Серия «Математика»
2014. Т. 7. С. 124—132

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.946

О первом интеграле обобщенного уравнения Абеля второго рода специального вида*

Э. И. Семенов
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. Исследование различных математических моделей, описываемых нелинейными системами дифференциальных уравнений с частными производными, во многих случаях путем специальных преобразований сводится к изучению некоторых нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В данной статье объектом такого сведения и исследования выступает уравнение Абеля второго рода. В работе при некоторых предположениях на коэффициенты уравнения построено общее решение (первый интеграл) обобщенного уравнения Абеля второго рода специального вида.

Ключевые слова: уравнения Абеля второго рода, первый интеграл.

1. Введение

В статье при некоторых предположениях на коэффициенты уравнения строится общее решение (первый интеграл) обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) первого порядка следующего вида

$$\left[\sum_{k=0}^{n-1} g_k(x)y^k\right] y' = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)y^k, \quad n \geq 2, \quad y \triangleq y(x). \tag{1}$$

Здесь и далее штрих означает производную по аргументу x. Будем называть это уравнение — обобщенным уравнением Абеля второго рода, мотивируя тем, что частным случаем уравнения (1) при $n = 2$ является классическое уравнение Абеля второго рода [1], большое число точных решений которого приведены в справочниках [1, 2]. Конкретные случаи

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5007.2014.9)

уравнения (1) возникали и рассматривались в работах [3–5]. Отметим, что уравнение (1) частным случаем уравнения Аппеля [6]

$$\left[\sum_{k=0}^{m} g_k(x)y^k\right] y' = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)y^k.$$

В данной работе мы будем предполагать, что функции $f_n(x)$ и $g_k(x)$ не равны нулю для всех $k = 0, 1, 2, ..., n?1$.

2. Основные результаты

Докажем основной результат данной работы.

Теорема 1. *Если существуют константы* $\lambda_k, (k = 1, \dots, n-1), n \geq 2$, *такие, что справедливы соотношения*

$$\lambda_{n-1} = \frac{n}{n-1}\frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)}\frac{g_{n-2}(x)}{g_{n-1}(x)}, \quad \lambda_{n-2} = \frac{n}{n-2}\frac{P_n(x)}{P_{n-2}(x)}\frac{g_{n-3}(x)}{g_{n-1}(x)},$$

$$\dots$$

$$\lambda_k = \frac{n}{k}\frac{P_n(x)}{P_k(x)}\frac{g_{k-1}(x)}{g_{n-1}(x)}, \tag{2}$$

$$\dots$$

$$\lambda_2 = \frac{n}{2}\frac{P_n(x)}{P_2(x)}\frac{g_1(x)}{g_{n-1}(x)}, \quad \lambda_1 = n\frac{P_n(x)}{P_1(x)}\frac{g_0(x)}{g_{n-1}(x)},$$

то уравнение (1) имеет общее решение (первый интеграл)

$$P_n(x)y^n + \lambda_{n-1}P_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + \lambda_k P_k(x)y^k + \dots +$$

$$\lambda_2 P_2(x)y^2 + \lambda_1 P_1(x)y = n\int \frac{f_0(x)}{g_{n-1}(x)}P_n(x)\,dx + C, \tag{3}$$

где

$$P_n(x) = \exp\left(-n\int \frac{f_n(x)}{g_{n-1}(x)}dx\right),$$

$$P_{n-1}(x) = \exp\left(-(n-1)\int \frac{f_{n-1}(x)}{g_{n-2}(x)}dx\right),$$

$$\dots$$

$$P_k(x) = \exp\left(-k\int \frac{f_k(x)}{g_{k-1}(x)}dx\right), \tag{4}$$

$$\dots$$

$$P_2(x) = \exp\left(-2\int \frac{f_2(x)}{g_1(x)}dx\right), \quad P_1(x) = \exp\left(-\int \frac{f_1(x)}{g_0(x)}dx\right).$$

Доказательство. Умножив обе части уравнения (1) на функцию $P_n(x)$, получим

$$P_n(x)g_0(x)y' + P_n(x)g_1(x)yy' + P_n(x)g_2(x)y^2y' + \ldots + P_n(x)g_{n-1}(x)y^{n-1}y' = P_n(x)f_0(x) + P_n(x)f_1(x)y + \ldots + P_n(x)f_n(x)y^n.$$

Из первой формулы (4) следует соотношение

$$P_n(x)f_n(x) = -\frac{1}{n}g_{n-1}(x)P_n'(x),$$

с учетом которого последнее равенство преобразуем к виду

$$\frac{1}{n}g_{n-1}(x)\left(P_n(x)y^n\right)' + P_n(x)g_0(x)y' + P_n(x)g_1(x)yy' + \ldots + P_n(x)g_{n-2}(x)y^{n-2}y' = P_n(x)f_0(x) + P_n(x)f_1(x)y + \ldots + P_n(x)f_{n-1}(x)y^{n-1}. \quad (5)$$

Теперь, умножим обе части равенства (5) на функцию $P_{n-1}(x)$. Получим следующее соотношение

$$\frac{1}{n}g_{n-1}(x)P_{n-1}(x)\left(P_n(x)y^n\right)' + P_{n-1}(x)P_n(x)g_0(x)y' + P_{n-1}(x)P_n(x)g_1(x)yy' + \ldots + P_{n-1}(x)P_n(x)g_{n-2}(x)y^{n-2}y' = P_{n-1}(x)P_n(x)f_0(x) + P_{n-1}(x)P_n(x)f_1(x)y + \ldots + P_{n-1}(x)P_n(x)f_{n-2}(x)y^{n-2} + P_{n-1}(x)P_n(x)f_{n-1}(x)y^{n-1}.$$

Для упрощения полученного выражения воспользуемся второй из формул (4), которую для удобства запишем в виде

$$P_{n-1}(x)f_{n-1}(x) = -\frac{1}{(n-1)}g_{n-2}(x)P_{n-1}'(x),$$

с учетом этого равенства последнее соотношение приведем к виду

$$\frac{1}{n}g_{n-1}(x)P_{n-1}(x)\left(P_n(x)y^n\right)' + \frac{1}{n-1}g_{n-2}(x)P_n(x)\left(P_{n-1}(x)y^{n-1}\right)' + P_{n-1}(x)P_n(x)g_0(x)y' + P_{n-1}(x)P_n(x)g_1(x)yy' + \ldots + P_{n-1}(x)P_n(x)g_{n-3}(x)y^{n-3}y' = P_{n-1}(x)P_n(x)f_0(x) + P_{n-1}(x)P_n(x)f_1(x)y + \ldots + P_{n-1}(x)P_n(x)f_{n-3}(x)y^{n-3} + P_{n-1}(x)P_n(x)f_{n-2}(x)y^{n-2}. \quad (6)$$

Затем, умножим обе части формулы (6) на функцию $P_{n-2}(x)$ и упростим полученное выражение с помощью соотношения

$$P_{n-2}(x)f_{n-2}(x) = -\frac{1}{(n-2)}g_{n-3}(x)P_{n-2}'(x).$$

Продолжив эту процедуру, в конце концов мы придем к формуле

$$\prod_{k=1}^{n} P_k(x)\left(\frac{1}{n}\frac{g_{n-1}(x)}{P_n(x)}\left(P_n(x)y^n\right)' + \frac{1}{n-1}\frac{g_{n-2}(x)}{P_{n-1}(x)}\left(P_{n-1}(x)y^{n-1}\right)' + \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{1}{2}\frac{g_1(x)}{P_2(x)}\left(P_2(x)y^2\right)' + \frac{g_0(x)}{P_1(x)}\left(P_1(x)y\right)'\right) = f_0(x)\prod_{k=1}^{n} P_k(x). \tag{7}$$

Разделив обе части равенства (7) на функцию $\frac{1}{n}g_{n-1}(x)\prod\limits_{k=1}^{n-1} P_k(x) \neq 0$, получим

$$\left(P_n(x)y^n\right)' + \frac{n}{n-1}\frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)}\frac{g_{n-2}(x)}{g_{n-1}(x)}\left(P_{n-1}(x)y^{n-1}\right)' +$$

$$\frac{n}{n-2}\frac{P_n(x)}{P_{n-2}(x)}\frac{g_{n-3}(x)}{g_{n-1}(x)}\left(P_{n-2}(x)y^{n-2}\right)' + \ldots + \frac{n}{2}\frac{P_n(x)}{P_2(x)}\frac{g_1(x)}{g_{n-1}(x)}\left(P_2(x)y^2\right)' +$$

$$n\frac{P_n(x)}{P_1(x)}\frac{g_0(x)}{g_{n-1}(x)}\left(P_1(x)y\right)' = n\frac{f_0(x)}{g_{n-1}(x)}P_n(x). \tag{8}$$

Предположим, теперь, что следующие величины

$$\frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)}\frac{g_{n-2}(x)}{g_{n-1}(x)},\quad \frac{P_n(x)}{P_{n-2}(x)}\frac{g_{n-3}(x)}{g_{n-1}(x)},\quad \ldots$$

$$\frac{P_n(x)}{P_2(x)}\frac{g_1(x)}{g_{n-1}(x)},\quad \frac{P_n(x)}{P_1(x)}\frac{g_0(x)}{g_{n-1}(x)},$$

есть некоторые отличные от нуля постоянные. Другими словами, если существуют константы λ_k, $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, $n \geq 2$, определяемые формулами (2), то соотношение (8) преобразуется к выражению

$$\left(P_n(x)y^n\right)' + \lambda_{n-1}\left(P_{n-1}(x)y^{n-1}\right)' + \ldots + \lambda_k\left(P_k(x)y^k\right)' + \ldots +$$

$$\lambda_2\left(P_2(x)y^2\right)' + \lambda_1\left(P_1(x)y\right)' = n\frac{f_0(x)}{g_{n-1}(x)}P_n(x),$$

интегрируя которое, окончательно имеем

$$P_n(x)y^n + \lambda_{n-1}P_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + \lambda_k P_k(x)y^k + \ldots +$$

$$\lambda_2 P_2(x)y^2 + \lambda_1 P_1(x)y = n\int \frac{f_0(x)}{g_{n-1}(x)}P_n(x)\,dx + C,$$

где C – постоянная интегрирования. Теорема доказана. $\square$

Замечание 1. Соотношения (4) можно преобразовать, соответственно, к следующим формулам

$$\frac{1}{g_{n-2}(x)}\left[(n-1)f_{n-1}(x)+g'_{n-2}(x)\right]=\frac{1}{g_{n-1}(x)}\left[nf_n(x)+g'_{n-1}(x)\right],$$
$$\ldots$$
$$\frac{1}{g_{k-1}(x)}\left[kf_k(x)+g'_{k-1}(x)\right]=\frac{1}{g_{n-1}(x)}\left[nf_n(x)+g'_{n-1}(x)\right],$$
$$\ldots$$
$$\frac{1}{g_0(x)}\left[f_1(x)+g'_0(x)\right]=\frac{1}{g_{n-1}(x)}\left[nf_n(x)+g'_{n-1}(x)\right].$$

В частном случае $n=2$, последние соотношения сводятся к одному равенству

$$\frac{1}{g_1(x)}\left[2f_2(x)+g'_1(x)\right]=\frac{1}{g_0(x)}\left[f_1(x)+g'_0(x)\right]. \tag{10}$$

Таким образом, если имеет место равенство (10), то уравнение Абеля второго рода

$$\left[g_0(x)+g_1(x)y\right]y'=f_0(x)+f_1(x)y+f_2(x)y^2,$$

в силу теоремы 2 обладает первым интегралом

$$P_2(x)y^2+2\frac{g_0(x)}{g_1(x)}P_2(x)y=2\int\frac{f_0(x)}{g_1(x)}P_2(x)dx+C,$$

где $P_2(x)=\exp\left(-2\int\frac{f_2(x)}{g_1(x)}dx\right)$. Отметим, что данный случай приведен в справочнике [1].

Замечание 2. В частном случае $n=2$, из теоремы 1 следует результат, полученный в работе [7].

Теорема 2. *Если в ОДУ (1) коэффициенты уравнения связаны соотношениями*

$$f_1(x)=\frac{g_0(x)}{g_{n-1}(x)}\left(nf_n(x)+g'_{n-1}(x)\right)-g'_0(x),$$

$$f_2(x)=\frac{g_1(x)}{2g_{n-1}(x)}\left(nf_n(x)+g'_{n-1}(x)\right)-\frac{1}{2}g'_1(x),$$
$$\ldots$$
$$f_k(x)=\frac{g_{k-1}(x)}{kg_{n-1}(x)}\left(nf_n(x)+g'_{n-1}(x)\right)-\frac{1}{k}g'_{k-1}(x), \tag{11}$$
$$\ldots$$

$$f_{n-1}(x) = \frac{g_{n-2}(x)}{(n-1)g_{n-1}(x)}\left(nf_n(x) + g'_{n-1}(x)\right) - \frac{1}{n-1}g'_{n-2}(x),$$

то уравнение (1) обладает общим решением (первым интегралом) следующего вида

$$y^n + \frac{n}{n-1}\frac{g_{n-2}(x)}{g_{n-1}(x)}y^{n-1} + \ldots + \frac{n}{k}\frac{g_{k-1}(x)}{g_{n-1}(x)}y^k + \ldots +$$

$$\frac{n}{2}\frac{g_1(x)}{g_{n-1}(x)}y^2 + n\frac{g_0(x)}{g_{n-1}(x)}y = u(x), \tag{12}$$

где

$$u(x) = \left[n\int \frac{f_0(x)}{g_{n-1}(x)}e^{-n\int \frac{f_n(x)}{g_{n-1}(x)}dx}dx + C\right]e^{n\int \frac{f_n(x)}{g_{n-1}(x)}dx}, \tag{13}$$

C – произвольная постоянная; $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, $n \geq 2$.

Доказательство. Легко проверить, что функция $u(x)$ вида (13) является общим решением линейного неоднородного ОДУ первого порядка следующего вида

$$u' = \frac{nf_n(x)}{g_{n-1}(x)}u + \frac{nf_0(x)}{g_{n-1}(x)}. \tag{14}$$

Таким образом, чтобы убедиться в справедливости теоремы достаточно показать, что функция $u(x)$, определяемая левой частью равенства (12), удовлетворяет ОДУ (14) в силу уравнения (1) и соотношений (11).

Итак, вычислив производную от левой и правой частей формулы (12), имеем

$$ny^{n-1}y' + \frac{n}{n-1}\left(\frac{g_{n-2}(x)}{g_{n-1}(x)}\right)'y^{n-1} + n\frac{g_{n-2}(x)}{g_{n-1}(x)}y^{n-2}y' + \ldots + \frac{n}{k}\left(\frac{g_{k-1}(x)}{g_{n-1}(x)}\right)'y^k$$

$$+ n\frac{g_{k-1}(x)}{g_{n-1}(x)}y^{k-1}y' + \ldots + \frac{n}{2}\left(\frac{g_1(x)}{g_{n-1}(x)}\right)'y^2 + n\frac{g_1(x)}{g_{n-1}(x)}yy' + n\left(\frac{g_0(x)}{g_{n-1}(x)}\right)'y$$

$$+ n\frac{g_0(x)}{g_{n-1}(x)}y' = u'(x).$$

Сгруппировав в левой части последнего равенства слагаемые содержащие производную y', получим

$$\frac{n}{g_{n-1}(x)}\left(\left[\sum_{k=0}^{n-1} g_k(x)y^k\right]y' + Q(y)\right) = u'(x). \tag{15}$$

где $Q(y)$ — многочлен следующего вида

$$Q(y)=\frac{g_{n-1}(x)}{n-1}\left(\frac{g_{n-2}(x)}{g_{n-1}(x)}\right)'y^{n-1}+\ldots+\frac{g_{n-1}(x)}{k}\left(\frac{g_{k-1}(x)}{g_{n-1}(x)}\right)'y^{k}+\ldots+$$
$$\frac{g_{n-1}(x)}{2}\left(\frac{g_{1}(x)}{g_{n-1}(x)}\right)'y^{2}+g_{n-1}(x)\left(\frac{g_{0}(x)}{g_{n-1}(x)}\right)'y. \qquad (16)$$

Заменив производную $u'(x)$ правой частью ОДУ (14), формулу (15) перепишем в виде

$$\left[\sum_{k=0}^{n-1}g_k(x)y^k\right]y'+Q(y)=f_n(x)u+f_0(x).$$

Здесь, в свою очередь, заменим функцию $u(x)$ левой частью равенства (12)

$$\left[\sum_{k=0}^{n-1}g_k(x)y^k\right]y'+Q(y)=f_n(x)y^n+P(y)+f_0(x), \qquad (17)$$

где $P(y)$ – многочлен следующего вида

$$P(y)=\frac{nf_n(x)}{g_{n-1}(x)}\left(\frac{g_{n-2}(x)}{n-1}y^{n-1}+\ldots+\frac{g_{k-1}(x)}{k}y^{k}+\ldots+\right.$$
$$\left.\frac{g_1(x)}{2}y^2+g_0(x)y\right). \qquad (18)$$

Найдем теперь разность многочленов $P(y)$ и $Q(y)$, которые определяются формулами (18) и (16) соответственно. После несложных преобразований получим

$$P(y)-Q(y)=\sum_{k=1}^{n-1}h_k(x)y^k,$$

где функции $h_k(x)$ имеют следующий вид

$$h_1(x)=\frac{nf_n(x)g_0(x)-g_0'(x)g_{n-1}(x)+g_0(x)g_{n-1}'(x)}{g_{n-1}(x)},$$

$$h_2(x)=\frac{nf_n(x)g_1(x)-g_1'(x)g_{n-1}(x)+g_1(x)g_{n-1}'(x)}{2g_{n-1}(x)},$$
$$\ldots$$
$$h_k(x)=\frac{nf_n(x)g_{k-1}(x)-g_{k-1}'(x)g_{n-1}(x)+g_{k-1}(x)g_{n-1}'(x)}{kg_{n-1}(x)},$$
$$\ldots$$

$$h_{n-1}(x) = \frac{nf_n(x)g_{n-2}(x) - g'_{n-2}(x)g_{n-1}(x) + g_{n-2}(x)g'_{n-1}(x)}{(n-1)g_{n-1}(x)}.$$

Сравнивая эти формулы с формулами (11), убеждаемся, что справедливы равенства $h_k(x) = f_k(x)$ для всех $k = 1, 2, \dots, n-1$. Следовательно, разность многочленов $P(y)$ и $Q(y)$ представима в виде

$$P(y) - Q(y) = \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)y^k,$$

где функции $f_k(x)$ определяются формулами (11). Таким образом, формула (17) примет окончательно следующий вид

$$\left[\sum_{k=0}^{n-1} g_k(x)y^k\right] y' = f_0(x) + \sum_{k=1}^{n-1} f_k(x)y^k + f_n(x)y^n \equiv \sum_{k=0}^{n} f_k(x)y^k.$$

Это ничто иное как искомое уравнение (1), что и требовалось доказать. □

Список литературы

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. – М. : Наука, 1971. – 576 с.
2. Зайцев В. Ф. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.
3. Семенов Э. И. Свойства уравнения быстрой диффузии и его многомерные точные решения / Э. И. Семенов // Сиб. мат. журн. – 2003. – Т. 44, № 4. – С. 862–869.
4. Семенов Э. И. О новых точных решения неавтономного уравнения Лиувилля / Э.И. Семенов // Сиб. мат. журн. – 2008. – Т. 49, № 1. – С. 207–217.
5. Рудых Г.А., Семенов Э.И. Построение точных решений одномерного уравнения нелинейной диффузии методом линейных инвариантных подпространств / Э.И. Семенов // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика.– Т. 6, № 4. – С. 69–84.
6. Appell P. Sur les invariants de quelques equations differentielles // Journal de Math. – 1889. – Vol. 4, N 5. – P. 361–423.
7. Lazhar Bougoffa. New exact general solutions of Abel equation of the second kind / Bougoffa Lazhar // Appl. Math. and Comput. – 2010. – Vol. 216, N 2. – P. 689–691.

Семенов Эдуард Иванович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952) 453099 (e-mail: edwseiz@gmail.com)

E. Semenov

On the First Integrals of the Generalized Abel Equation of the Second Kind of Special Form

Abstract. The study of various mathematical models described by nonlinear systems of differential equations, in many cases by special transformations reduces to the study of some nonlinear ordinary differential equations. In this article, the subject of such reduction and research is Abel equation of the second kind. Under certain assumptions on the coefficients of the equation construct the general solution of the generalized Abel equation of the second kind of special form.

Keywords: Abel equation of the second kind, the first integral.

References

1. Kamke E. Spravochnik po Obyknovennym Differentsial'nym Uravneniyam [Handbook of Ordinary Differential Equations]. Moscow, Nauka, 1971. 576 p.
2. Zaitsev V.F., Polyanin A.D. Spravochnik po Obyknovennym Differentsial'nym Uravneniyam [Handbook of Ordinary Differential Equations]. Moscow, FIZMATLIT, 2001. 576 p.
3. Semenov E.I. Properties of the Fast Diffusion Equation and its Multidimensional Exact Solutions. *Sib. Math. Jour.*, 2003, vol. 44, no. 4, pp. 862-869.
4. Semenov E.I. New Exact Solutions of the Non-Autonomous Liouville Equation. *Sib. Math. Jour.*, 2008. vol. 49, no. 1, pp. 207-217.
5. Rudykh G.A, Semenov E.I. The construction of exact solutions of one-dimensional nonlinear diffusion equation by the method of linear invariant subspaces. (in Russian). *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematika»*, V.6, №4, P. 69-84.
6. Appell P. Sur les Invariants de Quelques Equations Differentielles. *Journal de Math.* 1889, vol. 5, no. 4, pp. 361-423.
7. Lazhar Bougoffa. New Exact General Solutions of Abel Equation of the Second Kind. *Appl. Math. and Comput.*, 2010, vol. 216, no. 2, pp. 689-691.

Edward Semenov, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Senior Researcher, Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS), Post Box 292, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, Russia; tel.: (3952) 453099 (e-mail: `edwseiz@gmail.com`)