Серия «Математика»
2014. Т. 7. С. 79—84

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.48

Некоторые применения языка логики второго порядка в универсальной алгебре *

А. Г. Пинус
Новосибирский государственный технический университет

Аннотация. При рассмотрении проблематики универсальной алгебры как вопросов, связанных с заданным набором функций (сигнатурных), определенных на некотором множестве (основном множестве алгебры), естественен интерес к различным функциям, определенным на этом множестве и в том или ином смысле определимым через сигнатурные. Единственным ограничением при этом выступает естественное для универсальной алгебры (изучающей алгебры с точностью до изоморфизма) требование, чтобы подобные так или иначе определимые функции коммутировали с автоморфизмами исходной алгебры. К таковым заведомо относятся функции, в том или ином смысле определимые с помощью какого-либо логического языка: языка логики первого порядка либо языков логик с бесконечно длинными формулами, языка логики второго порядка и т. д. В работе рассмотрены вопросы, связанные с функциями и элементами определимыми на счетных универсальных алгебрах конечных сигнатур в языке логики второго порядка. На основе теоремы Марека о категоричности теорий счетных универсальных алгебр конечных сигнатур в языке логики второго порядка доказано, что в предположении теоретико-множественной аксиомы конструктивности для счетных универсальных алгебр конечной сигнатуры функции на основных их множествах, коммутирующие с их автоморфизмами. суть функции точечно определимые на этих алгебрах в некотором естественном расширении языка логики второго порядка. Как следствие этого получаем некоторое описание эндоморфизмов (автоморфизмов) счетных универсальных алгебр конечных сигнатур, коммутирующих со всеми автоморфизмами этих алгебр. В качестве иного следствия получено описание элементов из Галуа-замыканий подалгебр счетных универсальных алгебр конечных сигнатур.

Ключевые слова: язык логики второго порядка, автоморфизмы универсальных алгебр.

Рассматривая проблематику универсальной алгебры как вопросы, связанные с заданным набором функций (сигнатурных), определенных на некотором множестве (основном множестве алгебры), естественен интерес к различным функциям, определенным на этом множестве и

* Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, по государственному заданию №2014/138, проект 1052

в том или ином смысле определимым через сигнатурные. К таковым естественно относятся термальные, условно термальные и целый ряд вариаций этого понятия, неявные и иже с ними и т. д. (см. подробнее, к примеру, [1; 2]). Единственным ограничением при этом выступает естественное для универсальной алгебры (изучающей алгебры с точностью до изоморфизма) требование, чтобы подобные так или иначе определимые функции коммутировали с автоморфизмами исходной алгебры. К таковым заведомо относятся функции, в том или ином смысле определимые с помощью какого-либо логического языка L. В работе [3] функция на основном множестве A универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ названа L-определимой, если существует L-формула $\Phi(x_1, \ldots, x_n, y)$ сигнатуры σ со свободными переменными $x_1, \ldots, x_n, y$ такая, что для любых $a_1, \ldots, a_n, b \in A$ $\mathfrak{A} \models \Phi(a_1, \ldots, a_n, b) \Leftrightarrow b = f(a_1, \ldots, a_n)$.

Очевидно, что подобные L-определимые функции коммутируют со всеми автоморфизмами алгебры $\mathfrak{A}$, образуют (если L, как минимум, включает в себя связку & и квантор $\exists$ по предметным переменным) функциональный клон на множестве A (обозначаемый как L-Def$\mathfrak{A}$) и, как следствие теоремы Д. Скотта, в случае, когда $\mathfrak{A}$ не более чем счетная алгебра не более чем счетной сигнатуры σ, совокупность $L_{\omega_1,\omega}$-Def$\mathfrak{A}$ это в точности совокупность всех функций на $\mathfrak{A}$, коммутирующих с автоморфизмами алгебры $\mathfrak{A}$ (см. [3]).

В настоящей работе будут рассмотрены вопросы, связанные с $\wedge L_2$-определимыми на универсальных алгебрах функциями и элементами (здесь L_2 – язык логики второго порядка, допускающей навешивание кванторов $\forall$ и $\exists$ по предикатным переменным, подробнее об языке L_2 см., к примеру, [4]). Через $\wedge L_2$ же обозначим логический язык, состоящий из конъюнкций (возможно бесконечных) формул логики второго порядка (L_2-формул).

Функцию $f(\overline{x}) = f(x_1, \ldots, x_2)$, определенную на основном множестве A универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ назовем *точечно L-определимой* (L – некоторый логический язык), если для любого $\overline{a} = \langle a_1, \ldots a_n \rangle \in A^n$ существует L-формула $\Phi_{\overline{a}}(\overline{x}, y)$ такая, что для любых $\overline{a}' \in A^n$, $b' \in A$, если для некоторого автоморфизма φ алгебры $\mathfrak{A}$ ($\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$) $\overline{a}' = \varphi(\overline{a})$, то $\mathfrak{A} \models \Phi_{\overline{a}}(\overline{a}', b')$ тогда и только тогда, когда $b' = \varphi(f(\overline{a}))$. Из этого определения, в частности следует, что для любого $\overline{a} \in A^n$ $\mathfrak{A} \models \exists! x \Phi_{\overline{a}}(\overline{a}, x)$ и, что точечно L-определимые на $\mathfrak{A}$ функции должны коммутировать со всеми автоморфизмами алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$.

Для любого $C \subset A$ через $\langle C \rangle_{\mathfrak{A}}$ обозначим подалгебру алгебры $\mathfrak{A}$, порожденную множеством C.

В работе [5] определено понятие Галуа-замыкания на решетках подалгебр Sub$\mathfrak{A}$ универсальных алгебр $\mathfrak{A}$ (основанное на Галуа-соответствии между подалгебрами неподвижных точек автоморфизмов из подгрупп группы Aut$\mathfrak{A}$ и подгруппами этой группы, оставляющими неподвижными элементы подалгебр алгебры $\mathfrak{A}$). При этом для $\mathfrak{B} \in$ Sub$\mathfrak{A}$

Галуа-замыкание $\overline{\mathfrak{B}}$ подалгебры $\mathfrak{B}$ определено как $\{a \in \mathfrak{A} \mid$ для любого $\varphi \in \mathrm{Aut}\mathfrak{A}$, если $\varphi(b) = b$ для любых $b \in \mathfrak{B}$, то и $\varphi(a) = a\}$.

Из определения Галуа-замыкания подалгебр и коммутируемости точечно L-определимых функций $f(\overline{x})$ на алгебре $\mathfrak{A}$ со всеми автоморфизмами алгебры $\mathfrak{A}$ вытекает включение $f(\overline{a}) \in \overline{\langle\{a_1, \ldots, a_n\}\rangle}$ для любого кортежа $\overline{a} = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in A^n$. Отметим, что в работе [6] определение точечной термальности функции отличается от приведенного здесь (в [6] φ лишь тождественный автоморфизм алгебры). Очевидно, что если язык L замкнут относительно навешивания квантора $\exists$ по предметным переменным и относительно конъюнкций, то совокупность точечно L-определимых на $\mathfrak{A}$ функций, обозначаемая далее как L-PDef$\mathfrak{A}$ образует функциональный клон. Так же очевидно, что для любых L и $\mathfrak{A}$

$$L\text{-Def}\mathfrak{A} \subset L\text{-PDef}\mathfrak{A}.$$

Через StabAut$\mathfrak{A}$ обозначим совокупность функций на алгебре $\mathfrak{A}$, коммутирующих со всеми автоморфизмами алгебры $\mathfrak{A}$.

В работе [3] на основе теоремы Скотта [7] для языка $L_{\omega_1\omega}$ доказано, что для не более чем счетных алгебр $\mathfrak{A}$ не более чем счетной сигнатуры имеет место равенство $L_{\omega_1\omega}$-Def$\mathfrak{A}$ = StabAut$\mathfrak{A}$. Для языка $\wedge L_2$ возможен некоторый более слабый аналог этого утверждения, вытекающий из теоремы Марека [8].

Теорема 1. (МАРЕК ($V = L$)). *Для любой не более чем счетной модели* $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ *конечной сигнатуры* σ *существует формула* $\Phi^2_{\mathfrak{A}}$ *языка* $\wedge L_2$ *такая, что для любой модели* $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma\rangle$

$$\mathfrak{B} \models \Phi^2_{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow \mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}.$$

Теорема 2. ($V = L$). *Для любой не более чем счетной алгебры* $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ *конечной сигнатуры* σ *имеет место равенство*

$$\wedge L_2\text{-PDef}\mathfrak{A} = \mathrm{StabAut}\mathfrak{A}.$$

Доказательство. Включение $\wedge L_2$-PDef$\mathfrak{A} \subseteq$ StabAut$\mathfrak{A}$ отмечено выше. Пусть теперь $f(x) \in \mathrm{StabAut}\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma\rangle$ не более чем счетная алгебра конечной сигнатуры σ. Пусть $\overline{a} = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \in A^n$. Через $\mathfrak{A}' = \langle A; \sigma, \overline{a}, f(\overline{a})\rangle$ обозначим обогащение алгебры $\mathfrak{A}$ константами $\overline{c}_{a_i} (i \leq n)$, $c_{f(\overline{a})}$ при интерпретации в $\mathfrak{A}'$ констант c_{a_i} элементами a_i, а константы $c_{f(\overline{a})}$ – элементом $f(\overline{a})$. Пусть $\Phi(\overline{x}, y)$ получается из L_2-формулы Марека $\Phi^2_{\mathfrak{A}'}$ заменой констант c_{a_i} на переменные x_i, а константы $c_f(\overline{a})$ на y. Тогда, если для некоторых $\overline{a}' \in A^n$, $\overline{b}' \in A$ имеет место $\mathfrak{A} \models \Phi(\overline{a}', b')$, то найдётся автоморфизм ψ алгебры $\mathfrak{A}$ такой, что $\psi(\overline{a}) = \overline{a}'$, $\psi(\varphi(\overline{a})) = b'$. Если при этом для некоторого $\varphi \in \mathrm{Aut}\mathfrak{A}$ $\varphi(\overline{a}) = \overline{a}'$ то, так как замечено выше $f(\overline{a}) \in \overline{\langle\overline{a}\rangle}_{\mathfrak{A}}$, имеет место равенство $\psi(f(\overline{a})) = \varphi(f(\overline{a}))$, т. е. $\varphi(f(\overline{a})) = b'$. Тем самым $f(\overline{x}) \in \wedge L_2$-PDef$\mathfrak{A}$ и теорема доказана. □

Рассматривая эндоморфизмы алгебры $\mathfrak{A}$ как частный случай одноместных функций на основном множестве алгебры $\mathfrak{A}$ и применяя к ним введенную терминологию, в силу теоремы 1 получаем

Следствие 1. *($V = L$). Эндоморфизм (автоморфизм) φ не более чем счетной алгебры $\mathfrak{A}$ конечной сигнатуры является точечно $\wedge L_2$-определимым в $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда φ коммутирует со всеми автоморфизмами алгебры $\mathfrak{A}$ (φ принадлежит центру группы* $\mathrm{Aut}\mathfrak{A}$*).*

В частности, центр группы $\mathrm{Aut}\mathfrak{A}$ состоит только из тождественного автоморфизма алгебры $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда id_A – единственный $\wedge L_2$-определимый автоморфизм алгебры $\mathfrak{A}$.

В работе [5] на основе теоремы Скотта дано описание элементов из $\overline{\mathfrak{A}}$: для любой не более чем счетной универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ не более чем счётной сигнатуры и любой ее подалгебры $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma \rangle$ элемент d из A входит в $\overline{\mathfrak{B}}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_B \models \Phi(d)$ для некоторой $L_{\omega_1\omega}$-формулы $\Phi(x)$ сигнатуры σ_B такой, что $\mathfrak{A}_B \models \exists! x\Phi(x)$. Здесь σ_B – обогащение сигнатуры σ константами c_b (для $b \in B$), а алгебра $\mathfrak{A}_B$ – σ_B-обогащение алгебры $\mathfrak{A}$ при интерпретации констант c_b элементами b (для $b \in B$).

Замена ссылки на теорему Марека вместо теоремы Скотта (с некоторой соответствующей коррекцией доказательства) приводит к следующему утверждению, так же связанному с описанием элементов из Галуа-замыканий $\overline{\mathfrak{B}}$ подалгебр $\mathfrak{B}$.

Теорема 3. *($V = L$). Для любой не более чем счетной универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ конечной сигнатуры, для любой ее конечно порожденной подалгебры $\mathfrak{B} = \langle B; \sigma \rangle = \langle C \rangle_{\mathfrak{A}}$, где C некоторое конечное подмножество множества A, элемент d из A входит в $\overline{\mathfrak{B}}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}_C \models \Phi(d)$ для некоторой $\wedge L_2$-формулы $\Phi(x)$ сигнатуры σ_C такой, что $\mathfrak{A}_C \models \exists! \Phi(x)$.*

Здесь сигнатура σ_C и алгебра $\mathfrak{A}_C$ определены так же, как и выше.

Доказательство. Пусть алгебры $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} = \langle C \rangle_{\mathfrak{A}}$ и элемент $d \in A$ удовлетворяют условиям теоремы. По теореме Марека существует $\wedge L_2$-формула $\Phi^2_{\mathfrak{A}'}$ сигнатуры $\sigma_{C \cup \{d\}}$ такая, что для любой алгебры $\mathfrak{D} = \langle D; \sigma_{C \cup \{d\}} \rangle$ $\mathfrak{D} \models \Phi^2_{\mathfrak{A}'}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{D} \cong \mathfrak{A}'$. Здесь $\mathfrak{A}'$ обогащение алгебры $\mathfrak{A}_C$ константой c_d при интерпретации этой последней элементом d. Пусть $\wedge L_2$-формула $\Phi(x)$ сигнатуры σ_c получается из формулы $\Phi^2_{\mathfrak{A}'}$ заменой константы c_d на переменную x. Тогда $\mathfrak{A}_C \models \Phi(d)$ и если для некоторого $f \in A \backslash \langle C \rangle_{\mathfrak{A}}$ имеет место $\mathfrak{A}_C \models \Phi(f)$, то найдется автоморфизм ψ алгебры $\mathfrak{A}$, оставляющий на месте элементы из C, а значит и из $\langle C \rangle_{\mathfrak{A}}$, такой, что $\psi(d) = f$. А так как $d \in \overline{\mathfrak{B}}$, то $d = f$, т.е. $\mathfrak{A}_C \models \exists! x\Phi(x)$. Теорема доказана. □

Из доказательства этой теоремы и отмеченного выше включения $f(\overline{a}) \in \overline{\langle \overline{a} \rangle}_{\mathfrak{A}}$ для любой $\wedge L_2$-PDef$\mathfrak{A}$ функции $f(\overline{x})$ вытекает

Следствие 2. *Для любой не более чем счетной универсальной алгебры $\mathfrak{A} = \langle A; \sigma \rangle$ конечной сигнатуры и любой конечно порожденной подалгебры $\mathfrak{B}$ алгебры $\mathfrak{A}$ элемент b из A входит в Галуа-замыкание $\overline{\mathfrak{B}}$ подалгебры $\mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда для некоторых $\wedge L_2$-PDef$\mathfrak{A}$ функции $f(\overline{x})$ и элементов $\overline{a} \in \mathfrak{B}$ имеет место равенство $b = f(\overline{a})$.*

Отметим, наконец, что очевидным образом в условиях теоремы 2 вся совокупность элементов из $\overline{\mathfrak{B}}$ является L_2-формульным подмножеством в алгебре $\mathfrak{A}_C$

Список литературы

1. Пинус А. Г. Условные термы и их приложения в алгебре и теории вычислений / А. Г. Пинус // Успехи мат. наук. – 2001. – Т. 56, № 4. – С. 35–72.
2. Пинус А. Г. Рациональная эквивалентность алгебр, ее «клоновые» обобщения и «клоновая» категоричность / А. Г. Пинус // Сиб. мат. журн. – 2013. – Т. 54, № 3. – С. 673–688.
3. Пинус А. Г. Определимые функции универсальных алгебр и определимые эквивалентности алгебр / А. Г. Пинус//Алгебра и логика. – 2014. – Т.53, № 1.
4. Baldwin J. Definable second-order quantifiers / J. Baldwin // Model-Theoretic Logics. – New York-Berlin-Heidelberg-Tokio : Springer-Verlag, 1985. – P. 445–478.
5. Пинус А. Г. О классическом Галуа-замыкании на универсальных алгебрах / А. Г. Пинус // Изв. вузов. Математика. – 2014, № 2. – С.47-53.
6. Пинус А. Г. Точечно термально полные клоны функций и решетки решеток всех подалгебр алгебр с фиксированным основным множеством / А. Г. Пинус // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. — 2012. – Т. 5, № 3. – С. 94–103.
7. Scott D. Logic with denumerable long formulas and finite strings of quantifiers / D. Scott // Theory of Models. – Amsterdam : North Holland P. Comp., 1965. – P. 329–341.
8. Marek W. Sur la constance d'une hypothese de Fraisse sur definesability dans un language du second order / W. Marek // C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A-B. – 1973. – Vol. 276. – P. 1147–1150, 1169–1172.

Пинус Александр Георгиевич, доктор физико-математических наук, профессор, Новосибирский государственный технический университет, 630073, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, тел.: 383-346-11-66, e-mail: ag.pinus@gmail.com

---

A. Pinus

Some Applications on the Second Order Logic Language in the Universal Algebra

Abstract. By consideration of the problematic of the universal algebra as some questions which are connected with some collection of functions (signiches functions),

which are defined on some set (the basic set of algebra) take place the natural interest too some functions which can be defined in this set by the help, in some sense, from the signiches functions. The only restriction by this is the natural for the universal algebra (which study the algebras to the nearest by isomorphism) is the requirement for this functions to be permutable with the automorphisms of starting algebra. The functions which are defined on the algebra with the help of some logical language (the language of the first order logic, or the language of the logics with the infinite formulas, or the language of the second order logic and so other) are such. In the work is considered the questions which are connected with the functions and elements which are defined on the countable algebras of finite signatures in the language of the second order logic. It is known the Marek-theorem: by the preposition of set-theoretical axsiom of constructivity the theory of countable universal algebras of finite signatures in the language of second order logic are categorical. From this theorem it is proved that the functions on the basic set of this algebras which commutes with automorphisms of this algebra can be defined on this algebra in some natural extension of the second order logic language. As some corollary of this we given some description of endomorphisms (automorphisms) of countable universal algebras of finite signatures which commutes with oll automorphisms of this algebras. Another corollary given some description of elements from Galya-closuring of subalgebras of countable universal algebras of finite signatures.

References

1. Pinus A.G. Conditional terms and its contributions to algebra and computation theory. Uspechi math. nauk, 2001, V.56, №4, P.35-72.
2. Pinus A.G. Rational equivalence of algebras, its «clons» generalizations and «clons» categoricity. Sibirian math. Journal, 2013, V.54, № 3, P.673-688.
3. Pinus A.G. Definable functions of universal algebras and definable equivalence of algebras. Algebra and Logic, 2014, V.53, №1.
4. Baldwin J. Definable second-order quantifiers. Model-Theoretic Logics. New York-Berlin-Heidelberg-Tokio : Springer-Verlag, 1985. P. 445–478.
5. Pinus A.G. On classical Galua-closure on the universal algebras. Izvestia vuzov. Mathematica, 2014, P.47-72.
6. Pinus A.G. Point-termal complete clons of functions and the lattice of lattices of all sublattices of algebras with fixed basic set. Izvestia IrGU, ser. «Mathematica», 2012, V.5, №3, P.93-103.
7. Scott D. Logic with denumerable long formulas and finite strings of quantifiers. Theory of Models. Amsterdam : North Holland P. Comp., 1965. P. 329–341.
8. Marek W. Sur la constance d'une hypothese de Fraisse sur definesability dans un language du second order. C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. A-B. 1973. Vol. 276. P. 1147–1150, 1169–1172.

Pinus Alexandr, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), professor, Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx pr., Novosibirsk, 630073, tel.: 383-346-11-66, e-mail: ag.pinus@gmail.com