Серия «Математика»
2014. Т. 7. С. 52—60

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.9

О решении задачи Дирихле – Коши для уравнения Баренблатта – Гильмана

Н. А. Манакова, Е. А. Богатырева
Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)

Аннотация. В работе исследуется разрешимость задачи Дирихле – Коши для уравнения Баренблатта – Гильмана, моделирующего неравновесную противоточную капиллярную пропитку. Особенностью рассматриваемой модели является учет эффекта неравновесности — это становится особенно важно, когда процесс пропитки занимает продолжительное время. Нерегулярный и сложный характер структуры порового пространства не позволяет изучать движение жидкостей и газов в нем обычными методами гидродинамики. Поэтому возникает необходимость в создании и исследовании специальных моделей, описывающих эти процессы. Основное уравнение модели является нелинейным и не разрешимо относительно производной по времени. Это создает значительные трудности при его рассмотрении. Авторы относят уравнение Баренблатта – Гильмана к широкому классу уравнений соболевского типа. Уравнения соболевского типа составляют обширную область неклассических уравнений математической физики. Методы исследования, которые используются в работе, первоначально возникли в теории полулинейных уравнений соболевского типа. В таком контексте уравнение рассматривается впервые. Исходная задача решается путем редукции в подходящих функциональных пространствах к задаче Коши для абстрактного квазилинейного уравнения соболевского типа с s-монотонным и p-коэрцитивным оператором. Для абстрактной и исходной задачи доказаны теоремы существования обобщенных решений.

Ключевые слова: уравнение Баренблатта – Гильмана, неравновесная противоточная капиллярная пропитка, квазилинейное уравнение соболевского типа.

Введение

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей класса C^∞. В цилиндре $\Omega \times (0, \tau)$, $\tau \in \mathbb{R}_+$ рассмотрим модель Баренблатта – Гильмана, представленную уравнением

$$u_t - \lambda\alpha(\Delta\Phi(u))_t = \alpha\Delta\Phi(u) \tag{0.1}$$

и условиями Дирихле – Коши

$$u(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\tau), \tag{0.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega. \tag{0.3}$$

Уравнение (0.1) моделирует неравновесную противоточную капиллярную пропитку [1]. Функция $\Phi(u) \equiv |u|^{p-2}u, p \geq 2$ – монотонно возрастающая и гладкая. Параметры α и λ вещественны и положительны. Мы редуцируем (0.1) – (0.3) к задаче Коши

$$u(0) = u_0 \tag{0.4}$$

для абстрактного операторного дифференциального уравнения вида

$$\frac{d}{dt}(L(u)) + M(u) = 0, L(u) = Au + \lambda M(u), \lambda \in \mathbb{R}_+. \tag{0.5}$$

В [2] уравнения вида (0.1) названы «уравнениями с двойной нелинейностью» (double nonlinear equations). Мы же хотим отнести уравнения (0.5) к широкому классу уравнений соболевского типа, мотивируя это следующими аргументами. Во-первых, этот класс уравнений в последнее время привлекает внимание все более широкого круга исследователей [3; 4; 5; 6; 7]. Особенно интересным выглядит распространение идей уравнений соболевского типа на обратные задачи [8], на динамические измерения [9] и на эконометрику [10]. Во-вторых, методы, которыми мы намереваемся исследовать задачу (0.4), (0.5), первоначально возникли именно в теории полулинейных уравнений соболевского типа [11; 12; 13]. Наконец, в-третьих, если записать (0.5) в виде

$$N(u)\dot{u} + M(u) = 0, \tag{0.6}$$

где $N(u) = L'_u$ — производная Фреше оператора L, то получим уравнение соболевского типа, линейное относительно $\dot{u}$. Таким образом, все сказанное дает нам право называть уравнение (0.6), его прообраз (0.5), а также уравнение (0.1) *квазилинейными уравнениями соболевского типа.* Отметим, что в таком контексте уравнения (0.1), (0.5), (0.6) рассматриваются впервые.

Статья, кроме введения и списка литературы, содержит две части. В первой части устанавливается существование решения абстрактной задачи (0.4), (0.5). Во второй части полученные абстрактные результаты применяются к конкретной задаче (0.1) – (0.3).

1. Абстрактная задача Коши

Пусть $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — вещественное гильбертово пространство, отождествленное со своим сопряженным и оснащенное дуальной парой рефлексивных банаховых пространств $\mathfrak{U} \equiv (\mathfrak{U}, \|\cdot\|)$ и $\mathfrak{U}^* \equiv (\mathfrak{U}, \|\cdot\|_*)$ так, что имеют место непрерывные и плотные вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{U}^*$. Пусть оператор $M \in C^{r+1}(\mathfrak{U};\mathfrak{U}^*)$, $r \in \mathbb{N}$, а оператор $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{U}^*)$ симметричен (т. е. $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ при всех $u, v \in \mathfrak{U}$) и положительно определен (т. е. $\langle Au, u\rangle \geq m\|u\|^2_{\mathfrak{H}}$ при всех $u \in \mathfrak{U}$, $m > 0$).

Определение 1. *Вектор-функцию $u \in C^1((-\tau_0;\tau_0);\mathfrak{U})$, удовлетворяющую (0.6) на $(-\tau_0, \tau_0)$ при некотором $\tau_0 = \tau_0(u_0)$ и условию (0.4), назовем (классическим) локальным решением данной задачи.*

Лемма 1. *Пусть операторы $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{U}^*)$, $M \in C^{r+1}(\mathfrak{U};\mathfrak{U}^*)$, $r \in \mathbb{N}$, оператор $N(u_0) : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}^*$ — топлинейный изоморфизм. Тогда существует единственное локальное решение задачи (0.4), (0.6).*

Доказательство леммы 1 приводится в работе [14].

Определение 2. *Оператор $M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}^*$ называется s-монотонным, если $M \in C^r(\mathfrak{U};\mathfrak{U}^*), r \geq 1$ и $\langle M'_u v, v\rangle > 0$ при всех $u, v \in \mathfrak{U} \setminus \{0\}$.*

Определение 3. *Оператор $M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}^*$ называется p-коэрцитивным, если существуют $C^M, C_M \in \mathbb{R}_+$, и $p \in [2, +\infty)$ такие, что выполняется $\langle M(u), u\rangle \geq C_M\|u\|^p$ и $\|M(u)\|_* \leq C^M\|u\|^{p-1}$ для любого $u \in \mathfrak{U}$.*

Замечание 1. Впервые понятия s-монотонного и p-коэрцитивного операторов появились в [11; 12]. Отметим еще, что из сильной монотонности гладкого оператора следует s-монотонность, а из s-монотонности — строгая монотонность. Кроме того, из p-коэрцитивности вытекает коэрцитивность [11].

Напомним, что оператор $M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}^*$ называется *однородным порядка* $k \in \overline{\mathbb{R}}_+$, если $M(su) = s^k M(u)$ при любых $u \in \mathfrak{U}$, $s \in \mathbb{R}_+$ и некотором $k \in \overline{\mathbb{R}}_+$, не зависящим ни от u, ни от s.

Лемма 2. *Пусть $M \in C^r(\mathfrak{U};\mathfrak{U}^*)$, $r \in \mathbb{N}$ – однородный оператор порядка $k \in \overline{\mathbb{R}}_+$, имеющий симметричную производную Фреше. Тогда имеет место следующее соотношение*

$$\frac{d}{dt}\langle M(u), u\rangle = (k+1)\langle M(u), \dot{u}\rangle.$$

Доказательство. Пусть

$$J(t) = \int\limits_0^1 \langle M(su), u\rangle\, ds = \frac{1}{k+1}\langle M(u), u\rangle.$$

Далее,

$$\frac{dJ(t)}{dt} = \int\limits_0^1 (s\langle M'_{su}\dot{u}, u\rangle + \langle M(su), \dot{u}\rangle) ds = \int\limits_0^1 (s\langle M'_{su}u, \dot{u}\rangle + \langle M(su), \dot{u}\rangle) ds =$$

$$= \int\limits_0^1 (s\frac{d}{ds}\langle M(su), \dot{u}\rangle + \langle M(su), \dot{u}\rangle)ds = \int\limits_0^1 \frac{d}{ds}(s\langle M(su), \dot{u}\rangle)ds = \langle M(u), \dot{u}\rangle .$$

$\square$

Результаты, аналогичные лемме 2, содержатся в монографии [4]. Таким образом, все готово для рассмотрения задачи (0.4), (0.5).

Определение 4. *Вектор-функцию $u \in L_\infty(0, \tau; \mathfrak{U})$ такую, что $\frac{du}{dt} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{H})$ при $\tau \in \mathbb{R}_+$, назовем обобщенным решением задачи (0.4), (0.5), если она удовлетворяет соотношениям*

$$\left\langle \frac{d}{dt} L(u(t)), v \right\rangle + \langle M(u(t)), v\rangle = 0, \text{ при п. в. } t \in (0, \tau)$$

и

$$\langle u(0) - u_0, v\rangle = 0$$

при всех $v \in \mathfrak{U}$.

Теорема 1. *Пусть оператор $M \in C^{r+1}(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*)$, $r \in \mathbb{N}$, s-монотонен, p-коэрцитивен и однороден порядка $k \in \overline{\mathbb{R}_+}$, причем его производная Фреше симметрична. Пусть на некотором интервале $(-\tau_0, \tau_0)$, $\tau_0 \in \mathbb{R}_+$, существует единственное локальное решение задачи (0.4), (0.6). Тогда существует обобщенное решение задачи (0.4), (0.5).*

Доказательство. Из (0.6) получаем

$$\langle N(u)\dot{u}, u\rangle = -\langle M(u), u\rangle , \langle N(u)\dot{u}, \dot{u}\rangle = -\langle M(u), \dot{u}\rangle .$$

Затем, отсюда

$$\frac{d}{dt}\langle L(u), u\rangle = \langle N(u)\dot{u}, u\rangle + \langle L(u), \dot{u}\rangle = -\langle M(u), u\rangle + \langle Au, \dot{u}\rangle + \lambda\langle M(u), \dot{u}\rangle =$$

$$= -\langle M(u), u\rangle + \langle Au, \dot{u}\rangle - \lambda\langle N(u)\dot{u}, \dot{u}\rangle . \qquad (1.1)$$

Поскольку в силу линейности, непрерывности и симметричности оператора A

$$\frac{d}{dt}\langle Au, u\rangle = \langle A\dot{u}, u\rangle + \langle Au, \dot{u}\rangle = 2\langle Au, \dot{u}\rangle ,$$

то из (1.1) следует

$$\frac{d}{dt}(\langle L(u), u\rangle - \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle) = -\langle M(u), u\rangle - \lambda\langle N(u)\dot{u}, \dot{u}\rangle \leq 0 \qquad (1.2)$$

ввиду p-коэрцитивности и s-монотонности оператора M, а также положительной определенности оператора A. Заметив, что

$$\langle L(u), u\rangle - \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle = \lambda\langle M(u), u\rangle + \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle,$$

из (1.2) после интегрирования на $(0,t)$ при любом $t \in (0,\tau)$, получим

$$C_M\|u(t)\|^p + \frac{m}{2}\|u(t)\|^2_{\mathfrak{H}} \leq \lambda\langle M(u(t)), u(t)\rangle + \frac{1}{2}\langle Au(t), u(t)\rangle \leq$$

$$\leq \lambda\langle M(u_0), u_0\rangle + \frac{1}{2}\langle Au_0, u_0\rangle \leq \lambda C^M\|u(0)\|^p + \frac{C_A}{2}\|u_0\|^2, \tag{1.3}$$

где C_A – «константа ограниченности» оператора $A \in \mathfrak{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{U}^*)$. Из (1.3) вытекает

$$\|u(t)\|^p \leq C_1(\|u(0)\|^p + \|u_0\|^2), \text{при п. в. } t \in (0,\tau),$$

откуда следует включение $u \in L_\infty((0,\tau);\mathfrak{U})$ при всех $\tau \in \mathbb{R}_+$.

Далее, из (0.6) следует, что

$$\langle A\dot{u}, \dot{u}\rangle = -\lambda\left\langle M'_u\dot{u}, \dot{u}\right\rangle - \langle M(u), \dot{u}\rangle \leq -\langle M(u), \dot{u}\rangle$$

в силу s-монотонности оператора M. Отсюда в силу леммы 2 получаем

$$\langle A\dot{u}, \dot{u}\rangle \leq -\frac{1}{k+1}\frac{d}{dt}\langle M(u), u\rangle. \tag{1.4}$$

Интегрируя (1.4) на интервале $(0,t)$ при любом $t \in (0,\tau)$, получим

$$m\int\limits_0^t \|\dot{u}\|^2_{\mathfrak{H}}\,ds \leq \int\limits_0^t \langle A\dot{u}, \dot{u}\rangle\,ds \leq$$

$$\leq -\frac{1}{k+1}\langle M(u(t)), u(t)\rangle + \frac{1}{k+1}\langle M(u_0), u_0\rangle \leq \frac{C_M}{k+1}\|u_0\|^p. \tag{1.5}$$

Из (1.5) получаем неравенство

$$\|\dot{u}\|^2_{L_2((0,\tau);\mathfrak{H})} \leq C_2\|u_0\|^p,$$

из которого следует включение $\dot{u} \in L_2((0,\tau);\mathfrak{H})$ при всех $\tau \in \mathbb{R}_+$. $\square$

2. Задача Дирихле – Коши для уравнения Баренблатта – Гильмана

Рассмотрим задачу (0.1) – (0.3). Следуя идеологии [11; 12; 13], проведем редукцию этой задачи к абстрактной задаче (0.4), (0.5). Положим $\mathfrak{H} = W_2^{-1}$ (все функциональные пространства определены на области Ω) со скалярным произведением

$$\langle u, v\rangle = \int\limits_\Omega u(-\Delta)^{-1}v\,dx, u, v \in \mathfrak{H}, \tag{2.1}$$

где $(-\Delta)^{-1}$ — оператор Грина однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона $\Delta u = f$ в области Ω. В качестве пространства $\mathfrak{U}$ выберем пространство L_p, поскольку $L_p \hookrightarrow L_2$ при $p \in [2, +\infty)$ в случае ограниченности области Ω (что имеет место), а $L_2 \hookrightarrow W_2^{-1}$, то в качестве $\mathfrak{U}^*$ можно взять пространство, сопряженное к $\mathfrak{U}$ относительно двойственности (2.1). В таком случае $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{U}^*$ (при $p \in [2, +\infty)$) плотны и непрерывны. Формулой

$$\langle Au, v\rangle = \langle u, v\rangle = \int\limits_{\Omega} u(-\Delta)^{-1} v\, dx, u, v \in \mathfrak{U}$$

определим оператор A.

Определим оператор M следующим образом:

$$\langle M(u), v\rangle = \alpha \int\limits_{\Omega} |u|^{p-2} uvdx, \quad u,\, v \in \mathfrak{U}.$$

В работе [14] доказано, что оператор $A : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}^*$ линеен, положительно определен и непрерывен, а оператор $M \in C^2(\mathfrak{U}; \mathfrak{U}^*)$ s-монотонен, p-коэрцитивен. Кроме того, как следует из построения, оператор A является симметричным.

Лемма 3. *Оператор M однороден порядка $k = p-1$ и имеет симметричную производную Фреше.*

Доказательство. Покажем однородность оператора M.

$$\langle M(su), v\rangle = \alpha \int\limits_{\Omega} |su|^{p-2} suvdx = s^{p-1}\alpha \int\limits_{\Omega} |u|^{p-2} uvdx = s^{p-1}\langle M(u), v\rangle =$$

$$= \langle s^{p-1} M(u), v\rangle.$$

Построим производную Фреше M'_u оператора M. В $u \in \mathfrak{U}$ она определяется формулой

$$\langle M'_u v, w\rangle = (p-1)\alpha \int\limits_{\Omega} |u|^{p-2} vw\, dx, u, v, w \in \mathfrak{U}.$$

Из построения сразу же следует ее симметричность, т. е.

$$\langle M'_u v, w\rangle = \langle v, M'_u w\rangle. \qquad \square$$

В работе [14] доказана следующая лемма о локальном решении задачи (0.1) – (0.3).

Лемма 4. *Пусть $p \geq 2$ и $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любого $u_0 \in \mathfrak{U} \setminus \{0\}$ существует единственное локальное решение задачи (0.1) – (0.3).*

В силу теоремы 1 и лемм 3 – 4 справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $p \geq 2$ и $\alpha, \lambda \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любого $u_0 \in \mathfrak{U} \setminus \{0\}$ и для любого $\tau \in \mathbb{R}_+$ существует обобщенное решение задачи (0.1)–(0.3).*

Замечание 2. Если $u_0 = 0$, тогда $u \equiv 0$ является решением задачи (0.1) – (0.3). Единственность же решения следует из оценки (1.3).

Авторы выражают благодарность профессору Г. А. Свиридюку за ценные замечания и неоценимую помощь в работе.

Список литературы

1. Баренблатт Г. И. Математическая модель неравновесной противоточной капиллярной пропитки / Г. И. Баренблатт, А. А. Гильман // Инженер.-физ. журн. – 1987. – Т. 52, № 3. – С. 456–461.
2. Sviridyuk G. A. Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – Utrecht ; Boston ; Köln ; Tokio : VSP, 2003. – 216 p.
3. Showalter R. E. Nonlinear degenerate evolution equations and partial differential equations of mixed type / R. E. Showalter // SIAM J. Math. Anal. – 1975. – Vol. 6, N 1. – P. 25–42.
4. Al'shin A. B. Blow-up in nonlinear Sobolev-type equations / A. B. Al'shin, M. O. Korpusov, A. G. Sveshnikov. – Berlin ; N.-Y. : Walter de Gruyter, 2011. – 648 p.
5. Загребина С. А. Начально-конечные задачи для неклассических моделей математической физики / С. А. Загребина // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6, № 2. – С. 5–24.
6. Замышляева А. А. Стохастические неполные линейные уравнения соболевского типа высокого порядка с аддитивным белым шумом / А. А. Замышляева // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. – 2012. – № 40 (299), вып. 14. – С. 73–82.
7. Сагадеева М. А. Разрешимость нестационарной задачи теории фильтрации / М. А. Сагадеева // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математическое моделирование и программирование. – 2012. – № 27 (286), вып. 13. – С. 86–98.
8. Кожанов А. И. Линейные обратные задачи для одного класса вырождающихся уравнений соболевского типа / А. И. Кожанов // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. – 2012. – № 5 (264), вып. 11. – С. 33–42.
9. Шестаков А. Л. Оптимальное измерение динамически искаженных сигналов / А. Л. Шестаков, Г. А. Свиридюк // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. – 2011. – № 17 (234), вып. 8. – С. 70–75.
10. Келлер А. В. Алгоритм решения задачи Шоуолтера – Сидорова для моделей леонтьевского типа / А. В. Келлер // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Мат. моделирование и программирование. – 2011. – № 4 (221), вып. 7. – С. 40–46.
11. Свиридюк Г. А. Разрешимость неоднородной задачи для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г. А. Свиридюк, И. Н. Семенова // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 9. – С. 1607–1611.
12. Свиридюк Г. А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г. А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. – 1989. – № 2. – С. 55–61.

13. Манакова Н. А. Задачи оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа / Н. А. Манакова. – Челябинск : Изд. центр ЮУрГУ, 2012. – 88 с.
14. Манакова Н. А. Численное исследование процессов в модели Баренблатта — Гильмана / Н. А. Манакова, Е. А. Богатырева // Вестн. МаГУ. Математика. – 2013. – Вып. 15. – С. 58–67.

Манакова Наталья Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, Южно-Уральский государственный университет (НИУ), 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76, тел.: (351)2679339, (e-mail: manakova@susu.ac.ru)

Богатырева Екатерина Александровна, ассистент, Южно-Уральский государственный университет (НИУ), 454080, г. Челябинск, пр. Ленина, 76 тел.: (351)2679339 (e-mail: bogatyrevaea@susu.ac.ru)

N. Manakova, E. Bogatyreva

On a Solution of the Dirichlet – Cauchy Problem for the Barenblatt – Gilman Equation.

Abstract. We investigate the solvability of the Dirichlet – Cauchy problem for the Barenblatt – Gilman equation modeling the nonequilibrium countercurrent capillary impregnation. The feature of this model is the consideration of non-equilibrium effect — this becomes especially important when the process of impregnation takes a long time. Irregular and complex structure of the pore space does not allow to study the movement of liquids and gases therein by conventional methods of hydrodynamics. Hence the design and analysis of specific models describing these processes are required. The main equation of the model is nonlinear and not solvable for the derivative. This creates a significant difficulty in its consideration. The authors attribute the Barenblatt – Gilman equation to the wide class of Sobolev type equations. Sobolev type equations constitute an extensive area of nonclassical equations of mathematical physics. Research methods that are used in the work are initially emerged in the theory of semilinear Sobolev type equations. The equation is first considered in this context. The original problem is solved by the reduction in suitable functional spaces to the Cauchy problem for an abstract quasilinear Sobolev type equation with s-monotone and p-coercive operator. Existence theorems have been proven for generalized solutions of the abstract and the original problem.

Keywords: Barenblatt – Gilman equation, countercurrent capillary impregnation, quasilinear Sobolev type equation.

References

1. Barenblatt G.I., Gilman A.A. Mathematical Model of the Countercurrent Capillary Impregnation. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 1987, vol. 52, no. 3, pp. 456-461. (in Russian)
2. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht; Boston; Koln; Tokio, VSP, 2003. 216 p.
3. Showalter R.E. Nonlinear Degenerate Evolution Equations and Partial Differential Equations of Mixed Type. *SIAM J. Math. Anal.*, 1975, vol. 6, no. 1, pp. 25-42.
4. Al'shin A.B, Korpusov M.O., Sveshnikov A.G. Blow-up in Nonlinear Sobolev-type Equations. Berlin; N. Y., Walter de Gruyter, 2011. 648 p.

5. Zagrebina S.A. The Initial-Finite Problems for Nonclassical Models of Mathematical Physics. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2013, vol. 6, no. 2, pp. 5-24. (in Russian)
6. Zamyshlyaeva A.A. Stochastic Incomplete Linear Sobolev Type High-Ordered Equations with Additive White Noise. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2012, no. 40 (299), issue 14, pp. 73-82. (in Russian)
7. Sagadeyeva M.A. The Solvability of Nonstationary Problem of Filtering Theory. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software* 2012, no. 27 (286), issue 13, pp. 86-98. (in Russian)
8. Kozhanov A.I. Linear Inverse Problems for a Class of Degenerate Equations of Sobolev, *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2012, no. 5 (264), issue 11, pp. 33-42. (in Russian)
9. Shestakov A.L., Sviridyuk G.A. Optimal Measurement of Dynamically Distorted Signals. *Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2011, no. 17 (234), issue 8, pp. 70-75. (in Russian)
10. Keller A.B. The Algorithm for Solution of the Showalter-Sidorov Problem for Leontief Type Models. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming & Computer Software"*, 2011, no 4 (221), issue 7, pp. 40-46. (in Russian)
11. Sviridyuk G.A., Semenova I.N. Solvability of the Inhomogenous Problem for the Generalized Boussinesq Filtration Equation. *Differential Equations*, 1988, vol. 24, no. 9, pp. 1607-1611. (in Russian)
12. Sviridyuk G.A. One Problem for the Generalized Boussinesq Filtration Equation. *Russian Mathematics*, 1989, no. 2, pp. 55-61. (in Russian)
13. Manakova N. A. The Optimal Control Problems for Semilinear Sobolev Type Equations. Chelyabinsk: SUSU publish. center, 2012. 88 p. (in Russian)
14. Manakova N. A., Bogatyreva E.A. Numerical Research of Processes in the Barenblatt-Gilman Model. *Bulletin of the Magnitogorsk State University.* Mathematics, 2013, issue 15, pp. 58-67. (in Russian)

Manakova Natalia, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, South Ural State University, 76, Lenin ave, Chelyabinsk, 454080, tel.: (351)2679339 (e-mail: manakova@susu.ac.ru)

Bogatyreva Ekaterina, Assistant, South Ural State University, 76, Lenin ave, Chelyabinsk, 454080, tel.: (351)2679339
(e-mail: bogatyrevaea@susu.ac.ru)