Серия «Математика»
2014. Т. 9. С. 91—102

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
*Иркутского государственного университета*

УДК 517.55+517.96

# Об иерархии производящих функций решений многомерных разностных уравнений

Т. И. Некрасова
*Сибирский федеральный университет*

**Аннотация.** В данной работе исследуются производящие функции решений разностного уравнения в рациональных конусах целочисленной решетки. Для рядов Лорана с носителями в таких конусах определено понятие D-финитности и приведено достаточное условие, при котором из рациональности (алгебраичности, D-финитности) производящей функции начальных данных задачи Коши следует рациональность (алгебраичность, D-финитность) производящей функции решения.

**Ключевые слова:** многомерные разностные уравнения, задача Коши, производящая функция, D-финитные ряды Лорана.

## 1. Введение

Одномерная теория разностных уравнений в сочетании с методом производящих функций являются хорошо развитым мощным средством исследования задач перечислительного комбинаторного анализа. В частности, известно, что любое разностное уравнение с постоянными коэффициентами имеет решение и что производящая функция всякого решения является рациональной. В многомерном случае неверными являются оба эти утверждения. В первом случае трудности связаны с тем, что пространство решений многомерного разностного уравнения бесконечномерно, и вопрос о дополнительных условиях («начальных» данных), позволяющих выделить в этом пространстве единственные решения, является нетривиальным. Другой отличительной чертой является характер зависимости свойств производящей функции решения разностного уравнения от свойств производящей функции начальных данных. Если для $n = 1$ производящая функция начальных данных всегда многочлен, а производящая функция решения всегда рациональна, то для $n > 1$ ситуация значительно сложнее.

В работе [7] для разностных уравнений в положительном октанте $\mathbb{Z}_+^n$ целочисленной решетки исследован вопрос о «правильной» (т. е. обеспечивающей существование и единственность решения) постановке задачи Коши и, кроме того, даны условия на уравнение, обеспечивающие рациональность (алгебраичность) производящих функций решения. Также там приведены примеры, показывающие, что из рациональности производящей функции начальных данных не всегда следует рациональность производящей функции решения (она может быть даже не D-финитной).

Наиболее полезные в перечислительном комбинаторном анализе классы производящих функций (степенных рядов) можно выстроить в иерархию, предложенную Стенли [6]:

$$\{\text{рациональные}\}\subset\{\text{алгебраические}\}\subset\{\text{D-финитные}\}. \quad (*)$$

Естественным образом возникает вопрос о том, останутся ли производящие функции (ряды) решения разностного уравнения в тех же классах из иерархии (*), что и производящие функции начальных данных. Как отмечено выше, в общем случае ответ на этот вопрос отрицательный. Однако, если в упомянутых выше примерах из [7] разностные уравнения рассматривать не в $\mathbb{Z}_+^n$, а в подходящем образом выбранных точечных конусах в $\mathbb{Z}^n$, то ответ станет положительным. В качестве примера в конце §3 приведена баллотировочная задача.

В данной статье будут определены понятия рациональности, алгебраичности и D-финитности рядов Лорана с носителями в точечных конусах целочисленной решетки и показано, что иерархия Стенли (*) для производящих функций начальных данных будет порождать соответствующую иерархию для производящих функций решений (теорема 1).

Нам потребуются некоторые понятия и обозначения теории рациональных многогранников и конусов (см., например, [8], [1])

Будем обозначать $\mathbb{Z}$ множество целых чисел, $\mathbb{Z}_+$ — множество неотрицательных целых чисел, $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}$ — n-мерная целочисленная решетка.

Пусть дан конечный набор векторов $a^1, \ldots, a^s$ с целыми координатами.

**Определение 1.** *Рациональным конусом будем называть множество $S$ точек, представимых линейной комбинацией $s$ векторов $a^1, \ldots, a^s \in \mathbb{Z}^n$:*

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \mu_1 a^1 + \ldots + \mu_s a^s,\ \mu_i \in \mathbb{R}_+, i = 1, \ldots, s\},$$

*где $\mathbb{R}_+$ — вещественные неотрицательные числа.*

Ограничимся случаем *симплициальных конусов* $S$, то есть таких, в которых каждый элемент выражается через образующие $a^1, \ldots, a^s$

*единственным* образом. В частности, это означает, что векторы $a^1, \ldots, a^s$ линейно независимы и их число $s \leq n$.

**Определение 2.** *Точечной решеткой назовем множество* $\Lambda = \{x \in \mathbb{Z}^n : x = \lambda_1 a^1 + \ldots + \lambda_s a^s,\ \lambda_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, s\}$,

**Определение 3.** *Точечным конусом $K$ будем называть пересечение рационального конуса $S$ с точечной решеткой $\Lambda$*

$$K = S \cap \Lambda.$$

Обозначим $\Delta = \{\alpha\}$ — некоторое фиксированое конечное множество точек $n$-мерной точечной решетки, $\Delta \subset K$ и рассмотрим разностное уравнение вида

$$\sum_{\alpha \in \Delta} c_\alpha f(x + \alpha) = g(x),\ x \in K, \tag{1.1}$$

где $c_\alpha$ — коэффициенты (постоянные) уравнения.

**Определение 4.** *Характеристическим многочленом уравнения 1.1 называется многочлен Лорана* $P(z) = \sum\limits_{\alpha \in \Delta} c_\alpha z^\alpha$.

**Определение 5.** *Многогранником Ньютона $N_P$ многочлена $P$ называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ элементов множества $\Delta$.*

Определим отношение частичного порядка $\underset{K}{\geqslant}$ между любыми двумя точками $m, \alpha \in \mathbb{Z}^n$. А именно, будем писать $m \underset{K}{\geqslant} \alpha$, если $m + K \subset \alpha + K$.

Кроме того, будем писать $m \underset{K}{\ngeqslant} \alpha$, если $m \in K \setminus \{K + \alpha\}$, т. е. отношение $m \underset{K}{\geqslant} \alpha$ не выполняется.

Далее рассматриваются уравнения вида 1.1, многогранник Ньютона $N_P$ характеристического многочлена которого удовлетворяет условию

$$\exists m \in \Delta : m \underset{K}{\geqslant} \alpha, \forall \alpha \in N_P \cap K. \tag{1.2}$$

Отметим, что если такая точка $m$ существует, то она единственная. *Зафиксируем эту точку* $m \in N_P \cap K$ и обозначим $K_m = \{x \in K : x \underset{K}{\ngeqslant} m\}$.

**Задача 1.** Найти решение $f(x)$ уравнения 1.1, которое на множестве $K_m$ совпадает с заданной функцией $\varphi(x)$:

$$f(x) = \varphi(x), x \in K_m. \tag{1.3}$$

Задачу 1.1, 1.3 назовем задачей Коши для разностного уравнения 1.1.

В данной работе исследуется вопрос о разрешимости задачи Коши, т. е. о существовании и единственности решения для любых начальных данных $\varphi(x)$ и правых частей $g(x)$. В случае разрешимости изучается характер зависимости свойств производящей функции решения от свойств производящей функции начальных данных

**Определение 6.** *Производящей функцией (производящим рядом) комплекснозначной функции целочисленных аргументов $f(x) : K \to \mathbb{C}$ назовем ряд Лорана вида*

$$F(z) = \sum_{x \in K} \frac{f(x)}{z^x}. \tag{1.4}$$

Так как $S$ симплициальный конус, то он заостренный, т. е. не содержит прямых. Поэтому ряды Лорана $L = \{F(z)\}$ вида 1.4 с носителями в точечном конусе $K = S \cap \Lambda$ образуют кольцо.

Сформулируем основную теорему.

**Теорема 1.** *Пусть для вершины $m$ многогранника Ньютона $N_P$ характеристического многочлена $P$ выполнено условие 1.2. Тогда задача 1.1, 1.3 разрешима, а производящая функция решения однородной задачи лежит в том же классе из иерархии Стенли (*), что и производящая функция начальных данных.*

Понятие рациональности (алгебраичности) для рядов Лорана в формулировке теоремы 1 означает, что ряд сходится в некоторой области, а его сумма является рациональной (алгебраической) функцией. Понятие D-финитности требует более детальных пояснений.

## 2. D-финитность производящих функций решений разностных уравнений

Для формальных степенных рядов одной переменной понятие D-финитности систематически изучалось в [6], [11]. Для кратных степенных рядов это определение обсуждалось в [10]. Приведем его формулировку.

**Определение 7.** *Пусть $F(\xi) = \sum\limits_{\lambda \in \mathbb{Z}_+^s} a_\lambda \xi^\lambda$ — формальный степенной ряд переменных $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_s$. Он называется D-финитным, если удовлетворяет системе дифференциальных уравнений вида*

$$P_k^i(\xi)\frac{\partial^k F}{\partial \xi_i^k} + ... + P_1^i(\xi)\frac{\partial F}{\partial \xi_i} + P_0^i(\xi)F = 0, \quad i = 1, ..., s, \tag{2.1}$$

*где $P_j^i(\xi)$ — многочлены.*

**Определение 8.** *(см. [3]) Дифференцированием $D$ кольца $L$ называется отображение $D : L \to L$ кольца $L$ в себя, линейное и удовлетворяющее обычным правилам для производных, т. е. $D(F+G) = DF + DG$ и $D(FG) = FDG + GDF$, $F, G \in L$.*

Отметим, что в кольце $L = \{F(z)\}$ рядов Лорана вида 1.4 *взятие обычной частной производной* $\frac{\partial}{\partial z_i}$ *не является дифференцированием,* так как, $\frac{\partial z^{-x}}{\partial z_i} = -x_i z^{-x-e^i}$, где $e^i$ — единичный вектор, а точка $x + e^i$, вообще говоря, может не лежать в $K$. Для определения D-финитности в кольце $L$ вместо частных производных введем операторы, которые являются дифференцированиями кольца. Для этого нам потребуются следующие обозначения.

Любой элемент точечного конуса $K$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов $x = \lambda_1 a^1 + ... + \lambda_s a^s$, где $a^j = (a_1^j, ..., a_n^j)$, $j = 1, ...s$. Запишем это в матричной форме $x = A\lambda$, где $\lambda$ — вектор-столбец, $A$ — матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^s \\ .. & .. & .. \\ a_n^1 & \dots & a_n^s \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\mathcal{A}$ отображение из $\mathbb{Z}_\lambda^s$ в точечный конус $K$, определяемое матрицей $A$:

$$\mathcal{A} : \lambda \to A\lambda.$$

Отметим, что оно взаимно однозначно (т. к. $K \subset S$, а $S$ — симплициальный конус). Далее, пусть $z^A = (z_1^{a_1^1} ... z_n^{a_n^1}, ..., z_1^{a_1^s} ... z_n^{a_n^s})$ — мономиальное отображение $z^A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^s$.

На мономах $f(x)z^{-x}, x \in K$ определим оператор $D_i$ следующим образом

$$D_i f(x) z^{-x} = -\lambda_i f(x) z^{-x-a^i},$$

где $\lambda_i$ — $i$-я координата точки $\lambda = \mathcal{A}^{-1}(x)$. Действие оператора на ряды из кольца $L$ определяется по линейности. Нетрудно проверить, что операторы $D_i$, $i = 1, ..., s$, удовлетворяют определению 8 и для них справедлива формула

$$D_i^k f(x) z^{-x} = (-1)^k \lambda_i (\lambda_i + 1) ... (\lambda_i + k - 1) f(x) z^{-x-ka^i}, \tag{2.2}$$

где $D_i^k = \underbrace{D_i \circ ... \circ D_i}_{k \text{ раз}}$.

**Определение 9.** *Формальный ряд $F(z) = \sum\limits_{x \in K} f(x) z^{-x}$ с носителем в точечном конусе $K$ назовем D-финитным, если он удовлетворяет* *системе уравнений вида*

$$Q_k^i(z)D_i^kF(z)+...+Q_1^i(z)D_iF(z)+Q_0^i(z)F(z)=0,\ \ i=1,2,...,s, \quad (2.3)$$

*где* $Q_j^i(z)$, *— многочлены вида* $\sum\limits_{x\in V} q_x z^x$, *а множество* $V\subset K$ *и состоит из конечного числа элементов.*

Отображение $\mathcal{A}$ индуцирует инъективное отображение $\mathcal{A}^*$ кольца рядов Лорана с носителями в точечном конусе $K$ в кольцо степенных рядов с носителями в $\mathbb{Z}_+^s$:

$$\mathcal{A}^*:\sum_{x\in K} f(x)z^{-x}\to\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}_+^s} f(A\lambda)\xi^{\lambda},$$

где $\xi=z^A$.

Следующее предложение дает связь между определениями 9 и 7.

**Предложение 1.** *Ряд Лорана* $F(z)\in L$ *является D-финитным в смысле определения 9 тогда и только тогда, когда степенной ряд* $\mathcal{A}^*(F)$ *является D-финитным в смысле определения 7.*

*Доказательство.* Докажем необходимость. Подставляя ряд 1.4 в систему уравнений 2.3 и применяя формулу 2.2, получим

$$Q_k^i(z)\sum_{x\in K}(-1)^k\prod_{j=0}^{k-1}(\lambda_i+j)f(x)z^{-x-ka^i}+...+Q_0^i(z)\sum_{x\in K}f(x)z^{-x}=0.$$

Так как многочлены $Q_j^i(z)$ состоят только из мономов вида $q_xz^x$, $x\in K$, то после замены $z^A=\xi$, $A\lambda=x$ получим

$$\widetilde{Q}_k^i(\xi)\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}_+^s}(-1)^k\prod_{j=0}^{k-1}(\lambda_i+j)f(A\lambda)\xi^{-\lambda-ke^i}+...+\widetilde{Q}_0^i(\xi)\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}_+^s}f(A\lambda)\xi^{-\lambda}=$$

$$=\widetilde{Q}_k^i(\xi)\frac{\partial^k}{\partial\xi_i^k}\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}_+^s}f(A\lambda)\xi^{-\lambda}+...+\widetilde{Q}_0^i(\xi)\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}_+^s}f(A\lambda)\xi^{-\lambda}=0, \quad (2.4)$$

где $e^i$ — единичные векторы в $\mathbb{Z}_+^s$, а $\widetilde{Q}_k^i(\xi)$ — некоторые многочлены переменных $\xi_i, i=1,...,s$.

В системе уравнений 2.4 сделаем замену переменных $\xi_j^{-1}=\eta_j, j=1,2,...,s$. Легко проверить, что

$$\frac{\partial^k}{\partial\xi_j^k}\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}_+^s}f(A\lambda)\xi^{-\lambda}=(-1)^k\sum_{i=1}^{k}\nu_i\eta_j^{i+k}\frac{\partial^i}{\partial\eta_j^i}\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}_+^s}f(A\lambda)\eta^{\lambda},$$

где $\nu_i$ — константы. Тогда, после стандартных преобразований получим систему уравнений вида

$$P_k^i(\eta)\frac{\partial^k \mathcal{A}^*(F)}{\partial \eta_i^k} + ... + P_1^i(\eta)\frac{\partial \mathcal{A}^*(F)}{\partial \eta_i} + P_0^i(\eta)\mathcal{A}^*(F) = 0, i = 1, 2, ..., s,$$

где $P_k^i(\eta)$ — многочлены, т. е. ряд $\mathcal{A}^*(F)$ является D-финитным.

Достаточность. Так как ряд $\mathcal{A}^*(F)$ является D-финитным в смысле определения 7, то он удовлетворяет системе дифференциальных уравнений вида 2.1. Проделав выкладки из доказательства необходимости в обратном порядке, получим, что ряд $F(z)$ удовлетворяет системе уравнений 2.3, т. е. является D-финитным. $\square$

## 3. Доказательство основного результата

В этом параграфе дано доказательство теоремы 1 и приведен пример, иллюстрирующий эту теорему и, кроме того, показывающий, что в некоторых задачах комбинаторного анализа целесообразно рассматривать разностное уравнение не в положительном октанте целочисленной решетки $\mathbb{Z}_+^2$, а в подходящим образом выбранном точечном конусе.

Для $\alpha \in N_P \cap K$ обозначим $K_\alpha = \{x \in K : x \underset{K}{\not\geq} \alpha\}$ и рассмотрим ряды вида $\Phi_\alpha(z) = \sum\limits_{x \in K_\alpha} \frac{\varphi(x)}{z^x}$, построенные по начальным данным $\varphi(x)$ задачи Коши 1.1, 1.3 .

Для производящей функции $F(z)$ решения задачи Коши справедлива формула (см. [5])

$$F(z) = \sum_{\alpha \in N_P \cap K} c_\alpha z^\alpha \frac{1}{P(z)} \Phi_\alpha(z). \tag{3.1}$$

Определим понятие сечения производящей функции с носителем в точечном конусе $K$ и приведем формулу, в которой $\Phi_\alpha(z)$ выражаются через сечения производящей функции начальных данных $\Phi_m(z)$.

Разобьем $\{1, ..., s\}$ на два непересекающихся набора $I = \{i_1, ..., i_k\}$ и $J = \{j_1, ..., j_d\}$, так что $I \cup J = \{1, ..., s\}$. Зафиксируем $\lambda_i^0 \in \mathbb{Z}_+, i \in I$ и назовем сечением точечного конуса $K$ множество

$$K_J^I = \{x \in K : x = \sum_{i \in I} \lambda_i^0 a^i + \sum_{j \in J} \lambda_j a^j,\ \lambda_j \in \mathbb{Z}_+, j \in J\}.$$

Обозначим $x_I^0 = \sum\limits_{i \in I} \lambda_i^0 a^i$ и $K_J = \sum\limits_{j \in J} \lambda_j a^j$ и определим сечение $F_J^I(z)$ производящей функции 1.4 формулой $F_J^I(z) = \sum\limits_{x \in x_I^0 + K_J} \frac{f(x)}{z^x}$.

Пусть $B = (b_1, ..., b_s)$, где $b_k \in \{0,1\}, k = 1, ..., s,$ — упорядоченный набор из нулей и единиц. Будем считать, что $J$ — множество индексов $k$, при которых $b_k = 0$, $I$ — множество индексов, при которых $b_k = 1$.

Обозначим $\Pi_m$ пересечение параллелотопа $\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \underset{K}{\leqslant} x \underset{K}{\leqslant} m\}$ с точечным конусом $K$: $\Pi_m = \{x \in K : x \underset{K}{\leqslant} m\}$.

Сопоставим каждому набору $B$ множество $\Gamma_B$:

$$\Gamma_B = \begin{cases} x \in \Pi_m : x_k = m_k, & \text{если } b_k = 1, \\ x \in \Pi_m : x_k \underset{K_{[k]}}{\leqslant} m_k, & \text{если } b_k = 0, \end{cases}$$

где $K_{[k]} = K^k_{\{1,...,k-1,k+1,...,s\}}$.

Заметим, что $\Pi_m = \bigcup\limits_B \Gamma_B$ и $\Gamma_B \cap \Gamma_{B'} = \emptyset$ для $B \neq B'$.

Всякое сечение производящей функции начальных данных $\Phi_m(z)$ имеет вид $\Phi^m_{\tau,B}(z) = \sum\limits_{x \in \tau_I + K_J} \frac{\varphi(x)}{z^x}$, где $\tau = \sum\limits_{i=1}^{s} \mu_i a^i \in \Gamma_B$, $\tau_I = \sum\limits_{i \in I} \mu_i a^i$. Так как носитель $\Phi_\alpha(z)$ лежит в носителе $\Phi_m(z)$ и любое сечение $\Phi_\alpha(z)$ является сечением $\Phi_m(z)$, *то для любого $\alpha \in N_P \cap K$ ряд $\Phi_\alpha(z)$ можно представить как сумму сечений ряда $\Phi_m(z)$:*

$$\Phi_\alpha(z) = \sum_B \sum_{\tau \in \Gamma_B} \zeta_{\tau,\alpha} \Phi^m_{\tau,B}, \tag{3.2}$$

где

$$\zeta_{\tau,\alpha} = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau \underset{K}{\not\geqslant} \alpha, \\ 0, & \text{если } \tau \underset{K}{\geqslant} \alpha. \end{cases}$$

**Замечание 1.** При $K = \mathbb{Z}^n_+$ формула 3.2 была получена в [2].

Докажем теорему 1.

*Доказательство.* Докажем разрешимость задачи Коши 1.1, 1.3. Так как $m$ — вершина многогранника Ньютона, то $c_m \neq 0$ и из уравнения 1.1 можно найти $f(x+m)$: $f(x+m) = \sum\limits_{\alpha \neq m \; \alpha \in A} \tilde{c}_\alpha f(x+\alpha) + \frac{g(x)}{c_m}$, где $\tilde{c}_\alpha = -\frac{c_\alpha}{c_m}$. По условию теоремы $m \underset{K}{\geqslant} \alpha$, поэтому $m + K \subset \alpha + K$ и, кроме того, $\alpha \in K_m$. Далее при $x = 0$ получим, что значение $f$ в точке $m$ выражается через «начальные» данные $\varphi(\alpha)$.

В силу симплициальности конуса $S$ всякую точку из $K$ можно единственным образом представить в виде линейной комбинации образующих его векторов $a^1, \ldots, a^s$, т. е. $x = \lambda_1 a^1 + \cdots + \lambda_s a^s$, $\lambda_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, s$. Теперь обозначим $||x||_K = \lambda_1 + \cdots + \lambda_s$ и воспользуемся индукцией по $||\ ||_K$. Предположим, что значения $f$ вычислены для всех $x$ таких, что

$||x+m||_K < k$. Так как $||x+\alpha||_K = ||(x+m)-(m-\alpha)||_K = ||x+m||_K - ||m-\alpha||_K < k$, то значения $f(x+m)$ выражаются через «начальные» данные $\varphi(x)$. Таким образом, существование и единственность решения задачи 1.1, 1.3 доказаны.

Из того, что по условию производящая функция начальных данных $\Phi_m(z) = \sum\limits_{x\in K_m} \frac{\varphi(x)}{z^x}$ D-финитна (рациональна, алгебраична), следует D-финитность (рациональность, алгебраичность) всех ее сечений $\Phi^m_{\tau,B}(z)$. Действительно, сделав в $\Phi_m(z)$ замену переменных $z^A = \xi$, $A\lambda = x$ , получим D-финитный (рациональный, алгебраичный) ряд, сечения которого в смысле определения 7 D-финитны (рациональны, алгебраичны) (см. [10]). Из предложения 1 получим, что все сечения ряда $\Phi_m(z)$ D-финитны (рациональны, алгебраичны). А так как для всех $\alpha \in N_P \cap K$ справедливо $K_\alpha \subset K_m$, то все $\Phi_\alpha(z) = \sum\limits_{x\in K_\alpha} \frac{\varphi(x)}{z^x}$ также являются D-финитными (рациональными, алгебраичными) рядами.

Алгебраичность (рациональность) производящей функции решения следует из формулы 3.1.

Для доказательства D-финитности производящей функции решения также воспользуемся формулой 3.1. В [5] показано, что носитель разложения в ряд для функции $\frac{1}{P(z)}$ лежит в точечном конусе $K$, кроме того, ряд 1.4 для $\frac{1}{P(z)}$ является D-финитным. Осталось доказать, что произведение D-финитных рядов с носителями в точечном конусе D-финитно.

Пусть $U(z) = \sum\limits_{x\in K} u(x)z^{-x}$, $V(z) = \sum\limits_{x\in K} v(x)z^{-x}$ — D-финитные ряды Лорана с носителями в точечном конусе $K$. Из предложения 1 следует, что ряды $\mathcal{A}^*(U)$ и $\mathcal{A}^*(V)$, а значит и их произведение $\mathcal{A}^*(UV)$ D-финитны в смысле опеределения 7 (см. [10]). Тогда, снова пользуясь предложением 1, получим, что ряд $U(z)V(z)$ является D-финитным. $\square$

**Замечание 2.** В случае $g(x) \equiv 0$ разрешимость доказана в [4].

**Замечание 3.** Другое доказательство разрешимости задачи 1.1, 1.3 состоит в том, что после замены $x = A\lambda$ она сводится к задаче, разрешимость которой доказана в [7].

В заключение работы приведем некоторые соображения в пользу целесообразности рассмотрения разностных уравнений в точечных конусах целочисленной решетки.

В задачах о числе способов перемещения точки по целочисленной решетке с заданным набором шагов (например, обобщенные пути Дика, см. [7]) естественным образом приводят к разностным уравнениям в точечных конусах, порожденных этими шагами. Другое соображение связано с производящими функциями решений. В качестве примера приведем баллотировочную задачу, в которой производящая функция начальных данных рациональна, а производящая функция решения алгебраична. Если же рассмотреть эту задачу в подходящем точечном конусе, то окажется, что производящая функция решения станет рациональной. В простейшем варианте ($n = 2$) требуется найти число способов, которыми можно голосовать на выборах за кандидатов $C_1$ и $C_2$ так, чтобы $C_1$ получил $x$ голосов, $C_2$ получил $y$ голосов, и чтобы $C_1$ никогда не уступал $C_2$ в ходе голосования.

Если обозначить искомое число способов $f(x,y)$, то оно будет удовлетворять уравнению

$$f(x+1,y+1) = f(x,y+1) + f(x+2,y), (x,y) \in \mathbb{Z}^2_+ \tag{3.3}$$

и начальным данным

$$f(k,0) = 0, k \in \mathbb{Z}_+, f(0,1) = 1, f(0,k) = 0, k = 2,3,.... \tag{3.4}$$

Производящая функция решения задачи 3.3, 3.4 алгебраическая и имеет вид

$$F(z,w) = \sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}^2_+} \frac{f(x,y)}{z^x w^y} = \frac{2zw - z^2 w + z^2\sqrt{w(w-4)}}{2(zw - w - z^2)}.$$

В отличие от [7], рассмотрим уравнение 3.3 в рациональном конусе $S$, натянутом на векторы $a^1 = (1,0)$ и $a^2 = (-2,1)$. Обозначим $\Lambda = \{x \in \mathbb{Z}^2 : x = \lambda_1(1,0) + \lambda_2(-2,1),\ \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{Z}\}$ — решетку, порожденную векторами $a^1, a^2$ и $K = S \cap \Lambda$ — точечный конус. Обозначим $h(x,y)$ искомое решение уравнения 3.3, а начальные данные зададим на множестве $K_{(-1,1)} = \{x \in K : x \underset{K}{\not\geq} (-1,1)\} = \{(-2k,k), k = 0,1,2,..\} \cup \{(k,0), k = 1,2,...\}$ следующим образом

$$h(-2k,k) = (-1)^{k+1}k^2, k = 0,1,2,..., \tag{3.5}$$

$$h(k,0) = 0, k = 1,2,....$$

Производящая функция $\Phi_{(-1,1)} = \sum\limits_{(x,y)\in K_{(-1,1)}} \frac{h(x,y)}{z^x w^y}$ начальных данных равна $\Phi_{(-1,1)} = \frac{z^2 w(w-z^2)}{(w+z^2)^3}$ и является рациональной.

Из формулы 3.1 после простых преобразований получим выражение для производящей функции $H(z,w) = \sum\limits_{(x,y)\in K} \frac{h(x,y)}{z^x w^y}$ решения разностного уравнения 3.3 с начальными данными 3.5:

$$H(z,w) = \frac{z^3 w^2 (w - z^2)}{(zw - w - z^2)(w + z^2)^3}.$$

Таким образом, после перехода от задачи 3.3, 3.4 к задаче 3.3, 3.5 производящая функция решения *стала рациональной* и, кроме того, если решение $h(x, y)$ задачи 3.3, 3.5 сузить на $\mathbb{Z}^2_+$, то оно совпадет с решением $f(x, y)$ задачи 3.3, 3.4.

## Список литературы


1. Арнольд В. И. Особенности дифференцируемых отображений / В. И. Арнольд, А. Н. Варченко. – М. : МЦНМО, 2009. – 672 с.
2. Лейнартас Е. К. О рациональности многомерных возвратных степенных рядов / Е. К. Лейнартас, А. П. Ляпин // Журн. Сиб. федер. ун-та. – 2009. – Т. 2, вып. 4. – С. 449–455.
3. Ленг С. Алгебра / С. Ленг. – М. : Наука, 1965. – 431 с.
4. Некрасова Т. И. Задача Коши для многомерного разностного уравнения в конусах целочисленной решетки / Т. И. Некрасова // Журн. Сиб. федер. ун-та. – 2012. – Т. 5, вып. 4. – С. 576–580.
5. Некрасова Т. И. Достаточные условия алгебраичности производящих функций решений многомерных разностных уравнений / Т. И. Некрасова // Изв. Иркут. гос. ун-та. – 2013. – Т. 6, № 3. – С. 88–96.
6. Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Т. 2 / Р. Стенли. – М. : Мир, 2009. – 767 с.
7. Bousquet-Mélou M. Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case / M. Bousquet-Mélou, M. Petkovšek // Discrete Mathematics. – 2000. – Vol. 225. – P. 51–75.
8. Brion M. Lattice points in simple polytopes / M. Brion, M. Vergne // Journal of the American Mathematical Society. – 1997. – Vol. 10, N 2. - P. 371–392.
9. Forsberg M. Laurent Determinants and Arrangements of Hyperplane Amoebas / M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh // Advances in Math. – 2000. – Vol. 151. – P. 45–70.
10. Lipshitz L. D-Finite power series / L. Lipshitz // Journal of Algebra. – 1989. – Vol. 122. – P. 353–373.
11. Stanley R. Differentiably finite power series / R. Stanley // European Journal Combinatorics. – 1980. – Vol. 1. – P. 175–188.


**Некрасова Татьяна Игоревна**, аспирант, Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79 тел.: +79232759272
(e-mail: `t.neckrasova@gmail.com`)

---

**T. I. Nekrasova**

**On the Hierarchy of Generating Functions for Solutions of Multidimensional Difference Equations**

**Abstract**. In this paper we study generating functions of solutions for a difference equation with the support in a rational cone of the lattice. For Laurent series with the support in such cone we define the notion of D-finiteness and find the sufficient condition, when rationality (algebraicity, D-finiteness) of the generating function of the solution to the Cauchy problem follows from rationality (algebraicity, D-finiteness) of the generating function of its initial data.

**Keywords:** multidimensional difference equations, Cauchy problem, generating function, D-finite Laurent series.

## References

1. Arnold V.I., Varchenko A.N. *Osobennosti differentsiruemikh otobrazheniy* [Singularities of differentiable maps]. Moscow, MTSNMO, 2009. 672 p.
2. Leinartas E.K., Lyapin A.P. On rationality multidimentional recursive power series [Oh ratzionalnosti mnogomernih vozvratnih stepennih ryadov]. *Zhurnal Sibirskogo Federalnogo universiteta [Journal of Siberian Federal University]*, 2009, vol. 2 (4), pp. 449–455.
3. Leng C. *Algebra* [Algebra]. Moscow, Nauka, 1965. 431 p.
4. Nekrasova T.I. Cauchy Problem for Multidimensional Difference Equations in Lattice Cones [Zadacha Koshi dlya mnogomernogo raznostnogo uravneniya v konusakh tselochislennoy reshetki]. *Zhurnal Sibirskogo Federalnogo universiteta [Journal of Siberian Federal University]*, 2012, vol. 5(4), pp. 576-580.
5. Nekrasova T.I. Sufficient conditions of algebraicity of generating functions of the solutions of multidimensional difference equations *Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta [The Bulletin of Irkutsk State University]*, 2013, vol. 6, no. 3, pp. 88-96.
6. Stanley R. *Perechislitelnaya kombinatorika* [Enumerative Combinatorics]. Vol. 2. Moscow, Mir, 2009. 767 p.
7. Bousquet-Mélou M., Petkovšek M. Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case. *Discrete Mathematics*, 2000, vol. 225, pp. 51-75.
8. Brion M., Vergne M. Lattice points in simple polytopes. *Journal of the American Mathematical Society*, 1997, vol. 10, no 2, pp. 371-392.
9. Forsberg M., Passare M., Tsikh A. Laurent Determinants and Arrangements of Hyperplane Amoebas. *Advances in Math*, 2000, vol. 151, pp. 45-70.
10. Lipshitz L. D-Finite power series. *Journal of Algebra*, 1989, vol. 122, pp. 353-373.
11. Stanley R. Differentiably finite power series. *European Journal Combinatorics*, 1980, vol. 1, pp. 175-188.

**Nekrasova Tatiana Igorevna**, Postgraduate, Siberian Federal University, 79, Svobodny Prospect, Krasnoyarsk, 660041, tel.:(923)2759272 (e-mail: `t.neckrasova@gmail.com`)