Серия «Математика»
2014. Т. 7. С. 85—103

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 518.517

Аппроксимация импульсно-скользящих режимов дифференциальных включений *

Д. В. Пономарев, И. А. Финогенко
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. Исследуются дифференциальные включения с импульсными воздействиями. Основное внимание уделено динамическим объектам с импульсным позиционным управлением, под которым понимается некоторый абстрактный оператор с функцией Дирака («бегущим импульсом»), сосредоточенной в каждый момент времени. «Бегущий импульс» как обобщенная функция смысла не имеет. Его формализация заключается в дискретизации корректирующих импульсных воздействий на систему, соответствующих направленному множеству разбиений интервала управления. Реакцией системы на такое управление являются разрывные движения, которые образую сеть «ломаных Эйлера». В задачах управления особое место занимает ситуация, когда в результате очередной коррекции фазовая точка объекта оказывается на некотором заданном многообразии. Тогда при сокращении времени между коррекциями в систему вносится эффект типа «скольжения», и сеть «ломаных Эйлера» называется импульсно-скользящим режимом. В практическом использовании процедуры импульсного управления неизбежно возникает задача о замене импульса Дирака последовательностью ее непрерывных аппроксимаций дельтаобразными функциями. В данной статье для дифференциальных включений с позиционным импульсным управлением в правой части исследованы два типа предельного перехода на дельтаобразных функциях, приводящих к «ломаным Эйлера» и импульсно-скользящим режимам Один из них приводит к известным условиям допустимости скачка в моменты импульсных воздействий, а другой — определяет величину импульсной коррекции непосредственно по значению заранее заданной интенсивности импульса в зависимости от времени и состояния объекта. Исследования опираются на непрерывные однозначные аппроксимации Иосиды многозначных отображений и известные факты для дифференциальных уравнений с импульсами.

Ключевые слова: дифференциальное включение, позиционное импульсное управление, импульсно-скользящий режим, ломаная Эйлера, аппроксимация Иосиды, дельтаобразная функция.

* Работа выполнена при частичной поддержке Президиума РАН (Программа фундаментальных исследований № 17), СО РАН (междисциплинарный проект № 80) и РФФИ (проект № 13-01-00287а).

1. Введение

В работах [1; 2] для управляемого объекта

$$\dot{x} = f(t,x) + v(t) + u, \quad x(t_0) = x_0 \quad (t \in I = [t_0, \theta]), \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — состояние объекта, $v(\cdot)$ — возмущение, управляющее воздействие u определено, как некоторый абстрактный оператор $u \leftarrow p(t,x)\delta_t$, сопоставляющий каждому текущему моменту времени t и состоянию объекта x импульс $p(t,x)\delta_t$. Здесь вектор-функция $p(t,x)$ — интенсивность импульса, δ_t — δ-функция Дирака, сосредоточенная в момент времени t. Выражение $p(t,x)\delta_t$ («бегущий импульс», см. [3, с. 215]), как обобщенная функция, смысла не имеет и означает лишь тот факт, что в системе (1.1) функционирует импульсное позиционное управление, подразумевающее дискретную реализацию «бегущего импульса» в виде последовательности корректирующих импульсов, сосредоточенных в точках некоторого разбиения $h\colon t_0 < t_1 < \ldots < t_N = \theta$ отрезка I. Результатом такой последовательной коррекции является разрывная кривая $x^h(\cdot)$, называемая здесь ломаной Эйлера, по определению совпадающая на промежутках $(t_k, t_{k+1}]$ с решением задачи Коши

$$\dot{x} = f(t,x) + v(t), \quad x(t_k) = x^h(t_k) + p\big(t_k, x^h(t_k)\big).$$

Последовательность ломаных Эйлера, построенная для разбиений h^i, называется конфинальной, если $d(h^i) = \max\{\Delta t_k^i\colon k = \overline{0, N_i - 1}\} \to 0$. Если в результате действия корректирующего импульса в момент времени t_k предельная справа точка $\big(t_k, x(t_k + 0)\big)$ интегральной кривой, соответствующей ломаной Эйлера, оказывается на некотором многообразии

$$S = \{(t,x) \in R \times R^n\colon \sigma^j(t,x) = 0,\ j = \overline{1,m}\}, \quad m \le n,$$

то сеть ломаных Эйлера называется импульсно-скользящим режимом, а функции $r(t)$, предельные для равномерно сходящихся на промежутке $(t_0, \theta]$ конфинальных последовательностей ломаных Эйлера — идеальными (предельными) импульсно-скользящим режимами.

Управления такого типа привлекались к решению различных задач теории игр и управления [4], в частности, при построении позиционных импульсных управлений в вырожденных линейно-квадратичных задачах оптимального управления (см. [5], [6]). Отметим также, что ломаные Эйлера для одного и того же позиционного импульсного управления могут отличаться способом построения скачков. Один из них указан выше и определяется значением функции $p(t,x)$. Еще один способ рассмотрен ниже и определяется так называемым условием скачка (см. [7, с. 24]). В литературе можно встретить и другие способы построения скачков, где и сам термин «импульсно-скользящий режим» используется в более широком смысле (см., например, [8]). Что же касается процессов типа «скольжения», то в большей степени они являются атрибутом управляемых систем с разрывными позиционными управлениями (обратными связями) и теории разрывных систем в целом, где такие движения называются скользящими режимами. Такие системы с разрывными позиционными управлениями в их взаимосвязи с идеальными импульсно-скользящим режимами построены и исследованы в статье [9].

Как уже указывалось выше, существуют различные способы описания разрывных траекторий (обобщенных решений) динамических систем. Один из состоит в том, чтобы устанавливать правила, по которым происходит скачок траектории [10]–[12]. Имеются подходы, основанные на теории дифференциальных уравнений в обобщенных функциях, на переходе к интегральным уравнениям с интегралами Лебега – Стилтьеса или Перрона – Стилтьеса. Еще один путь описания решения дифференциального уравнения

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)\delta(t) \tag{1.2}$$

с δ-функцией $\delta(t)$, сосредоточенной в точке (для удобства - в нуле), основан на предельном переходе в уравнении (1.2) после замены в нем идеального импульса $\delta(t)$ на последовательность его гладких или непрерывных аппроксимаций. Сравнительный анализ этих подходов к изучению дифференциальных уравнений с обобщенными функциями имеется в книге [1, с. 143–146] (см. также [13]), где детально исследуется еще один класс так называемых аппроксимируемых решений.

Отметим, что различные подходы дают и различные понятия обобщенного решения. Даже в рамках последнего аппроксимационного подхода, восходящего к работе Я. Курцвейла [14] понятие решения не является однозначно определенным и зависит от характера предельного перехода в уравнении (1.2)(см.[16, с. 34–37]). Иначе говоря, правило скачка траектории зависит от характера предельного перехода. Содержательность аппроксимационного подхода для описания решений управляемых систем с импульсными воздействиями показана на конкретном примере в книге [15, с. 84–86]. В данной статье рассмотрены два типа предельных переходов для дифференциальных включений с δ-функциями в правой части, которые приводят к обобщенным решениям, которые образуют различные, вообще говоря, сети ломаных Эйлера. Одна из них использовалась для описания идеальных импульсно-скользящих режимов в форме дифференциальных включений с разрывными позиционными управлениями в работе [9], продолжением которой, по сути, является данная статья.

Нам понадобятся некоторые сведения из [17] об аппроксимациях Иосиды многозначных отображений $F : (\alpha, \beta) \times R^n \to R^n$ с выпуклыми компактными значениями.

Условие $\mathcal{A}$ *Для любых точек* $t \in (\alpha, \beta)$ *и* $x, y \in R^n$ *выполняется неравенство*

$$(x-y)^T A(t,x)(u-v) \leq l\|x-y\|^2$$

для любых $u \in F(t,x)$ *и* $v \in F(t,y)$, *где* $l > 0$ — *константа,* $A(t,x) = [a_{ij}(t,x)]_{i,j=1}^n$ — *некоторая симметричная, положительно определенная и непрерывно дифференцируемая матрица, собственные значения которой ограничены некоторым отрезком* $[c,d]$, $0 < c \leq d < +\infty$.

Все векторы понимаются как столбцы, а знак „T“ всюду в дальнейшем используется для обозначения вектора-строки. Через $z = J_\lambda(t,x)$ обозначим решение включения $z \in x + \lambda F(t,z)$ и положим $F_\lambda(t,x) \overset{\Delta}{=} (J_\lambda(t,x) - x)/\lambda$. Отметим, что $J_\lambda(t,x)$ и $F_\lambda(t,x)$ — резольвента и, соответственно, аппроксимация Иосиды для отображения $x \to -F(t,x)$ при каждом фиксированном t.

Следующее утверждение является частным случаем леммы 1 из [17].

Утверждение 1. *Пусть* $F : (\alpha,\beta) \times R^n \to R^n$ — *ограниченное, полунепрерывное сверху многозначное отображение с выпуклыми, компактными значениями, удовлетворяющее условию* $\mathcal{A}$. *Тогда существует число* $\lambda' > 0$ *такое, что определено однозначное отображение* $F_\lambda(t,x)$ *со свойствами:*

1. $F_\lambda(t,x)$ *ограничено, непрерывно по* $(\lambda,t,x) \in (0,\lambda'] \times (\alpha,\beta) \times R^n$ *и липшицево по* x. *Последнее означает, что для каждого фиксированного* $(\lambda \in (0,\lambda'])$ *и любых* x^1 *и* x^2 *выполняется:*

$$\|F_\lambda(t,x^1) - F_\lambda(t,x^2)\| \leq L_\lambda\|x^1 - x^2\|$$

где $L_\lambda > 0$ — *некоторая константа.*

2. Для любых (t,x), (t,y), $u \in F(t,y)$ *и* $\lambda \in (0,\lambda']$ *выполняется неравенство*

$$(x-y)^T A(t,x)\big(F_\lambda(t,x) - u\big) \leq l_1\|x-y\|^2 + \lambda L. \tag{1.3}$$

с некоторыми константами $l_1 > 0$ *и* $L > 0$.

Замечание 1. Отметим (см. [18]), что в рамках условий утверждения 1 любые два решения включения $\dot{x} \in F(t,x)$ с одинаковыми начальными условиями (t_0, x_0) совпадают справа от точки t_0 на их общем промежутке определения, т. е. выполняется свойство правосторонней единственности решений.

2. Включения с дельта-функциями, входящими в виде коэффициентов

Пусть $F : (\alpha, \beta) \times R^n \to R^n$ — многозначное отображение. Сделаем следующие предположения:

(S1) $F(t, x)$ является ограниченным полунепрерывным сверху многозначным отображением с выпуклыми компактными значениями;

(S2) Для отображения $F(t, x)$ выполняется условие $\mathcal{A}$.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x) + \delta_*(t) g(t, x) \tag{2.1}$$

и уравнение

$$\dot{x} = F_\lambda(t, x) + \delta_*(t) g(t, x), \tag{2.2}$$

где $F_\lambda(t, x)$ — аппроксимация Иосиды для отображения $F(t, x)$, $\delta_*(t)$ — некоторая (обычная) скалярная функция, $g(t, x) = \big(g_1(t, x), \ldots, g_n(t, x)\big)$ — векторная функция. Решения включения (2.1) и уравнений (2.2) понимаются в обычном смысле как абсолютно непрерывные функции, почти всюду удовлетворяющие (2.1) и (2.2) соответственно.

Лемма 1. *Пусть многозначное отображение $F(t, x)$ удовлетворяет условиям **(S1)–(S2)**, функция $\delta_*(t)$ непрерывна, функция $gt, x)$ непрерывна и для любого t удовлетворяет условию Липшица по переменной x с константой L_p. Пусть $x_\lambda(t)$ и $x(t)$ — решения уравнения (2.2) и включения (2.1) соответственно, определенные на некотором отрезке $I = [t_0, t_0 + T]$. Тогда существуют положительные константы K_1, K_2, K_3 и λ' такие, что*

$$\|x_\lambda(t) - x(t)\|^2 \le (K_1 \lambda + K_2 \|x_\lambda(t_0) - x(t_0)\|^2) e^{\int_{t_0}^{t_0+T} K_3 |\delta_*(s)| ds} \tag{2.3}$$

для всех $t \in I$, $\lambda \in (0, \lambda']$.

Доказательство. Из условий леммы и утверждения 1 вытекает, что существуют числа $\lambda' > 0$, $L > 0$ и $l_1 > 0$ такие, что для всех $\lambda \in (0, \lambda']$ определено непрерывное, липшицевое по x отображение $F_\lambda(t, x)$ и выполняется неравенство (1.3).

Обозначим $\Phi_\lambda(t, x) = F_\lambda(t, x) + \delta_*(t) g(t, x)$ и пусть $w \in F(t, y) + \delta_*(t) g(t, y)$ — произвольный вектор. Тогда $w = u + \delta_*(t) g(t, y)$ для некоторого $u \in F(t, y)$. Из неравенства (1.3) получаем

$$\begin{gathered}
(x - y)^T A(t, x) \big(\Phi_\lambda(t, x) - w\big) = \\
= (x - y)^T A(t, x) \Big(F_\lambda(t, x) - u + \delta_*(t) \big(g(t, x) - g(t, y)\big)\Big) = \\
= (x - y)^T A(t, x) \big(F_\lambda(t, x) - u\big) + \delta_*(t) (x - y)^T A(t, x) \big(g(t, x) - g(t, y)\big) \le \\
\le l_1 \|x - y\|^2 + \lambda L + |\delta_*(t)| L_p \|A(t, x)\| \|x - y\|^2 \le \\
\le \|x - y\|^2 \big(l_1 + l_2 |\delta_*(t)|\big) + L\lambda
\end{gathered} \tag{2.4}$$

с некоторыми константами l_1 и l_2 для всех $t \in I$. Положим $y(t) = x_\lambda(t) - x(t)$ и $\xi(t) = \frac{1}{2}\big(y(t)\big)^T A\big(t, x_\lambda(t)\big)y(t)$. Тогда $\dot{\xi}(t) = \big(y(t)\big)^T A\big(t, x_\lambda(t)\big)\dot{y}(t) + \frac{1}{2}\big(y(t)\big)^T \dot{A}\big(t, x_\lambda(t)\big)y(t)$ для почти всех $t \in I$.

В нашем доказательстве мы будем использовать следующее свойство квадратичных форм с симметричными положительно определенными матрицами (см., например, [19, с. 13]):

$$c\|z\|^2 \le z^T A(t,x)z \le d\|z\|^2, \tag{2.5}$$

где отрезок $[c,d]$ $(0 < c \le d < +\infty)$ содержит все собственные значения матрицы $A(t,x)$ для любых (t,x).

Из неравенств (2.4) и (2.5) получаем

$$\dot{\xi}(t) \le (l_3 + l_4|\delta_*(t)|)\xi(t) + L\lambda. \tag{2.6}$$

с некоторыми положительными константами l_3 и l_4. Интегрируя неравенство (2.6), получаем

$$\xi(t) \le \xi(t_0) + L\lambda(t_0 - t) + \int\limits_{t_0}^{t}(l_3 + l_4|\delta_*(s)|)\xi(s)ds.$$

Теперь из леммы Гронуолла (см., например, [20, с. 122]) получаем

$$\xi(t) \le (\xi(t_0) + TL\lambda)e^{l_3 T}e^{\int_{t_0}^{t_0+T} l_4|\delta_*(t)|dt},$$

Из последнего неравенства, еще раз воспользовавшись неравенством для квадратичных форм (2.5), получаем (2.3). $\square$

Теперь рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t,x) + \delta(t)g(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{2.7}$$

где $t_0 < 0 < t_0 + T$; $\delta(t)$ — импульс Дирака, сосредоточенный в точке $t = 0$, и последовательность задач

$$\begin{cases} \dot{x} \in F(t,x) + \delta_i(t)g(t,x), i = 1, 2, \dots, \\ x_i(t_0) = x_{i0}, \end{cases} \tag{2.8}$$

где $x_{i0} \to x_0$ и $\delta_i(t)$ образуют последовательность непрерывных (дельтаобразных) функций, удовлетворяющую условиям

(D1) $\delta_i(t) = 0$ $(t \le \alpha_i,\ t \ge \beta_i)$, $\delta_i(t) \ge 0$ $(\alpha_i < t < \beta_i)$, где $\alpha_i \to 0$, $\beta_i \to 0$, $\beta_i - \alpha_i \le \tau_i \to 0$ при $i \to +\infty$;

(D2) $\int\limits_{\alpha_i}^{\beta_i} \delta_i(t)dt = 1$, для любого $i = 1, 2, \dots$.

Введем вспомогательные задачи

$$\dot{u} \in F(t,u), u(t_0) = x_0, t \in [t_0, 0]; \tag{2.9}$$

$$\frac{dv}{ds} = g(0,v), v(0) = u(0), s \in [0,1]; \tag{2.10}$$

$$\dot{w} \in F(t,w), w(0) = v(1), t \in [0, t_0 + T]. \tag{2.11}$$

Теорема 1. *Пусть $F(t,x)$ и $g(t,x)$ удовлетворяют условиям леммы 1, функции $\delta_i(t)$ — условиям **(D1)–(D2)**. Тогда для любой последовательности решений $x_i(t)$ задач (2.8) при $i \to +\infty$ имеет место:*

$$\begin{array}{l} x_i(t) \to u(t), t_0 \le t < 0; \\ x_i(t) \to w(t), 0 < t \le t_0 + T, \end{array} \tag{2.12}$$

где $u(t)$ и $w(t)$ — решения включений (2.9) и (2.11) соответственно.

Доказательство. Рассмотрим решения $x_i^\lambda(t)$ последовательности задач

$$\begin{cases} \dot{x}_i = F_\lambda(t, x_i) + \delta_i(t) g(t, x_i), \\ x_i(t_0) = x_{i0} \end{cases}$$

и вспомогательные задачи

$$\begin{cases} \dot{u}^\lambda = F_\lambda(t, u^\lambda), \\ u^\lambda(t_0) = x_0, t_0 \le t \le 0; \end{cases} \tag{2.13}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv^\lambda}{ds} = g(0, v^\lambda), \\ v^\lambda(0) = u^\lambda(0), 0 \le s \le 1; \end{cases} \tag{2.14}$$

$$\begin{cases} \dot{w}^\lambda = F_\lambda(t, w^\lambda), \\ w^\lambda(0) = v^\lambda(1), 0 \le t \le t_0 + T. \end{cases} \tag{2.15}$$

Отметим, что в силу замечания 1 при сделанных предположениях задачи (2.9)–(2.11) и (2.13)–(2.15) имеют единственные решения.

Из теоремы 3 [16, стр.36] и комментариев к ней (там же на стр. 37) получаем, что для любого фиксированного $0 < \lambda < \lambda'$ при $i \to +\infty$

$$\begin{array}{l} x_i^\lambda(t) \to u^\lambda(t), t_0 \le t < 0, \\ x_i^\lambda(t) \to w^\lambda(t), 0 < t \le t_0 + T, \end{array} \tag{2.16}$$

где $u^\lambda(t)$ и $w^\lambda(t)$ — решения уравнений (2.13) и (2.15) соответственно.

В силу леммы 1 для произвольного $\varepsilon > 0$ существует число η и номер N_1 такие, что для всех $t \in [t_0, t_0 + T]$, $0 < \lambda < \eta$ и $i \ge N_1$ выполняется

$$\|x_i(t) - x_i^\lambda(t)\| \le K\sqrt{\lambda}, \quad \forall i = 1, 2, \ldots \tag{2.17}$$

где $x_i(t)$ — решения задач (2.8), и

$$\|u^\lambda(t) - u(t)\| \le K\sqrt{\lambda} < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.18}$$

для всех $t \in [t_0, 0]$, где $u(t)$ — решение дифференциального включения (2.9). Из первого соотношения (2.16) вытекает, что для любого $t \in [t_0, 0)$ и этого же значения λ существует номер $N_2 \ge N_1$ такой, что

$$\|x_i^\lambda(t) - u^\lambda(t)\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2.19}$$

для всех $i \ge N_2$. Теперь из (2.17)–(2.19) получаем

$$\|x_i(t) - u(t)\| \le \|u(t) - u^\lambda(t)\| + \|u^\lambda(t) - x_i^\lambda(t)\| + \|x_i^\lambda(t) - x_i(t)\| < \varepsilon$$

при фиксированном $t \in [t_0, 0)$ для всех $i \ge N_2$

Следовательно $x_i(t) \to u(t)$ при $i \to +\infty$ для любого фиксированного $t \in [t_0, 0)$ и первое соотношение (2.12) установлено.

Пусть $v^\lambda(t)$ — решение дифференциального уравнения (2.14) и $v(t)$ — решение уравнения (2.10). Учитывая начальные условия $v^\lambda(0) = u^\lambda(0)$ и $v(0) = u(0)$, неравенство (2.18) и теорему о непрерывной зависимости решений от начальных условий, получаем, что $v^\lambda(t) \to v(t)$ $\lambda \to +0$ равномерно на для всех $t \in [0, 1]$. Тогда из леммы 1 при $\delta_*(t) \equiv 0$ вытекает, что для решений $w^\lambda(t)$ уравнений (2.15) и решения $w(t)$ включения (2.11) существует $0 < \eta < \lambda'$ такое, что выполняется

$$\|w^\lambda(t) \to w(t)\| \le \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех $0 < \lambda < \eta$ и $t \in [0, t_0 + T]$. Из второго соотношения (2.16) вытекает, что для любых фиксированных $0 < \lambda < \lambda'$ и $t \in (0, t_0 + T]$ существует номер N_3 такой, что

$$\|x_i^\lambda(t) - w^\lambda(t)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех $i \ge N$. Теперь, с учетом (2.17) аналогично предыдущему, для любого $\varepsilon > 0$ существуют натуральное число $N_4 \ge N_3$ такое, что

$$\|x_i(t) - w(t)\| \le \|w(t) - w^\lambda(t)\| + \|w^\lambda(t) - x_i^\lambda(t)\| + \|x_i^\lambda(t) - x_i(t)\| < \varepsilon$$

при любом фиксированном $t \in (0, t_0 + T]$ для всех $i \ge N_4$ второе соотношение (2.12) установлено. □

Определение 1. *Под обобщенным решением включения (2.7) будем понимать функцию $x(t)$, которая является решением включения (2.9) на отрезке $[t_0, 0]$ и решением включения (2.11) с начальным условием $x(+0) = v(1)$ на промежутке $(0, t_0 + T]$, где $v(t)$, $t \in [0, 1]$ определена из уравнения (2.10).*

В соответствии с этим определением теорема 1 обеспечивает существование и дает структуру обобщенных решений включения (2.7). Доопределение обобщенного решения $x(t)$ точке разрыва $t = 0$ пределом слева (который, очевидно, существует) является удобным для нас соглашением. Применительно к дифференциальным уравнениям система (2.10) называется предельной, а начальное условие $x(+0) = v(1)$ (в нашей ситуации) — условием допустимости скачка (см. [7, с. 24–25]).

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x} = F_\lambda(t, x) + \delta(t)g(t, x), \tag{2.20}$$

где $F_\lambda(t, x)$ аппроксимация Иосиды многозначного отображения $F(t, x)$. Обобщенное решение уравнения (2.20) определяется уравнениями (2.13)–(2.15) аналогично предыдущему. Отметим, что функция $x^\lambda(t)$ удовлетворяет уравнению $\dot{x} = F_\lambda(t, x)$ при $t \neq 0$, а в точке $t = 0$ терпит разрыв со скачком, который определяется уравнением (2.14).

Следствие 1. *Пусть выполняются все условия теоремы 1. Тогда существуют положительные константы λ' и K такие, что для любых обобщенных решений $x(t)$, $x_\lambda(t)$ задач (2.7) и (2.20) соответственно выполняется*

$$\|x(t) - x_\lambda(t)\| \leq K(\sqrt{\lambda} + \|x(t_0) - x_\lambda(t_0)\|) \tag{2.21}$$

для всех $t \in I$ и для всех $\lambda \in (0, \lambda']$.

Неравенство (2.21) вытекает из формул (2.12), (2.16) и нервенства (2.3), примененного к последовательностям $x_i(t)$ и $x_i^\lambda(t)$ для $\delta_*(t) = \delta_i(t)$, при $i \to +\infty$.

3. Включения с запаздыванием с дельта-функциями, входящими в виде коэффициентов

Мы рассматриваем задачу, которую запишем в виде

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F\big(t, x(t)\big) + \delta(t)p\big(x(t-0)\big), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\delta(t)$ — δ-функция Дирака, сосредоточенная в точке $t = 0$, и последовательность задач

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F\big(t, x(t)\big) + \delta_i(t)p\big(x(t-\tau_i)\big), i = 1, 2, \dots, \\ x(t_0) = x_{i0} \end{cases} \tag{3.2}$$

где $x_{i0} \to x_0$ и $\delta_i(t)$ образуют последовательность непрерывных функций, удовлетворяющую условиям **(D1)**–**(D2)**.

Рассмотрим дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t,x) + \delta_*(t)p\big(x(t-\tau)\big) \tag{3.3}$$

и уравнение

$$\dot{x} = F_\lambda(t,x) + \delta_*(t)p\big(x(t-\tau)\big), \tag{3.4}$$

где $F_\lambda(t,x)$ — непрерывная однозначная аппроксимация Иосиды отображения $F(t,x)$ и $\tau > 0$ — положительный параметр. Решения включения (3.3) и уравнений (3.4), определенные на отрезке $[t_0-\tau, t_0+T]$, понимаются как непрерывные функции, абсолютно непрерывные на отрезке $I=[t_0, t_0+T]$, почти всюду не нем удовлетворяющие (3.3) и (3.4) соответственно.

Лемма 2. *Пусть многозначное отображение $F(t,x)$ удовлетворяет условиям **(S1)–(S2)**, векторная функция $p(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой C_p, скалярная функция $\delta_*(t)$ непрерывна и $x_\lambda(t)$, $x(t)$ — решения уравнений (3.4) и включения (3.3) соответственно, определенные на отрезке $[t_0-\tau, t_0+T]$ с начальными функциями, равными $x_\lambda(t)=x_\lambda(t_0)$, $x(t)=x(t_0)$, $t\in[t_0-\tau,t_0]$. Тогда существуют положительные константы L_1, L_2, L_3 и λ' такие, что*

$$\|x_\lambda(t)-x(t)\|^2 \le (L_1\lambda + L_2\|x_\lambda(t_0)-x(t_0)\|)e^{\int_{t_0}^{t_0+T} L_3|\delta_*(s)|ds} \tag{3.5}$$

для всех $t\in I$, $\lambda\in(0,\lambda']$.

Доказательство. Мы будем следовать схеме доказательства леммы 1, внося необходимые изменения. В соответствии с утверждением 1 существуют числа $\lambda' > 0$, $L > 0$ и $l_1 > 0$ такие, что для всех $\lambda \in (0,\lambda']$ определено непрерывное, липшицевое по x отображение $F_\lambda(t,x)$ (аппроксимация Иосиды) такое, что выполняется неравенство (1.3).

Обозначим

$$\Phi_\lambda(t,x,x') = F_\lambda(t,x) + \delta_*(t)p(x')$$

и произвольное $w(t,y,y')\in F(t,y)+\delta_*(t)p(y')$. Тогда $w(t,y,y') = u(t,y)+\delta_*(t)p(y')$, где $u(t,y)\in F(t,y)$. Из неравенства (1.3) получаем

$$\begin{aligned}(x-y)^T A(t,x)\big(\Phi_\lambda(t,x,x')-w(t,y,y')\big) = \\ = (x-y)^T A(t,x)\Big(F_\lambda(t,x)-u(t,y)+\delta_*(t)\big(p(x')-p(y')\big)\Big) = \\ = (x-y)^T A(t,x)\big(F_\lambda(t,x)-u(t,y)\big) + \delta_*(t)(x-y)^T A(t,x)\big(p(x')-p(y')\big) \le \\ \le l_1\|x-y\|^2 + L\lambda + |\delta_*(t)|C_p\|A(t,x)\|\|x-y\|\|x'-y'\|.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Положим $y(t)=x_\lambda(t)-x(t)$ и $\xi(t)=\frac{1}{2}\big(y(t)\big)^T A\big(t,x_\lambda(t)\big)y(t)$. Тогда $\dot{\xi}(t) = \big(y(t)\big)^T A\big(t,x_\lambda(t)\big)\dot{y}(t) + \frac{1}{2}\big(y(t)\big)^T \dot{A}\big(t,x_\lambda(t)\big)y(t)$ для почти всех $t\in$

I. Из неравенств (2.5) и (3.6) получаем

$$\dot{\xi}(t) \le l_2\xi(t) + L\lambda + l_3\|\delta_*(t)\|\sqrt{\xi(t)\xi(t-\tau)} \tag{3.7}$$

с некоторыми положительными константами l_2, l_3. Обозначим $\eta(t) = \max\{\xi(s) : t_0 \le s \le t\}$. Тогда $\xi(s) \le \eta(t)$ для всех $s \in [t_0 - \tau, t]$ и $\xi(t') = \eta(t)$ при некотором $t' \in [t_0, t]$. Из (3.7) вытекает

$$\dot{\xi}(t) \le (l_4 + l_5|\delta_*(t)|)\eta(t) + L\lambda \tag{3.8}$$

с некоторыми положительными константами l_4, l_5. Интегрируя (3.8), получаем

$$\eta(t) = \xi(t') = \eta(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t'} \big((l_4 + l_5|\delta_*(s)|\big)\eta(s) + L\lambda)ds \le$$

$$\eta(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \big((l_4 + l_5|\delta_*(s)|)\eta(s) + L\lambda\big)ds.$$

Теперь из леммы Гронуолла получаем

$$\eta(t) \le (\eta(t_0) + TL\lambda)e^{l_4T}e^{\int_{t_0}^{t_0+T} l_5|\delta_*(t)|dt},$$

Так как $\xi(t) \le \eta(t)$ и $\eta(t_0) = \xi(t_0)$, то из последнего неравенства, воспользовавшись неравенством для квадратичных форм (2.5), получаем неравенство (3.5). □

Введем вспомогательные задачи

$$\dot{u} \in F(t,u), u(t_0) = x_0, t \in [t_0, 0]; \tag{3.9}$$

$$\dot{z} \in F(t,z), z(0) = u(0) + p\big(u(0)\big), t \in [0, t_0 + T]. \tag{3.10}$$

Теорема 2. *Пусть $F(t,x)$ и $p(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2, функции $\delta_i(t)$ — условиям **(D1)–(D2)**. Тогда для любой последовательности решений $x_i(t)$ задач (3.2) при $i \to +\infty$ имеет место:*

$$x_i(t) \to u(t),\ t_0 \le t < 0;$$
$$x_i(t) \to z(t),\ 0 < t \le t_0 + T,$$

где $u(t)$ и $z(t)$ — решения включений (3.9) и (3.10) соответственно.

Доказательство. Рассмотрим последовательность задач

$$\begin{cases} \dot{x}_i = F_\lambda(t, x_i) + \delta_i(t)p\big(x_i(t-\tau_i)\big), \\ x_i(t_0) = x_{i0} \end{cases}$$

и вспомогательные задачи

$$\begin{cases} \dot{u}^\lambda = F_\lambda(t, u^\lambda), \\ u^\lambda(t_0) = x_0, \ t_0 \le t \le 0; \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\begin{cases} \dot{z}^\lambda = F_\lambda(t, z^\lambda), \\ z^\lambda(0) = u^\lambda(0) + p\big(u^\lambda(0)\big), \ 0 \le t \le t_0 + T; \end{cases} \tag{3.12}$$

Из теоремы 4 [16, с. 36] получаем, что для любого фиксированного $0 < \lambda < \lambda'$ при $i \to +\infty$

$$\begin{array}{l} x_i^\lambda(t) \to u^\lambda(t), t_0 \le t < 0, \\ x_i^\lambda(t) \to z^\lambda(t), 0 < t \le t_0 + T, \end{array} \tag{3.13}$$

где $u^\lambda(t)$ и $z^\lambda(t)$ — решения уравнений (3.11) и (3.12) соответственно. Дальнейшее доказательство дословно повторяет доказательство теоремы 1 с использованием соотношений (3.13) и леммы 2. □

С учетом теоремы 2 обобщенное решение включения (3.1) определяется следующим образом.

Определение 2. *Под обобщенным решением включения (3.1) понимаем функцию $x(t)$, удовлетворяющую дифференциальному включению (3.9) на отрезке $[t_0, 0]$ и дифференциальному включению (3.10) на промежутке $(0, t_0 + T]$ с начальным условием $x(+0) = x(0) + p\big(x(0)\big)$.*

Как видно из этого определения, теорема 2 обеспечивает существование обобщенного решения включения (3.1). Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x}(t) = F_\lambda\big(t, x(t)\big) + \delta(t) p\big(x(t-0)\big), \tag{3.14}$$

где $F_\lambda(t, x)$ аппроксимация Иосиды многозначного отображения $F(t, x)$. Так же, как и для задач предыдущего раздела, справедливо

Следствие 2. *Пусть выполняются все условия теоремы 2. Тогда существуют положительные константы λ' и K такие, что для любых обобщенных решений $x(t)$, $x_\lambda(t)$ задач (3.1) и (3.14) соответственно выполняется*

$$\|x(t) - x_\lambda(t)\| \le K(\sqrt{\lambda} + \|x(t_0) - x_\lambda(t_0)\|)$$

для всех $t \in I$ и $\lambda \in (0, \lambda']$.

Замечание 2. Теоремы 1, 2 и их следствия сформулированы для дифференциальных включений с импульсным воздействием в момент времени $t = 0$. Однако это не ограничивает общности результатов, так как замена переменной $s = t - t'$ позволяет рассматривать включения с импульсным воздействием в момент времени $t = t'$.

4. Аппроксимация ломаных Эйлера

Будем рассматривать дифференциальное включение

$$\dot{x} \in F(t, x) + u$$

в предположении, что u — управляющее воздействие, которое каждому текущему моменту времени t и состоянию x объекта ставит в соответствие импульс $p(t,x)\delta_t$, где δ_t — δ-функция Дирака, сосредоточенная в моменте времени t, $p(t,x)$ — интенсивность импульса. Как уже отмечалось, такие воздействия на систему называются позиционным импульсным управлением, которое „срабатывает“ только в узлах разбиения h: $t_0 < t_1 < \ldots < t_N = t_0 + T$ отрезка $I = [t_0, t_0 + T]$.

В результате таких воздействий на решения включения $\dot{x} \in F(t,x)$ возникают ломаные Эйлера $x^h(t)$, которые на каждом промежутке $(t_k, t_{k+1}]$ совпадают с решениями задач Коши для дифференциального включения

$$\dot{x} \in F(t,x), \quad x(t_k) = x^h(t_k) + p\big(t_k, x^h(t_k)\big), \quad k = \overline{0, N-1},$$

При этом для $k = \overline{0, N-1}$ выполняются условия:

(X1) $x^h(t)$ абсолютно непрерывна на каждом промежутке $(t_k, t_{k+1}]$;

(X2) $x^h(t_0) = x_0$, $x^h(t_k + 0) = x^h(t_k) + p\big(t_k, x^h(t_k)\big)$.

Здесь мы полагаем, что функция $p(t,x)$ не зависит от переменной t и обозначаем ее $p(x)$. Для разбиения h отрезка I введем в рассмотрение последовательность задач

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F\big(t, x(t)\big) + p\big(x(t - \tau_i^k)\big) \sum\limits_{k=0}^{N-1} \delta_i^k(t - t_k), i = 1, 2, \ldots, \\ x(t_0) = x_0 + p(x_0) \end{cases} \tag{4.1}$$

при $i \to +\infty$. При каждом фиксированном $k = \overline{1, N-1}$ для непрерывных функций $\delta_i^k(t)$ введем в рассмотрение условия:

(D1k) $\delta_i^k(t) = 0$ $(t \le \alpha_i^k, t \ge \beta_i^k)$, $\delta_i^k(t) \ge 0$ $(\alpha_i^k < t < \beta_i^k)$, где $\alpha_i^k \to 0$, $\beta_i^k \to 0$, $\beta_i^k - \alpha_i^k \le \tau_i^k \to 0$ при $i \to +\infty$;

(D2k) $\int\limits_{\alpha_i^k}^{\beta_i^k} \delta_i^k(t)dt = 1$, для любого $i = 1, 2, \ldots$.

Учитывая, что $\alpha_i^k \to 0$, $\beta_i^k \to 0$ и $\tau_i^k \to 0$ при $i \to +\infty$, мы изначально считаем эти величины настолько малыми, что интервалы $(t_k + \alpha_i^k, t_k + \beta_i^k)$, $k = \overline{1, N-1}$, попарно не пересекаются.

Теорема 3. *Пусть $F(t,x)$ и $p(x)$ удовлетворяют условиям леммы 2, функции $\delta_i^k(t)$ — условиям **(D1k)**–**(D2k)**. Тогда для любого фиксированного разбиения h отрезка I последовательность решений $x_i^h(t)$ задач (4.1) при $i \to +\infty$ сходится к ломаной Эйлера $x^h(t)$ в каждой точке $t \in I$, такой что $t \ne t_k$, $k = \overline{0, N-1}$.*

Доказательство. С учетом замечания 1, применим теорему 2 к включению (4.3) на отрезке $I_1^\varepsilon = [t_0, t_2-\varepsilon]$ для произвольного $\varepsilon > 0$ настолько малого, что $t_1 \in I_1^\varepsilon$. При этом мы учитываем, что начиная с некоторого номера i будет выполняться $\delta_i^2(t) = 0$ для всех $t \in I_1^\varepsilon$. В результате получим, что

$$x_i^h(t) \to x^h(t) \tag{4.2}$$

при любом $t \in I_1^\varepsilon$, $t \neq t_1$ $t \neq t_0$. Тогда в силу правосторонней единственности решений включения $\dot{x} \in F(t,x)$ и произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что (4.2) выполняется во всех точках отрезка $[t_0, t_2]$ кроме точек t_k, $k = 0, 1, 2$.

Теперь в качестве начальных данных возьмем какую-либо точку $s \in (t_1, t_2)$ (например — середину этого интервала) и значение $x_i^h(s)$ ломаной Эйлера в этой точке. Применяя аналогичные рассуждения к отрезку $I_2^\varepsilon = [s, t_3 - \varepsilon]$ и учитывая правостороннюю единственность решений, заключаем, что (4.2) выполняется во всех точках отрезка $[t_0, t_3]$ кроме точек t_k, $k = 0, 1, 2, 3$. Здесь мы учитывали, что начиная с некоторого номера i будет выполняться $\delta_i^k(t) = 0$ для всех $t \in I_2^\varepsilon$, $k = 1, 2$. Этот процесс продолжается до точки t_{N-1} и на этом последнем шаге м ы рассматриваем отрезок $[s, t_0 + T]$, где s — середина отрезка $[t_{N-2}, t_{N-1}|$. □

Рассмотрим задачи

$$\begin{cases} \dot{x}(t) \in F\big(t, x(t)\big) + p\big(x(t-0)\big) \sum\limits_{k=1}^{N-1} \delta(t - t_k), \\ x(t_0) = x_0 + p(x_0). \end{cases} \tag{4.3}$$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F_\lambda\big(t, x(t)\big) + \delta(t)p\big(x(t-0)\big) \sum\limits_{k=1}^{N-1} \delta(t - t_k), \\ x(t_0) = x_0 + p(x_0), \end{cases} \tag{4.4}$$

где $F_\lambda(t,x)$ — аппроксимация Иосиды для $F(t,x)$.

Для (4.3) и (4.4) понятия обобщенных решений $x(t)$ и $x_\lambda(t)$ вводятся по аналогии с предыдущим, как разрывные в точках $t_1, \dots, t_{N-1}$ кривые, доопределенные в них значениями $p\big(x(t_k - 0)\big)$ и $p\big(x_\lambda(t_k - 0)\big)$ $(k = \overline{1, N-1})$ и удовлетворяющие (4.3) и (4.4) во всех остальных точках отрезка I соответственно.

Следствие 3. *Пусть выполняются все условия теоремы 3. Тогда для любого фиксированного разбиения h отрезка I существует константа K, зависящая от числа N точек разбиения h, такая, что для любых обобщенных решений $x(t)$ и $x_\lambda(t)$ включения (4.3)и уравнения (4.4) соответственно выполняется*

$$\|x(t) - x_\lambda(t)\| \leq K\sqrt{\lambda}$$

любых $0 < \lambda < \lambda'$, $t \in I$.

Доказательство вытекает из последовательного применения следствия 2 к отрезкам $[t_{k-1}t_k]$ и начальным условиям $x(t_{k-1}+0)$, $x_\lambda(t_{k-1}+0)$ для $k=\overline{1,N-1}$.

Следствие 4. *Пусть выполняются все условия теоремы 3. Тогда для любого фиксированного разбиения h отрезка I существует константа K, зависящая от числа N точек разбиения h, такая, что для любого обобщенного решения $x_\lambda(t)$ уравнения (4.4) и ломаной Эйлера $x^h(t)$ включения $\dot{x}\in F(t,x)$ выполняется*

$$\|x^h(t)-x_\lambda(t)\|\le K\sqrt{\lambda}$$

для любых $0<\lambda<\lambda'$, $t\in(t_0,t_0+T]$.

Доказательство. Из определения ломаной Эйлера $x^h(t)$ вытекает, что на промежутке $(t_0,t_0+T]$ она совпадает с обобщенным решением включения (4.3) и тогда утверждение следствия вытекает из следствия 3. □

Замечание 3. Как отмечалось во введении данной статьи, сеть ломаных Эйлера называется импульсно-скользящим режимом, если в результате действия корректирующих импульсов предельная справа точка ломаной Эйлера оказывается на многообразии $S=\{(t,x)\in R\times R^n\colon \sigma^j(t,x)=0,\ j=\overline{1,m}\},\quad m\le n$. Для этой цели используется следующее условие „сброса“ (см. [2], [9]):

$$\begin{aligned}&\sigma\big(t,x+p(t,x)\big)=0;\\&p(t,x)=0\iff\sigma(t,x)=0.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Условие (4.5) является конструктивным для ломаных Эйлера, удовлетворяющих условиям **(X1)**–**(X2)**, так как известна функция скачков $p(t,x)$ (интенсивность импульса). Однако для ломаных Эйлера, структура которых определяется условиями допустимости скачка из теоремы 1, функция скачков имеет зависимость $p(t,x,g(t,x))$ и требует дополнительного анализа.

Список литературы

1. Завалищин С. Т. Динамические системы с импульсной структурой / С. Т. Завалищин, А. Н. Сесекин, С. Е. Дрозденко. – Свердловск : Сред.-Урал. кн. изд-во, 1983. – 112 с.
2. Завалищин С. Т. Импульсно-скользящие режимы в нелинейных динамических системах / С. Т. Завалищин, А. Н. Сесекин // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19, № 5. – С. 790–799.
3. Завалищин С. Т. Импульсные процессы. Модели и приложения / С. Т. Завалищин, А. Н. Сесекин. – М. : Наука, 1991. – 225 с.

4. Красовский Н. Н. Позиционные дифференциальные игры / Н. Н. Красовский, А. И. Субботин. – М. : Наука, 1974.
5. Завалищин С. Т. Об особых решениях в задачах оптимизации динамических систем с квадратичным критерием качества / С. Т. Завалищин, А. Н. Сесекин // Дифференц. уравнения. – 1975. – Т. 11. № 4. – С. 665-671.
6. Завалищин С. Т. К вопросу синтеза импульсного управления в задаче оптимизации динамических систем с квадратичным критерием качества / С. Т. Завалищин, А. Н. Сесекин // Некоторые способы аналитического конструирования импульсных регуляторов. – Екатеринбург: – Урал. науч. центр АН СССР, 1979. – С. 3–8.
7. Дыхта В. А. Оптимальное импульсное управление с приложениями / В. А. Дыхта, О. Н. Самсонюк. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 256 с.
8. Кротов В. Ф. Методы и задачи оптимального управления / В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. – М. : Наука, 1973. – 446 с.
9. Финогенко И. А. О дифференциальных включениях с позиционными разрывными и импульсными управлениями / И. А. Финогенко, Д. В. Пономарев // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2013. – Т. 19, № 1. – С. 284–299.
10. Мильман В. Д. Об устойчивости движения при наличии толчков / В. Д. Мильман, А. Д. Мышкис // Сиб. мат. журн. –1960. –Т. 1,2, – С. 233–237.
11. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Пестерюк. – Киев : Вища Школа, 1987. – 288 с.
12. Миллер Б. М. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями / Б. М. Миллер, Е. Я. Рубинович. – М. : Наука, 2005. – 429 с.
13. Сесекин А. Н. Динамические системы с нелинейной импульсной структурой / А. Н. Сесекин // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2000. – Т. 6, № 1. – С. 497–510.
14. Kurzweil J. Generalized ordinary differential equations / J. Kurzweil // Czechosl. Math. Journ. – 1958. – Vol. 8, N 3. – P. 360–588.
15. Красовский Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский/ – М. : Наука, 1968. – 475 с.
16. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. – М. : Наука, 1985. – 224 с.
17. Финогенко И. А. О непрерывных аппроксимациях и правосторонних решениях дифференциальных уравнений с кусочно непрерывной правой частью / И. А. Финогенко // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 5. – С. 647–655.
18. Финогенко И. А. Об условии правой липшицевости для дифференциальных уравнений с кусочно непрерывными правыми частями / И. А. Финогенко // Дифференц. уравнения. – 2003. – Т. 39, № 8. – С. 1068–1075.
19. Барбашин Е. А. Функции Ляпунова / Е. А. Барбашин. – М. : Наука, 1970. – 240 с.
20. Обуховский В. В. Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений / В. В. Обуховский, Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис. – М. : КомКнига, 2005. – 256 с.

Пономарев Денис Викторович, программист, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134 тел.: (3952)453051 (e-mail: zmeigo.sc@gmail.com)

Финогенко Иван Анатольевич, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией, Институт динамики систем и теории

управления СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134
тел.: (3952)453051 (e-mail: fin@icc.ru)

D. Ponomarev, I. Finogenko

Approximation of Pulse Sliding Modes of Differential Inclusions

Abstract. Differential inclusions with pulse influences are investigated. The basic attention is given to dynamic objects with pulse positional control, which is understood as some abstract operator with Dirac's function („a running pulse"), concentrated in each moment of time. „Running pulse" as the generalized function has no sense. Its formalization consists in digitization of correcting pulse influences on the system, corresponding to directed set of partitions for an interval of control . Reaction of system to such control are discontinuous movements, which are a network „Euler's broken lines". In problems of control the special place is occupied the situation when as a result of the next correction the phase point of object appears on some surface. Then at reduction of time between corrections in system the effect such as „slidings" is brought and the network „Euler's broken lines" refers to as a pulse sliding mode. In practical use of procedure of pulse control inevitably there is a problem on replacement of Dirac's pulse to sequence of its continuous approximations of delta-like function. In given article for differential inclusions with positional pulse control in the right-hand part are considered two types of limiting transition on delta-like functions resulting to „Euler's broken lines" and to pulse sliding modes One of them leads to known conditions of an admissibility jump at the moment of pulse influences, and another - determines size of pulse correction directly on value of preset intensity of a pulse depending on time and a condition of object. Researches base on continuous Yosida's approximations of multiple-valued maps and the known facts for the differential equations with pulses.

Keywords: differential inclusion, positional pulse control, Euler's broken lines, a pulse sliding mode, approximation of Yosida, delta-like function.

References

1. Zavalishchin S.T., Sesekin A.N., Drozdenko S.E. Dinamicheskiye Sistemy s Impulsnoy Strukturoy [Dynamic systems with pulse structure]. Sverdlovsk, Sred.-Ural. kn. izd-vo, 1983. 112 p.
2. Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. Pulse-Sliding Modes in Nonliinear Dynamic Systems [Impulsno-skolzyashchie rezhimy v nelineynykh dinamicheskikh sistemakh]. *Differential Equations* [Differentsialnyye uravneniya], 1983, vol. 19, no. 5, pp. 790-799.
3. Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. Impulsnyye Protsessy. Modeli i Prilozheniya [Pulse processes. Models and applications]. Moskow, Nauka, 1991. 225 p.
4. Krasovskiy N.N., Subbotin A.I. Pozitsionnyye Differentsialnyye igry [Positional differential games]. Moskow, Nauka, 1974.

5. Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. On Particular Solutions in Problems of Optimization of Dynamic Systems with Square Quality Citerion [Ob osobykh resheniyakh v zadachakh optimizatsii dinamicheskikh sistem s kvadratichnym kriteriyem kachestva]. *Differential Equations* [Differentsialnyye uravneniya], 1975, vol. 11, no. 4, pp. 665-671.
6. Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. On Synthesis Question of Pulse control in problem of optimization of dynamic systems with square quality citerion [K voprosu sinteza impulsnogo upravleniya v zadache optimizatsii dinamicheskikh sistem s kvadratichnym kriteriyem kachestva]. Some Methods for Analytic Design of Pulse Regulators [Nekotoryye sposoby analiticheskogo konstruirovaniya impulsnykh regulyatorov], Yekaterinburg, Uralskiy nauchnyy tsentr AN SSSR, 1979, pp. 3-8.
7. Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. Optimalnoye Impulsnoye Upravleniye s Prilozheniyami [Optimal pulse control with applications]. Moskow, FIZMATLIT, 2003. 256 p.
8. Krotov V.F., Gurman V.I. Metody i Zadachi Optimalnogo Upravleniya [Methods and problems of optimal control]. Moskow, Nauka, 1973. 446 p.
9. Finogenko I.A., Ponomarev D.V. On Differential Inclusions with Positional Discontinuous and Pulse Control [O differentsialnykh vklyucheniyakh s pozitsionnymi razryvnymi i impulsnymi upravleniyami]. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2013, vol. 19, no. 1, pp. 284-299.
10. Milman V.D., Myshkis A.D. On Stability of Motion with Pushes [Ob ustoychivosti dvizheniya pri nalichii tolchkov]. *Sib. Math. Jour* [Sibirskiy matematitcheskiy zhurnal], 1960, vol. 1, 2, pp. 233-237.
11. Samoylenko A.M., Pesteryuk N.A. Differentsialnyye Uravneniya s Impulsnym Vozdeystviyem [Differential equations with pulse effects]. Kiyev, Vishcha Shkola, 1987. 288 p.
12. Miller B.M., Rubinovich Ye.Ya. Optimizatsiya Dinamicheskikh Sistem s Impulsnymi Upravleniyami [Optimization of dynamic systems with pulse controls]. Moskow, Nauka, 2005. 429 p.
13. Sesekin A. N. Dynamic Systems with Nonlinear pulse Structure [Dinamicheskiye sistemy s nelineynoy impulsnoy strukturoy]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN*, 2000, vol. 6, no. 1, pp. 497-510.
14. Kurzweil J. Generalized Ordinary Differential Equations. *Czechosl. Math. Journ.*, 1958, vol. 8, no. 3, pp. 360-588.
15. Krasovskiy N. N. Teoriya upravleniya dvizheniyem [Control theory of motion]. Moskow, Nauka, 1968. 475 p.
16. Filippov A.F. Differentsialnyye Uravneniya s Razryvnoy Pravoy Chastyu [Differential equations with discontinuous right-hand side]. Moskow, Nauka, 1985. 224 p.
17. Finogenko I.A. On Continuous Approximations and Right-Side Solutions of Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side [O nepreryvnykh approksimatsiyakh i pravostoronnikh resheniyakh differentsialnykh uravneniy s kusochno nepreryvnoy pravoy chastyu]. *Differential Equations* [Differentsialnyye uravneniya], 2005, vol. 41, no. 5, pp. 647-655.

18. Finogenko I.A. On Right-Side Lipschitz Condition for Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides [Ob uslovii pravoy lipshitsevosti dlya differentsialnykh uravneniy s kusochno nepreryvnymi pravymi chastyami]. *Differential Equations* [Differentsialnyye uravneniya], 2003, vol. 39, no. 8, pp. 1068-1075.
19. Barbashin E.A. Funktsii Lyapunova [Lyapunov functions]. Moskow, Nauka, 1970. 240 p.
20. Obukhovskiy V.V., Borisovich Yu.G., Gelman B.D., Myshkis A.D. Vvedeniye v teoriyu mnogoznachnykh otobrazheniy i differentsialnykh vklyucheniy [Introduction to theory of multivalued maps and differential inclusions]. Moskow, KomKniga, 2005. 256 p.

Denis Ponomarev, Programmer, Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033
tel.: (3952)453051 (e-mail: `zmeigo.sc@gmail.com`)

Ivan Finogenko, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Head of Laboratory, Institute of System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033 tel.: (3952)453051
(e-mail: `fin@icc.ru`)