varphi(\xi) \leq \varphi_{\min}(\xi) \end{cases}.$$

В первом критерии $K_1(u)$ функция $\Phi_1(\gamma_L)$ имеет вид штрафной функции. Чем меньше разница между энергией на выходе ускорителя γ_L и требуемой энергией $\hat{\gamma}$, тем меньше значение $K_1(u)$.

Во втором критерии $K_2(u)$ функции $\varphi_{\max}(\xi)$, $\varphi_{\min}(\xi)$ ограничивают область, в которой функция $\Phi_2(\varphi_\xi)$ равна нулю. Графики функций $\varphi_{\max}(\xi)$, $\varphi_{\min}(\xi)$, приведены на рис. 3.

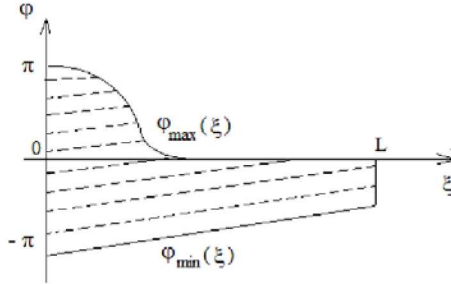


Рис. 3.

В данной задаче захват частиц в ускорение вычисляется следующим образом [7]

$$k_{\text{зах}}(u) = \frac{\Delta\varphi}{2\pi}, \quad (6.4)$$

где $\Delta\varphi$ — интервал фаз в промежутке $[-\pi, \pi]$ на входе ускорителя, занимаемый частицами, захваченными в режим ускорения. Очевидно, что

$$0 \leq k_{\text{зах}}(u) \leq 1. \quad (6.5)$$

В качестве третьего критерия будем рассматривать обратную величину коэффициенту захвата

$$K_3(u) = \frac{1}{k_{\text{зах}}(u)}. \quad (6.6)$$

Формулировка задачи многокритериальной оптимизации. Поставленную задачу программного управления ансамблем траекторий сформулируем как задачу многокритериальной оптимизации. Используем метод главных критериев и наложим ограничение на коэффициент захвата:

$$0.9 \leq k_{\text{зах}}(u) \leq 1. \quad (6.7)$$

Введем вектор критериев $K(u) = (K_1(u), K_2(u))$ и будем рассматривать только те управления, которые обеспечивают выполнение условия (6.7) или, что то же,

$$K_3(u) \leq \frac{10}{9}. \quad (6.8)$$

Условие (6.8) предполагает, что для третьего критерия установлен порог $h_3 = \frac{10}{9}$. Этот порог можно увеличить или уменьшить, если потребуется ввести другие ограничения на захват. Первые два критерия выделены как главные.

Итак, требуется в пространстве критериев $K(u) = (K_1(u), K_2(u))$ построить приближённую компромиссную кривую при условии (6.8).

Компоненты $u_i(\xi)$, $i = \overline{1, 2}$ вектора управления будем задавать таблицей значений при $\xi = \xi_j$, $j = \overline{1, s}$ [7]. Значения параметров $\alpha_j^{(i)} \equiv u_i(\xi_j)$, $i = \overline{1, 2}$, $j = \overline{1, s}$, $\xi_1 = 0$, $\xi_s = L$ будем находить как реализации случайных величин, каждая из которых равномерно распределена в промежутке

$$\theta_j^* \leq \alpha_j^{(1)} \leq \theta_j^{**}, \quad \theta_{j+s}^* \leq \alpha_j^{(2)} \leq \theta_{j+s}^{**}, \quad j = \overline{1, s}. \quad (6.9)$$

Векторы $\theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_{2s}^*)$ и $\theta^{**} = (\theta_1^{**}, \dots, \theta_{2s}^{**})$ задаются по смыслу рассматриваемой задачи. Величина L является безразмерной длиной ускорителя, $M = s - 1$ — число разбиений промежутка $[0, L]$.

Определим по вектору параметров $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2s})$ вектор управления $u = (u_1(\xi), u_2(\xi))$ (между значениями проводится линейная интерполяция). На рис. 4 представлены управления при $s = 4$.

Алгоритм оптимизации

1. Моделируем по формуле (4.2) N случайных $2s$ -мерных векторов $\alpha = (\alpha_1^{(1)}, \dots, \alpha_s^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \dots, \alpha_s^{(2)})$ в параллелепипеде (4.1) и получаем N управлений $u = (u_1^{(i)}(\xi), u_2^{(i)}(\xi))$, $i = \overline{1, N}$.

2. Для каждого управления $u^{(i)}$, $i = \overline{1, N}$ рассчитываются фазовые состояния J модельных частиц в точках $\xi_m = \frac{L}{M}m$, $m = \overline{0, M}$. Для это-

го в области M_0 выбираются начальные положения частиц $x_0^{(k)}$, $k = \overline{1, J}$, численно решаются J задач Коши для системы (6.1) и вычисляются фазовые векторы $x_{\xi_m}^{(k)}$, $k = \overline{1, J}$, $m = \overline{0, M}$. Полученные результаты позволяют осуществить оценку критериев качества $K_1(u)$, $K_2(u)$ по методу Монте-Карло [6]. Для приближённого вычисления интеграла (6.2) можно сразу применить метод Монте-Карло, а интеграл (6.3) оценим следующим образом. Интеграл по независимой переменной ξ оценим по формуле трапеций, а каждое слагаемое в формуле трапеций будет интегралом по множеству $M_{\xi_m, u}$, $m = \overline{0, M}$. К оценке такого интеграла применяем метод Монте-Карло. Итак, для каждого управления $u^{(i)}$, $i = \overline{1, N}$ имеем значения трёх частных критериев $K_1^{(i)}(u)$, $K_2^{(i)}(u)$, $K_3^{(i)}(u)$, $i = \overline{1, N}$.

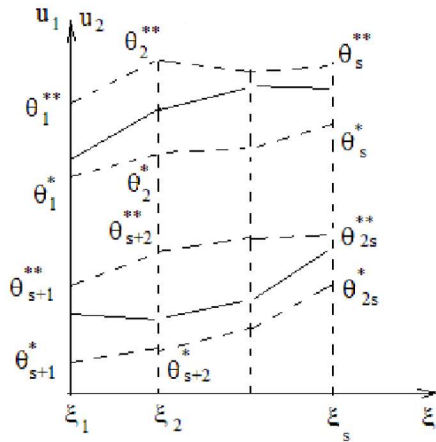


Рис. 4.

3. Проверяем условие (6.8). Если для $i = i_1$ оно не выполняется, то точка $(K_1^{(i_1)}(u), K_2^{(i_1)}(u))$ в пространстве главных критериев отбрасывается.

4. Из оставшихся точек $N_0 \leq N$ в пространстве критериев, для которых выполнено условие (6.8), в пространстве главных критериев $K_1(u), K_2(u)$ находим точки, составляющие приближённую компромиссную кривую. Множество векторов управлений, соответствующих точкам компромиссной кривой, образует приближённое множество эффективных управлений.

Численные результаты. Рассматривался ускоритель на бегущей волне ЛУЭ-15М с начальной энергией $W_0 = 40$ кэВ, длиной ускорителя $\bar{L} = 0,78$ м, длиной ускоряющей волны $\lambda = 0,1$ м. При численном эксперименте было проведено $N = 150$ испытаний с учётом условия (6.8) и полагалось: $J = 50$, $s = 16$.

В алгоритме многокритериальной оптимизации использовался метод главных критериев. В результате были получены точки, определяющие приближённую компромиссную кривую. В табл. 1 приведены значения частных критериев для эффективных управлений. На рис. 5 точки, образующие приближённую компромиссную кривую, выделены.

Полученные в результате многокритериальной оптимизации управления обеспечивают на выходе системы достаточно высокий уровень группировки пучка. Заказчик имеет возможность выбрать наиболее подходящий вариант с учетом интересующих его характеристик прибора и сгруппированного пучка.

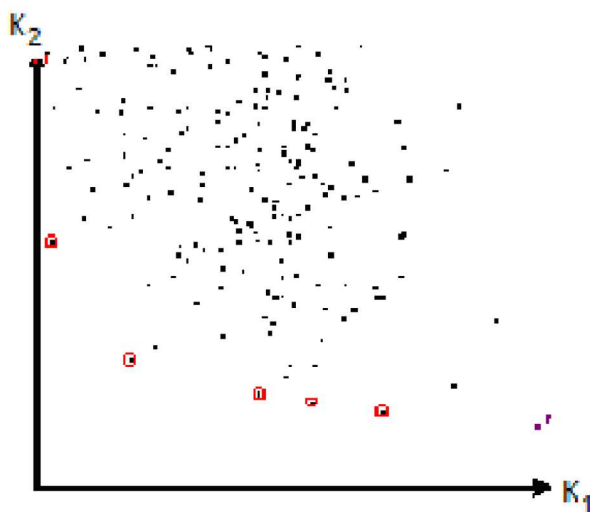


Рис. 5.

Таблица 1

№	K_1	K_2	$k_{\text{зах}}$
1	0,027	1,4563	0,94
2	0,0066	1,1284	0,90
3	0,0080	0,9685	0,92
4	0,0014	1,6221	0,90
5	0,0120	0,6424	0,91
6	0,0065	1,2440	0,90

Заключение. В данной работе подход многокритериальной оптимизации применялся к задаче оптимального управления динамикой заряженного пучка в ускоряющей и фокусирующей системе. Рассмотрена задача многокритериальной оптимизации продольного движения пучка электронов в линейном ускорителе. Получена приближённая компромиссная кривая.

Метод многокритериальной оптимизации особенно эффективен в сочетании с направленными методами, которые описаны Д. А. Овсянниковым в [7]. Исходным управлением для направленного метода можно взять любое из эффективных управлений.

Список литературы

1. Владимирова Л. В. Многокритериальная оптимизация в прикладных задачах : учеб. пособие для студентов и аспирантов физ.-мат. специальностей / Л. В. Владимирова. – СПб. : Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2002. – 24 с.
2. Владимирова Л. В. Применение многокритериальной оптимизации к задаче управления пучком заряженных частиц в линейном ускорителе на бегущей волне / Л. В. Владимирова, М. В. Сухомуд // Тр. XXIX науч. конф. фак. ПМ-ПУ СПбГУ. Процессы управления и устойчивость (4-11 апреля 1998 г.). – СПб., 1998. – С. 35–39.
3. Владимирова Л. В. Оптимизация динамики пучков взаимодействующих частиц в линейном ускорителе // Изв. РАН. Теория и системы управления. – 1995. – № 6. – С. 178–183.
4. Губанов В. А. Введение в системный анализ / В. А. Губанов, В. В. Захаров, А. Н. Коваленко. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. – 227 с.
5. Дривотин О. И. О самосогласованных распределениях для пучка заряженных частиц в продольном магнитном поле / О. И. Дривотин, Д. А. Овсянников // Докл. Академии наук. – 1994. – Т. 33, № 3. – С. 284.
6. Ермаков С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопросы / С. М. Ермаков. – М. : Наука, 1975. – 472 с.
7. Овсянников Д. А. Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. – Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1990. – 312 с.
8. Овсянников Д. А. Моделирование интенсивных пучков заряженных частиц / Д. А. Овсянников, О. И. Дривотин. – СПб. : С.-Петерб. гос. ун-т, 2003. – 175 с.
9. Математические проблемы моделирования и управления интенсивными пучками заряженных частиц / Д. А. Овсянников, Л. В. Владимирова, О. И. Дривотин, Е. В. Климова, Е. Д. Котина, А. Е. Лукьянова, И. Д. Рубцова // Отчет о НИР № 96-01-00926 (РФФИ).
10. Оптимизация согласующей секции ускорителя с пространственно однородной квадрупольной фокусировкой / А. Д. Овсянников, Д. А. Овсянников, А. П. Дуркин, Ш. Л. Чанг // Журн. техн. физики. – 2009. – Т. 79, № 11. – С. 102–105.
11. Подиновский В. В. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач / В. В. Подиновский, В. Д. Ногин. – М. : Наука, 1982. – 256 с.
12. Разработка малогабаритного ускорителя дейтронов для нейтронного генератора на энергию 1 МэВ / Ю. А. Свистунов, Ю. В. Зуев, А. Д. Овсянников, Д. А. Овсянников // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10, Прикл. математика. Информатика. Процессы управления. – 2011. – № 1. – С. 49–59.
13. Соболев И. М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И. М. Соболев, Р. Б. Статников. – М. : Наука, 1981. – 112 с.
14. The LIDOS.RFQ. Designer development / В. Bondarev, А. Durkin, Y. Ivanov, I. Shumakov, S. Vinogradov, А. Ovsyannikov, D. Ovsyannikov // Proceedings of the IEEE Particle Accelerator Conference 2001 Particle Accelerator Conference. sponsors: US Department of Energy Office of Naval Research; eds. P. Lucas, S. Webber. – Chicago, IL, 2001. – P. 2947–2949.

15. Drivotin O. I. Modeling of Self-Consistent Distributions for Longitudinally Non-Uniform Beams / O. I. Drivotin, D. A. Ovsyannikov // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment. 2006. Т. 558. № 1. С. 112-118.
16. On the Beam Dynamics Optimization Problem / A. D. Ovsyannikov, D. A. Ovsyannikov, M. Yu. Balabanov, S.-L. Chung // International Journal of Modern Physics A. — 2009. — Vol. 24, N 5. — P. 941-951.
17. BDO-RFQ CODE AND OPTIMIZATION MODELS / D. A. Ovsyannikov, A. D. Ovsyannikov, I. V. Antropov, V. A. Kozynchenko // 2005 International Conference on Physics and Control, PhysCon 2005, Proceedings 2005 International Conference on Physics and Control, PhysCon 2005. Sponsors: Cent. Sci. and Res. Inst. Elektropribor, St. Petersburg, Russia, Russian Foundation for Basic Research, City University of Hong Kong, China, St. Petersburg City Palace for Youth Creativity. — St. Petersburg, 2005. — P. 282-288.
18. Ovsyannikov A. D. Optimization of a radial matching section / A. D. Ovsyannikov, D. A. Ovsyannikov, S.-L. Chung // International Journal of Modern Physics A. — 2009. — Vol. 24, N 5. — P. 952-958.
19. Vladimirova L.V. On Application of Multicriterial Optimization in Partial Beam Control Problem // Proc. of the 11-th Int. IFAC Workshop: Control Applications of Optimization. (July 3-6, 2000, St.-Petersburg, Russia) / ed. V. Zakharov. — Pergamon Press. Oxford, UK, 2001. — Vol. 1. — P. 363-367.

Владимирова Людмила Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Санкт-Петербургский государственный университет, 198504, г. Санкт-Петербург, Университетский проспект, 35 тел.: 89213486184, (e-mail: sergvlad@sp.ru)

L. Vladimirova Multicriteria Optimization of Beam Dynamics

Abstract. In the paper, the problem of charged beam dynamics optimization is considered, when formulated to be trajectory ensemble control problem for appropriate dynamical system. Control process quality is estimated by the values of functionals defined on beam trajectories. Multicriteria optimization approach is applied to the problem under study, specifically, main criteria method is considered. Multicriteria optimization of longitudinal electron beam dynamics in traveling-wave accelerator is carried out. Approximate compromise curve is presented.

Keywords: multicriteria optimization, efficient control function, compromise curve, charged particle beam, linear accelerator.

References

1. Vladimirova L.V. Multicriteria Optimization in Applied Problems. Educational manual. (For students and post-graduates of physical and mathematical specialties.). St.-Petersburg University publishing, 2002. 24 p.
2. Vladimirova L.V., Suhomud M.V. Multicriteria Optimization Application in Charged Beam Control Problem for Linear Electron Traveling-wave Accelerator. *Proceedings of XXIX scientific conference of Applied Mathematics & Processes of Control Faculty of St.-Petersburg University*. Processes of Control and Stability (4-11 April 1998). St.-Petersburg, 1998, pp. 35-39.
3. Vladimirova L.V. Optimization of Interacting Particle Beam Dynamics in Linear Accelerator. *Proceedings of Russian Academy of Sciences. Theory and Control Systems*, 1995, no. 6, pp. 178-183.
4. Gubanov V.A., Zakharov V.V., Kovalenko A.N. Introduction to System Analysis. Leningrad, Leningrad University publishing, 1988. 227 P.
5. Drivotin O.I., Ovsyannikov D. A. On Self-Consistent Distributions for Charged Particle Beam in Longitudinal magnetic field. *Reports of Russian Academy of Sciences*, 1994, vol. 33, no. 3, pp. 284.
6. Ermakov S.M. *Monte Carlo Methods and Related Problems*. Moscow, Science, 1975. 472 p.
7. Ovsyannikov D.A. Modeling and Optimization of Charged Particle Beam Dynamics. Leningrad, Leningrad University publishing, 1990. 312 P.
8. Ovsyannikov D. A., Drivotin O.I. *Modeling of Intensive Charged Particle Beam*. St.-Petersburg University publishing, 2003. 175 p.
9. Ovsyannikov D. A., Vladimirova L.V., Drivotin O.I., Klimova E.V., Kotina E.D., Lukjanova A.E., Rubtsova I.D. Mathematical Problems of Modeling and Control of Intensive Charged Particle Beam. *Report about scientific research work, №96-01-00926* (Russian Foundation for Basic Researches).
10. Ovsyannikov A.D., Ovsyannikov D. A., Durkin A.P., Chang Sh. L. Optimization of Consistent Section of Accelerator with Spatial Homogeneous Quadrupole Focusing. *Journal of technical physics*, 2009, vol. 79, no. 11, pp. 102-105.
11. Podinovskiy V.V., Nogin V.D. *Pareto-Optimal Decisions of Multicriteria Problems*. Moscow, Science, 1982. 256 p.
12. Svistunov Yu.A., Zuev Ju.V., Ovsyannikov A.D., Ovsyannikov D. A. Elaboration of Small-size Deuteron Accelerator for Neutron Generator on Energy 1 MeV. *Bulletin of St.-Petersburg University. Series 10: Applied mathematics. Information. Control Process*, 2011, no. 1, pp. 49-59.
13. Sobol I.M., Statnikov R.B. *Optimal Parameters Choice in Multicriteria Problems*. Moscow, Science, 1981. 112 p.
14. Bondarev B., Durkin A., Ivanov Y., Shumakov I., Vinogradov S., Ovsyannikov A., Ovsyannikov D. The LIDOS.RFQ.Designer development. *Proceedings of the IEEE Particle Accelerator Conference 2001 Particle Accelerator Conference*. sponsors: US Department of Energy Office of Naval Research; editors: P. Lucas, S. Webber. Chicago, IL, 2001. pp. 2947-2949.
15. Drivotin O.I., Ovsyannikov D.A. Modeling of Self-Consistent Distributions for Longitudinally Non-Uniform Beams. *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research. Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, 2006, vol. 558, no. 1, pp. 112-118.
16. Ovsyannikov A. D., Ovsyannikov D. A., Balabanov M. Yu., Chung S.-L. On the Beam Dynamics Optimization Problem. *International Journal of Modern Physics A.*, 2009, vol. 24, no. 5, pp. 941-951.

17. Ovsyannikov D.A., Ovsyannikov A.D., Antropov I.V., Kozynchenko V.A. BDO-RFQ CODE AND OPTIMIZATION MODELS. *2005 International Conference on Physics and Control, PhysCon 2005, Proceedings 2005 International Conference on Physics and Control, PhysCon 2005*. sponsors: Cent. Sci. and Res. Inst. Elektropribor, St. Petersburg, Russia, Russian Foundation for Basic Research, City University of Hong Kong, China, St. Petersburg City Palace for Youth Creativity. St. Petersburg, 2005, pp. 282-288.
18. Ovsyannikov A.D., Ovsyannikov D.A., Chung S.-L. Optimization of a radial matching section. *International Journal of Modern Physics A.*, 2009, vol. 24, no. 5. pp. 952-958.
19. Vladimirova L.V. On Application of Multicriterial Optimization in Partical Beam Control Problem. Proc. of the 11-th Int. *IFAC Workshop: Control Applications of Optimization*. (July 3-6, 2000, St.-Petersburg, Russia). Ed. V. Zakharov. Vol. 1. Pergamon Press. Oxford, UK, 2001, pp. 363-367.

Vladimirova Liudmila, Candidate of Sciences (Physical and Mathematical), Associate Professor, St.-Petersburg State University, 35, University pr., St.-Petersburg, 198504, tel.: 89213486184, (e-mail: sergvlad@sp.ru)