Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 2. С. 91—101

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.85

О некоторых алгоритмах погружений - отсечений для задачи математического программирования

И. Я. Заботин
Казанский (Приволжский) федеральный университет

Аннотация. Предлагается общая процедура условной минимизации непрерывных функций, использующая операцию частичного погружения допустимого множества. Доказывается ее сходимость. Описываются реализации процедуры, допускающие возможность параллельных вычислений.

Ключевые слова: нелинейное программирование, алгоритм, сходимость, погружение, отсечение, параллельные вычисления.

1. Введение

Предлагается общая процедура решения задачи математического программирования, которая использует идею, заложенную в некоторых методах погружений - отсечений В. П. Булатова [1] для задачи выпуклого программирования. Указанная идея заключается в последовательной замене допустимого множества исходной задачи некоторыми аппроксимирующими его выпуклыми множествами более простой структуры, каждое из которых строится на основе предыдущего путем отсечения от него некоторого подмножества.

Предлагаемая процедура отличается от упомянутых методов тем, что применима для более общих задач, имеет более широкие возможности при построении как начального, так и последующих аппроксимирующих множеств, допускает значительный произвол в выборе итерационных точек и др. Кроме того, процедура позволяет строить алгоритмы, в которых на каждом шаге допускается распараллеливание процесса отыскания очередного приближения. Показано, что в частном случае эта процедура дает возможность оценивать близость значения целевой функции в каждой итерационной точке к оптимальному значению, и это делает ее удобной при решении вспомогательных задач построения направлений спуска в некоторых методах нелинейного программирования.

2. Постановка задачи

Решается задача
$$\min \{g(x) \mid x \in G\}, \tag{2.1}$$
где $G = G' \bigcap G''$, $G' = \bigcap\limits_{j \in J} G_j$, множества G_j, $j \in J = \{1, ..., m\}$, и G'' из n-мерного евклидова пространства R_n выпуклы и замкнуты, внутренность $int\ G_j$ множества G_j для каждого $j \in J$ непуста, а $g(x)$ – непрерывная достигающая на G своего минимального значения функция. Сразу подчеркнем, что внутренность множества G может быть пустой, причем как за счет пустоты $int\ G''$, так и за счет пустоты $int\ G'$.

Пусть $g^* = \min\{g(x) \mid x \in G\}$, $Y^* = \{x \in G : g(x) = g^*\}$, $W(x, G_j) = \{a \in R_n : \langle a, z - x \rangle \le 0\ \forall z \in G_j\}$ – конус обобщенно-опорных векторов для множества G_j в точке $x \in R_n$, $W^1(x, G_j) = \{a \in R_n : a \in W(x, G_j),$ $\|a\| = 1\}$, $E(g, \gamma) = \{x \in R_n : g(x) \le \gamma\}$, $\gamma \in R_1$, $I = \{0, 1, ...\}$.

3. Общая процедура решения задачи

Предлагаемая для решения задачи (2.1) процедура вырабатывает последовательность приближений y_i, $i \in I$, и заключается в следующем.

Процедура $\pi = \pi(\mathbf{g}(\mathbf{x}), \mathbf{G})$. Строится выпуклое замкнутое множество $M_0 \subset R_n$, содержащее хотя бы одну точку множества Y^*. Выбираются точки $y^j \in int\ G_j$ для всех $j \in J$, задается число $q \in [1, +\infty)$, находится точка $y_0 \in M_0 \bigcap G'' \bigcap E(g, g^*)$, полагается $i = 0$.

1. Формируется множество
$$J_i = \{j \in J\ :\ y_i \notin G_j\}.$$
Если
$$J_i = \emptyset, \tag{3.1}$$
то процесс заканчивается.

2. Для каждого $j \in J_i$ в интервале (y^j, y_i) выбирается точка $z_i^j \notin int\ G_j$ так, чтобы существовала точка $\overline{y}_i^j \in G_j$, удовлетворяющая неравенству
$$\|y_i - \overline{y}_i^j\| \le q \|y_i - z_i^j\|. \tag{3.2}$$
Для всех $j \in J \setminus J_i$ полагается $z_i^j = \overline{y}_i^j = y_i$.

3. Отыскивается номер $j_i \in J_i$, удовлетворяющий условию
$$\|y_i - z_i^{j_i}\| = \max_{j \in J_i} \|y_i - z_i^j\|. \tag{3.3}$$

4. Выбирается подмножество $H_i \subset J_i$ так, чтобы выполнялось включение

$$j_i \in H_i.$$

Для каждого $j \in H_i$ выбирается конечное множество $A_i^j \subset W^1(z_i^j, G_j)$ и полагается

$$M_{i+1} = M_i \bigcap_{j \in H_i} \{x \in R_n \ : \ \langle a, x - z_i^j \rangle \ \leq 0 \ \forall a \in A_i^j\}. \tag{3.4}$$

5. Отыскивается очередное приближение

$$y_{i+1} \in M_{i+1} \bigcap G'' \bigcap E(g, g^*), \tag{3.5}$$

и следует переход к п. 1 при i, увеличенном на единицу.

Покажем, что выбор точки y_0 и точек y_{i+1}, $i \in I$, из условия (3.5) возможен. Действительно, по условию множество M_0 содержит хотя бы одну точку $y^* \in Y^*$. Тогда согласно (3.4) $y^* \in M_i \ \forall i \in I$. В то же время $y^* \in G$, а значит, $y^* \in G''$, и, кроме того, $y^* \in E(g, g^*)$. Следовательно,

$$M_i \bigcap G'' \bigcap E(g, g^*) \neq \emptyset \quad \forall i \in I,$$

и утверждение доказано.

Если при некотором $i \in I$ выполняется (3.1), то $y_i \in G' \bigcap G'' \bigcap E(g, g^*)$, а значит, $y_i \in Y^*$, и процесс завершается.

Отметим, что в множество H_i кроме номера j_i можно включать любые другие номера $j \in J_i$ или не включать более ни одного. В частности, для всех $i \in I$ можно положить

$$H_i = J_i. \tag{3.6}$$

В таком случае нет необходимости в шаге 3 процедуры, где отыскивается номер j_i согласно (3.3). Близкая к π процедура с выбором H_i в виде (3.6) была предложена автором в [3] для задачи (2.1) с условием, что $G'' = R_n$. Ниже будет описана реализация процедуры, в которой

$$H_i = \{j_i\} \tag{3.7}$$

для всех $i \in I$.

Если в (2.1) $G'' = R_n$, $G_1 = \ldots = G_m = G' = G$, $int\ G \neq \emptyset$, а функция $g(x)$ выпукла, то для такой задачи процедура π, в которой $y^1 = \ldots = y^m = y$ и $y \in int\ G$, близка к методу опорных множеств, построенному в [1] для задачи выпуклого программирования.

В процедуре π можно положить, например, $M_0 = \bigcap\limits_{j \in J'} G_j$, где $J' \subset J$, в частности, $M_0 = G_l$, если $J' = \{l\}$, $l \in J$. Такой способ выбора множества M_0 удобен, например, когда $\bigcap\limits_{j\in J'} G_j$ – выпуклый многогранник, а множество G'' задано системой линейных равенств или неравенств. Так как $y_i \in M_i \subset M_0$ $\forall i \in I$, то в множествах J_i при всех $i \in I$ будут отсутствовать индексы из J', и точки $y^j \in int\ G_j,\ j \in J'$, ни на одной итерации процедуры не понадобятся. В этом случае нет необходимости в задании точек $y^j,\ j \in J'$. Кроме того, отметим, что при достижении функцией $g(x)$ в R_n своего минимального значения можно положить

$$M_0 = R_n, \quad y_0 = \arg\min\ \{g(x) \mid x \in R_n\}.$$

Если $int\ G \neq \emptyset$ и известна точка $y \in int\ G$, то в π удобно задать $y^j = y\ \forall j \in J$.

Сделаем также замечание относительно выбора в процедуре точек z_i^j, на основе которых строятся отсекающие множества. Точка z_i^j, $j \in J_i$, находится из довольно общего условия (3.2), согласно которому нет необходимости искать z_i^j как точку пересечения отрезка $[y^j, y_i]$ с границей множества G_j. Для проверки условия (3.2) не требуется находить и точку $\overline{y}_i^j$. Выполнение этого условия для z_i^j можно проверить, например, следующим образом. Если $y_i + q(z_i^j - y_i) \in G_j$, или, если $y_i + q(z_i^j - y_i) \notin G_j$, но $\|y_i - y^j\| < q\|y_i - z_i^j\|$, то неравенство (3.2) для z_i^j выполняется.

Если точки y_i, $i \in I$, выбирать из условия

$$g(y_i) = \min\ \{g(x) \mid x \in M_i \bigcap G''\}, \tag{3.8}$$

то требуемое в процедуре включение

$$y_i \in M_i \bigcap G'' \bigcap E(g, g^*) \tag{3.9}$$

выполняется при всех $i \in I$. Условие (3.9) позволяет, во-первых, решать задачу минимизации $g(x)$ на множестве $M_i \bigcap G''$ приближенно. Во-вторых, как будет показано ниже, оно дает возможность на каждой итерации процедуры распараллелить процесс отыскания очередного приближения y_{i+1}.

4. Реализации общей процедуры

В качестве одной из реализаций процедуры π, допускающих распараллеливание вычислительного процесса, предлагается следующая

Процедура $\boldsymbol{\pi_1 = \pi_1(g(x), G)}$. Согласно процедуре π выбирается множество M_0, число q и точки y^j, $j \in J$, и y_0. Полагается $i = 0$.

1. Формируется множество $J_i = \{j \in J : y_i \notin G_j\}$. Если выполняется (3.1), то процесс заканчивается.

2. Для каждого $j \in J_i$ в интервале (y^j, y_i) выбирается точка $z_i^j \notin int\ G_j$ так, чтобы существовала точка $\overline{y}_i^j \in G_j$, удовлетворяющая неравенству (3.2), а для всех $j \in J \setminus J_i$ считается, что $z_i^j = \overline{y}_i^j = y_i$.

3. Для каждого $j \in J_i$ выбирается конечное множество $A_i^j \subset W^1(z_i^j, G_j)$, полагается $Q_i^j = \{x \in R_n : \langle a, x - z_i^j \rangle \ \leq 0 \ \forall a \in A_i^j\}$,

$$M_i^j = M_i \bigcap Q_i^j,$$

и находится точка

$$u_i^j \in M_i^j \bigcap G'' \bigcap E(g, g^*). \tag{4.1}$$

4. Отыскивается номер $j_i \in J_i$ из условия (3.3) и полагается

$$M_{i+1} = M_i^{j_i}.$$

5. Определяется множество

$$J_i' = \{j \in J_i \ : \ u_i^j \in M_{i+1}\},$$

и произвольно выбирается номер $l_i \in J_i'$. Полагается

$$y_{i+1} = u_i^{l_i},$$

значение i увеличивается на единицу, и следует переход к п. 1.

Сразу отметим, что $J_i' \neq \emptyset$ для всех $i \in I$, т. к. согласно включению $u_i^{j_i} \in M_i^{j_i}$ в множестве J_i' содержится, по крайней мере, номер j_i.

Покажем теперь, что процедура π_1 является реализацией процедуры π с условием (3.7). Действительно, пусть в π для всех $i \in I$ множество H_i выбирается в виде (3.7). Так как в процедуре π_1

$$M_{i+1} = M_i \bigcap \{x \in R_n : \langle a, x - z_i^{j_i} \rangle \ \leq 0 \ \forall a \in A_i^{j_i}\},$$

то для M_{i+1} выполняется равенство (3.4). Далее, $u_i^{l_i} \in M_{i+1}$, и, кроме того, согласно (4.1) справедливо включение $u_i^{l_i} \in G'' \bigcap E(g, g^*)$. Следовательно, для точки $y_{i+1} = u_i^{l_i}$ выполняется условие (3.5), и утверждение доказано.

Подчеркнем, что в п. 5 процедуры π_1 не конкретизирован способ выбора номера $l_i \in J_i'$. Выбирать этот номер, а значит, и точку y_{i+1} допустимо разными способами. Например, можно положить

$$l_i = j_i,$$

тем самым l_i совпадет с номером "самого глубокого"отсечения. Можно выбрать l_i удовлетворяющим условию

$$g(u_i^{l_i}) \geq g(u_i^{j_i})$$

или условию

$$\|u_i^{l_i} - y_i\| = \max_{j \in J_i'} \|u_i^j - y_i\|. \qquad (4.2)$$

Заметим, что задачи отыскания точек z_i^j на шаге 2, а затем и точек u_i^j приближенного минимума функции $g(x)$ на шаге 3 процедуры π_1 можно решать для всех $j \in J_i$ одновременно. Таким образом, процедура π_1 действительно допускает возможность распараллеливания вычислительного процесса.

Приведем еще одну реализацию процедуры π, также позволяющую за счет условия (3.9) распараллеливать процесс решения задачи на этапе отыскания точки y_{i+1}.

Процедура $\boldsymbol{\pi_2 = \pi_2(g(x), G)}$. Согласно процедуре π выбирается множество M_0, число q и точки y^j, $j \in J$, и y_0. Полагается $i = 0$.

Пункты 1 – 4 данной процедуры совпадают, соответственно, с пунктами 1 – 4 исходной процедуры π.

5. Находится точка

$$u_i^0 \in M_{i+1} \bigcap G'' \bigcap E(g, g^*).$$

6. Для каждого $j \in J_i \setminus H_i$ выбирается конечное множество $A_i^j \subset W^1(z_i^j, G_j)$, полагается $Q_i^j = \{x \in R_n : \langle a, x - z_i^j \rangle \le 0 \ \forall a \in A_i^j\}$ и находится точка

$$u_i^j \in M_{i+1} \bigcap Q_i^j \bigcap G'' \bigcap E(g, g^*).$$

7. Выбирается номер $l_i \in (J_i \setminus H_i) \bigcup \{0\}$, полагается $y_{i+1} = u_i^{l_i}$, значение i увеличивается на единицу, и следует переход к п. 1.

Нетрудно видеть, что приближение y_{i+1} находится здесь согласно требованию (3.5), а значит, процедура π_2 действительно является реализацией процедуры π.

Отметим, что если в π_2 множество H_i выбирается в виде (3.6), то $J_i \setminus H_i = \emptyset$ и $y_{i+1} = u_i^0$. Если же $J_i \setminus H_i \ne \emptyset$, то номер l_i в π_2 можно выбирать разными способами, например, из условия (4.2), где $J_i' = (J_i \setminus H_i) \bigcup \{0\}$.

Наряду с алгоритмами π_1, π_2 можно привести примеры и других реализаций процедуры π, позволяющих за счет условия (3.9) распараллеливать процесс решения задачи.

5. Исследование сходимости процедур

Исследуем теперь сходимость процедуры π. Тем самым будет исследована сходимость и ее алгоритмов π_1, π_2.

Пусть $U \subset R_n$. Обозначим через $dim\ U$ размерность множества U, а через $aff\ U$ и $ri\ U$, соответственно – его аффинную оболочку и относительную внутренность.

Лемма 1. *Пусть множество* $U \subset R_n$ *выпукло,* $dim\ U = n'$, $1 \le n' \le n$, L *– несущее подпространство множества* U*. Пусть* $u \in ri\ U$*, множество* $Q \subset aff\ U$ *ограничено,* $Q \not\subset ri\ U$*. Тогда найдется такое число* $\delta > 0$*, что для всех* $z \in Q \setminus ri\ U$ *и всех* $a \in L \bigcap W^1(z, U)$ *выполняется неравенство* $\langle a, u - z\rangle \le -\delta$.

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно. Выберем такую числовую последовательность $\{\delta_l\}, l \in I$, что $\delta_l > 0\ \forall l \in I$, и $\delta_l \to 0,\ l \to \infty$. Тогда по предположению для каждого числа δ_l найдутся такие $z_l \in Q \setminus ri\ U$ и $a_l \in L \bigcap W^1(z_l, U)$, что

$$\langle a_l, u - z_l\rangle > -\delta_l.$$

Выделим из ограниченных последовательностей $\{z_l\}$ и $\{a_l\}$ сходящиеся подпоследовательности $\{z_{l_k}\}$ и $\{a_{l_k}\}$, $k \in I$. Пусть, соответственно, $\overline{z}$ и $\overline{a}$ – их предельные точки. Так как $\langle a_{l_k}, x - z_{l_k}\rangle \le 0\ \forall x \in U$, то, переходя в этом неравенстве к пределу по $k \to \infty$, получим

$$\langle \overline{a}, x - \overline{z}\rangle \le 0\ \forall x \in U. \tag{5.1}$$

Перейдем теперь в неравенствах $0 \ge \langle a_{l_k}, u - z_{l_k}\rangle > -\delta_{l_k}$ к пределу по $k \to \infty$. Тогда $\langle \overline{a}, u - \overline{z}\rangle = 0$, причем, $\|\overline{a}\| \ne 0$. Заметим, что в несущем подпространстве L найдется хотя бы одна точка x, для которой $\langle \overline{a}, x\rangle \ne 0$, поскольку в противном случае вектор $\overline{a}$ принадлежал бы ортогональному дополнению подпространства L , что невозможно в силу выбора векторов $a_l \in L\ \forall l \in I$. Таким образом, с учетом равенства $aff\ U = u + L$ и включения $u \in ri\ U$ можно выбрать вектор $s \in L$ так, что $\langle \overline{a}, s\rangle \ne 0$ и при этом $u + s \in U$ и $u - s \in U$. Тогда согласно (5.1) $\langle \overline{a}, u+s\rangle \le \langle \overline{a}, \overline{z}\rangle$ и $\langle \overline{a}, u-s\rangle \le \langle \overline{a}, \overline{z}\rangle$. Отсюда с учетом, что $\langle \overline{a}, u\rangle = \langle \overline{a}, \overline{z}\rangle$, следует равенство $\langle \overline{a}, s\rangle = 0$, противоречащее выбору вектора s. Лемма доказана. □

Лемма 2. *Пусть последовательность* $\{y_i\}$, $i \in I$*, построена процедурой* π*, и* $\{y_i\}$, $i \in I' \subset I$*, – ее сходящаяся подпоследовательность. Пусть номер* $l \in J$ *таков, что множество*

$$I_l = \left\{ i \in I'\ :\ l \in H_i \right\}$$

состоит из бесконечного числа элементов. Тогда справедливо равенство

$$\lim_{i \in I_l} \|z_i^l - y_i\| = 0. \tag{5.2}$$

Доказательство. Отметим, что для всех $i \in I$ и $j \in J$

$$z_i^j = y_i + \gamma_i^j (y^j - y_i), \tag{5.3}$$

где $\gamma_i^j \in [0, 1)$, причем $\gamma_i^l > 0\ \forall i \in I_l$ согласно выбору множеств H_i в процедуре.

Для произвольного $i \in I_l$ зафиксируем номер $p_i \in I_l$ такой, что $p_i > i$. Поскольку $M_{p_i} \subset M_i$, $y_{p_i} \in M_{p_i}$, а любой элемент множества A_i^l является обобщенно-опорным для множества M_{p_i} в точке z_i^l, то $\langle a, y_{p_i} - z_i^l \rangle \le 0 \ \forall a \in A_i^l$. Отсюда с учетом равенства (5.3) при $j = l$ для всех $a \in A_i^l$ имеем

$$\langle a, y_i - y_{p_i} \rangle \ge \gamma_i^l \langle a, y_i - y^l \rangle.$$

По лемме 1 найдется такое число $\delta_l > 0$, что $\langle a, y_i - y^l \rangle \ge \delta_l \ \forall i \in I_l$, $a \in A_i^l$. Следовательно, $\langle a, y_i - y_{p_i} \rangle \ge \gamma_i^l \delta_l \ \forall a \in A_i^l$, а поскольку $\|a\| = 1 \ \forall a \in A_i^l$, то

$$\|y_i - y_{p_i}\| \ge \gamma_i^l \delta_l \quad \forall i, p_i \in I_l, \quad p_i > i. \tag{5.4}$$

Так как по условию последовательность $\{y_i\}$, $i \in I_l$, является сходящейся, то согласно (5.4) $\gamma_i^l \to 0$, $i \to \infty$, $i \in I_l$. Поэтому из (5.3) при $j = l$ с учетом ограниченности величин $\|y^l - y_i\|$, $i \in I_l$, следует (5.2). Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть последовательность $\{y_i\}$, $i \in I$, построенная процедурой π, ограничена. Тогда любая предельная точка этой последовательности принадлежит множеству G.*

Доказательство. Пусть $\{y_i\}$, $i \in I' \subset I$, – любая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{y_i\}$, $i \in I$, и $\overline{y}$ – ее предельная точка. Покажем, что

$$\overline{y} \in G, \tag{5.5}$$

тогда утверждение леммы будет доказано.

Пусть индекс $l \in J$ такой, что номер j_i, вычисляющийся на шаге 3 процедуры π, совпадает с l для бесконечного числа номеров $i \in I'$. Положим

$$I_l = \{i \in I' : j_i = l\}.$$

Отметим, что последовательности $\{y_i\}$, $i \in I_l$, при каждом $j \in J$ соответствуют последовательности $\{z_i^j\}$, $\{\overline{y}_i^j\}$, $i \in I_l$, причем, по предыдущей лемме для $\{z_i^l\}$, $i \in I_l$, справедливо (5.2). В силу условия (3.3) выбора номера $j_i = l$ при каждом $i \in I_l$ выполняется неравенство

$$\|z_i^l - y_i\| \ge \|z_i^j - y_i\| \ \ \forall j \in J.$$

Отсюда с учетом (5.2)

$$\lim_{i \in I_l} \|z_i^j - y_i\| = 0 \ \ \forall j \in J. \tag{5.6}$$

Согласно п. 2 процедуры π для каждого $i \in I_l$ и $j \in J$ точка $\overline{y}_i^j$ либо совпадает с y_i, либо удовлетворяет неравенству (3.2). Так как последовательность $\{y_i\}$, $i \in I_l$, ограничена, то отсюда с учетом (5.3) следует ограниченность последовательностей $\{\overline{y}_i^j\},\ i \in I_l$, для всех $j \in J$. Выделим теперь для каждого $j \in J$ из последовательности $\{\overline{y}_i^j\},\ i \in I_l$, сходящуюся подпоследовательность $\{\overline{y}_i^j\},\ i \in I_l^j \subset I_l$, и пусть u_j – ее предельная точка. Заметим, что

$$u_j \in G_j \ \ \forall j \in J$$

в силу замкнутости множеств G_j. Положим для каждого $j \in J$

$$P_1^j = \{i \in I_l^j : j \in J_i\},\ P_2^j = I_l^j \setminus P_1^j.$$

Хотя бы одно из множеств P_1^j или P_2^j для каждого $j \in J$ состоит из бесконечного числа номеров. Перейдем теперь при каждом фиксированном $j \in J$ к пределу в неравенствах (3.2) по $i \to \infty,\ i \in P_1^j$, с учетом (5.6), если множество P_1^j бесконечно, или в равенствах $\overline{y}_i^j = y_i$ по $i \to \infty,\ i \in P_2^j$, если P_2^j бесконечно. Тогда получим равенства $\overline{y} = u_j\ \forall j \in J$, из которых следует включение (5.5). Лемма доказана. □

Теорема 1. *Пусть последовательность* $\{y_i\},\ i \in I$, *построена процедурой* π *и является ограниченной. Тогда любая ее предельная точка принадлежит множеству* Y^*, *а если при этом для всех* $i \in I$ *выполняется (3.8), то вся последовательность* $\{y_i\},\ i \in I$, *сходится к множеству* Y^*.

Доказательство. Пусть $\{y_i\},\ i \in I_1 \subset I$, – любая сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{y_i\},\ i \in I$, и $\overline{y}$ – ее предельная точка. По лемме 3 справедливо включение (5.5), а значит, $g(\overline{y}) \geq g^*$. С другой стороны, по построению $g(y_i) \leq g^*$ для всех $i \in I$, и потому $\lim\limits_{i \in I_1} g(y_i) = g(\overline{y}) \leq g^*$. Таким образом, $g(\overline{y}) = g^*$, и первое утверждение теоремы доказано.

Пусть теперь для всех $i \in I$ точки y_i удовлетворяют условию (3.8). Поскольку $M_{i+1} \subset M_i,\ i \in I$, то $g(y_{i+1}) \geq g(y_i),\ i \in I$. Поэтому с учетом ограниченности $\{y_i\},\ i \in I$, последовательность $\{g(y_i)\},\ i \in I$, сходится. Тогда в силу уже доказанного первого утверждения последовательность $\{g(y_i)\},\ i \in I$, является минимизирующей, и по теореме ([2], с. 74) второе утверждение теоремы тоже доказано. □

6. Применение процедур

Покажем сначала, что процедуру π можно использовать в частном случае для минимизации функции $g(x)$ на множестве G с заданной точностью.

Пусть в (2.1) множество J состоит только из одного индекса, например, j, и при построении последовательности приближений $y_i,\ i \in I$, на всех итерациях отыскиваются точки $\overline{y}_i^j \in G_j$. Поскольку $g(y_i) \leq g^* \leq g(\overline{y}_i^j)$, $i \in I$, то из леммы 2 и неравенства (3.2) легко следует существование номера $i = i_0$, для которого выполнится соотношение

$$g(\overline{y}_{i_o}^j) - g(y_{i_o}) \leq \varepsilon, \tag{6.1}$$

а значит, и неравенство $g(\overline{y}_{i_o}^j) \leq g^* + \varepsilon$ при некотором заданном $\varepsilon > 0$. Отметим, что при этом неравенство (6.1) может служить критерием остановки работы алгоритма.

Сделанное замечание полезно при использовании процедуры в практических расчетах. В частности, оно позволяет использовать процедуру $\pi(g(x), G)$, а значит, и ее реализации π_1, π_2 для приближенного решения вспомогательных задач вида (2.1) построения направлений итерационного перехода в некоторых методах условной минимизации с линейными и выпуклыми квадратичными вспомогательными функциями $g(x)$. Подтвердим сказанное на следующем примере.

Пусть решается задача

$$\min\ \{f(x) \mid x \in D\}, \tag{6.2}$$

где $f(x)$ – выпуклая непрерывно дифференцируемая в R_n функция, $D = D' \bigcap D''$, множества $D', D'' \subset R_n$ выпуклы и замкнуты, причем множество D' задано нелинейными неравенствами, является ограниченным и $int\ D' \neq \emptyset$, а множество D'' задано линейными неравенствами или равенствами.

Пусть для решения задачи (6.2) применяется метод условного градиента, и на k - ом шаге метода направление спуска $s_k = \overline{x}_k - x_k$ в точке $x_k \in D$ находится из условия ([2], сс. 291, 292)

$$\langle f'(x_k), \overline{x}_k \rangle = \min_{x \in D} \langle f'(x_k), x \rangle + \varepsilon_k,$$

где $f'(x_k)$ – градиент функции $f(x)$ в точке x_k, а $\varepsilon_k > 0$.

Для отыскания точки $\overline{x}_k \in D$, как для решения задачи (2.1) с фиксированной точностью $\varepsilon = \varepsilon_k$, можно применить процедуру $\pi(\langle f'(x_k), x \rangle, D)$ или любую из ее реализаций $\pi_1(\langle f'(x_k), x \rangle, D)$, $\pi_2(\langle f'(x_k), x \rangle, D)$. При этом следует считать, что $G'' = D''$, множество J состоит из одного индекса j, $G' = G_j = D'$, $g(x) = \langle f'(x_k), x \rangle$, $y^j = y \in int\ D'$. Множество M_0 удобно выбрать выпуклым многогранником, содержащем D', а точки y_i искать путем решения задач линейного программирования в виде (3.8), где $G'' = D''$. Как уже показано выше, на некотором шаге $i = i_0$ процедурой будет получена точка $\overline{y}_{i_o}^j \in D$, удовлетворяющая неравенству (6.1), где $g(x) = \langle f'(x_k), x \rangle$, $\varepsilon = \varepsilon_k$. Тогда ее можно принять за искомую точку $\overline{x}_k$.

Аналогичные замечания по применению предложенных процедур можно сделать и относительно других методов математического программирования, в которых при отыскании направлений перехода s_k

приближенно решаются задачи условной минимизации некоторых вспомогательных функций (см, напр., [2], сс. 277 – 279, или [4]).

Список литературы

1. Булатов В. П. Методы погружения в задачах оптимизации / В. П. Булатов. – Новосибирск : Наука, 1977. – 158 с.
2. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач / Ф. П. Васильев. – М. : Наука, 1988. – 552 с.
3. Заботин И. Я. Одна общая схема решения задачи математического программирования и ее использование в алгоритмах минимизации псевдовыпуклых функций / И. Я. Заботин // Сеточные методы для краевых задач и приложения : материалы Шестого всерос. семинара. – Казань : Казан. гос. ун-т, 2005. – С. 83–86.
4. Заботин И. Я. Релаксационные алгоритмы условной минимизации негладких строго псевдовыпуклых функций / И. Я. Заботин // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 12. – С. 62–70.

I. Ya. Zabotin

On the several algorithms of immersion - severances for the problem of mathematical programming

Abstract. General procedure of conditional minimization of continuous functions using operation of partial immersion of feasible set is proposed. Its convergence is proved. Realizations of procedure, assuming the probability of parallel calculations are described.

Keywords: nonlinear programming, algorithm, convergence, immersion, severance, parallel calculations

Заботин Игорь Ярославич, доктор физико-математических наук, доцент, кафедра экономической кибернетики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, 420008, Казань, ул. Кремлевская, 18, тел.: (843) 2315453 (iyazabotin@mail.ru)

Igor Zabotin, Kazan (Volga region) federal university, 18, Kremlyovskaya St., Kazan, 420008, associate professor, phone: (843) 2315453 (iyazabotin@mail.ru)