



Серия «Математика»

2014. Т. 9. С. 10–25

Онлайн-доступ к журналу:

<http://isu.ru/izvestia>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

УДК 519.854, 004.8, 004.023

Решение задачи Вебера на плоскости с минимаксным критерием и запрещенными зонами *

Г. Г. Забудский, Н. С. Веремчук

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

Аннотация. Задачи размещения объектов различного вида составляют широкий класс в исследовании операций. Многообразие различных постановок задач оптимального размещения определяется областью, в которой располагаются объекты, различными ограничениями и видами критериев. Важным подклассом задач размещения взаимосвязанных объектов является задача Вебера. Рассматриваются два критерия оптимальности: минимизация суммарной стоимости связей между объектами или максимальной связи. Исследованием минимаксной задачи Вебера с прямоугольной метрикой занимались J. G. Morris, R. L. Francis, T. Ichimori. В данной статье рассматривается задача оптимального размещения объектов на плоскости с расположенными на ней фиксированными объектами и прямоугольными запрещенными зонами, со сторонами параллельными осям координат. Размещаемые объекты связаны между собой и с фиксированными. Критерием является минимизация максимальной стоимости связи между всеми объектами. Размещение внутри запрещенных зон не допускается. Для измерения расстояний используется прямоугольная метрика. Приводятся свойства задачи, модель целочисленного линейного программирования с булевыми переменными. Доказано, что существует оптимальное размещение в прямоугольной оболочке, построенной с помощью решения задач для каждого из размещаемых объектов отдельно. Разработаны варианты алгоритма ветвей и границ с различными оценками целевой функции. Проведен вычислительный эксперимент с использованием предложенного алгоритма и решения задачи с применением модели целочисленного линейного программирования и пакета IBM ILOG CPLEX. По результатам эксперимента можно сделать вывод, что применение доказанного свойства является перспективным как при решении задачи комбинаторными методами, так и с применением аппарата целочисленной оптимизации.

Ключевые слова: задача размещения, целочисленное программирование, минимаксная задача Вебера, запрещенные зоны, алгоритм ветвей и границ.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №13-01-00862.

Введение

В практической деятельности часто необходимо решать задачи оптимального размещения объектов в заданной области. Это может быть проектирование генеральных планов предприятий, размещение пунктов обслуживания (клиник, пожарных депо, систем сотовой связи) и т. д. Одним из важных подклассов таких задач являются задачи Вебера, которые формулируются следующим образом. Среди фиксированных объектов в некоторой области размещаются объекты, связанные между собой и с фиксированными. Критерием оптимальности может быть минимизация суммарной стоимости связи между объектами (минисуммный) или максимальной связи (минимаксный).

Одно из обобщений задачи Вебера связано с учетом запрещенных зон, в которых нельзя размещать объекты. Такими зонами могут быть как искусственные препятствия (строения, оборудование и т. д.), так и естественные преграды (горы, озера и т. п.).

В данной работе рассматривается задача Вебера на плоскости с минимаксным критерием и прямоугольными запрещенными зонами со сторонами, параллельными осям координат. Для измерения расстояний используется прямоугольная метрика. Доказано, что существует оптимальное размещение в прямоугольной оболочке, построенной с помощью решения задач для каждого из размещаемых объектов отдельно. Разработаны варианты алгоритма ветвей и границ. Проведен вычислительный эксперимент с использованием предложенного алгоритма и решения задачи с применением модели целочисленного линейного программирования (ЦЛП) и пакета IBM ILOG CPLEX.

1. Постановка задачи

На плоскости среди фиксированных объектов P_i с координатами (p_{i1}, p_{i2}) , $i \in M = \{1, \dots, m\}$, размещаются объекты X_j , $j \in N = \{1, \dots, n\}$. Заданы: запрещенные прямоугольные зоны F_k со сторонами, параллельными осям координат, внутри которых не допускается размещение объектов, $F = \bigcup F_k$, $k \in Z = \{1, \dots, z\}$; $w_{ij} \geq 0$ и $v_{jk} \geq 0$ — удельные стоимости связи между объектами P_i и X_j , X_j и X_k соответственно. Необходимо разместить объекты вне запрещенных зон таким образом, чтобы максимальная стоимость связи между всеми объектами была минимальной [1; 2]. Математическая модель задачи имеет вид [1; 2; 4; 5]:

$$\max \left\{ \max_{i \in M, j \in N} w_{ij} d(P_i, X_j), \max_{j, k \in N, j < k} v_{jk} d(X_j, X_k) \right\} \rightarrow \min, \quad (1)$$

$$X_j \notin \text{Int } F, \quad j \in N, \quad (2)$$

где $d(\cdot, \cdot)$ — некоторая метрика, $\text{Int } F$ — внутренность множества F .

В данной работе рассматривается прямоугольная метрика, т. е. если координаты размещаемых объектов обозначить как (x_j, y_j) , $j \in N$, то

$$d(P_i, X_j) = |p_{i1} - x_j| + |p_{i2} - y_j|, \quad d(X_j, X_k) = |x_j - x_k| + |y_j - y_k|.$$

Без учета запрещенных зон задача Вебера (1) с прямоугольной метрикой достаточно исследована. В работе [10] введением дополнительного параметра она сводится к задаче линейного программирования (ЛП). Задача (1) с ограничениями на максимально допустимые расстояния исследована в [7]. Линейным преобразованием осуществляется переход от метрики l_1 к l_∞ и задача декомпозируется на две по координатам x и y . Двойственная к каждой из которых интерпретируется в виде сетевой — определить в сети поток максимальной общей стоимости. В работе [8] задача (1) сводится к поиску кратчайшего пути в сети, длины дуг которой линейно зависят от параметра.

Часто в задачах оптимального размещения необходимо учитывать ограничения на размещение объектов в виде барьеров или запрещенных зон. В случае барьеров находится расположение объектов, и прокладываются трассы для связей между ними. Обзор результатов исследований задач с барьерами в виде кругов, многоугольников, линий и различными метриками приведен в [9]. В задачах с запрещенными зонами выполняется размещение объектов и оценивается стоимость связей между ними. Например, при проектировании генеральных планов нефтехимических предприятий требуется обеспечить удобство обслуживания оборудования, прямые проезды, зонирование территории, что приводит к необходимости использования прямоугольной метрики. Кроме того, указанная метрика позволяет применять аппарат целочисленной и линейной оптимизации для решения задач. В работе [2] предложены модели ЦЛП задачи (1)–(2) и аналогичной задачи с критерием минимальной суммарной стоимости связи между объектами. В работе [3] доказано свойство задачи с минисуммным критерием, которое позволяет сузить допустимую область при поиске оптимума и предложен комбинаторный алгоритм ветвей и границ для ее решения. Свойства задачи (1)–(2) и вариант алгоритма ветвей и границ описаны в [4; 5].

2. Свойства оптимального решения

Отметим некоторые свойства задачи (1)–(2). Пусть зона F_k ограничена прямоугольником $[(a_k, c_k); (b_k, d_k)]$, где (a_k, c_k) — координаты его левого нижнего, а (b_k, d_k) — правого верхнего углов, $\forall k \in Z$. Обозначим

$$A = \min_{i \in M, k \in Z} \{p_{i1}, a_k\}, \quad B = \max_{i \in M, k \in Z} \{p_{i1}, b_k\},$$

$$C = \min_{i \in M, k \in Z} \{p_{i2}, c_k\}, \quad D = \max_{i \in M, k \in Z} \{p_{i2}, d_k\}.$$

Для поиска оптимального решения достаточно рассматривать область \mathcal{F} , ограниченную прямоугольником $[(A, C); (B, D)]$ [9]. Если левый нижний угол области \mathcal{F} не совпадает с началом координат, то этого можно добиться параллельным сдвигом. Если $B_{\mathcal{F}} = B - A$ и $D_{\mathcal{F}} = D - C$, то оптимальное решение находится в прямоугольнике $[(0, 0); (B_{\mathcal{F}}, D_{\mathcal{F}})]$ (см. рис. 1).

Обозначим через R подмножество из \mathcal{F} , в котором допускается размещение объектов, т. е. $R = \mathcal{F} \setminus \text{Int } F$ — область допустимых решений. В общем случае R невыпуклая и может быть несвязной.

Алгоритм решения задачи в случае, когда $n = 1$ описан в работе [2]. Обозначим X'_1, \dots, X'_n оптимальные расположения размещаемых объектов, найденных с помощью указанного алгоритма и (x'_j, y'_j) — их координаты, $j \in N$. Пусть

$$A' = \min_{j \in N} \{x'_j\}, \quad B' = \max_{j \in N} \{x'_j\}, \quad C' = \min_{j \in N} \{y'_j\}, \quad D' = \max_{j \in N} \{y'_j\}.$$

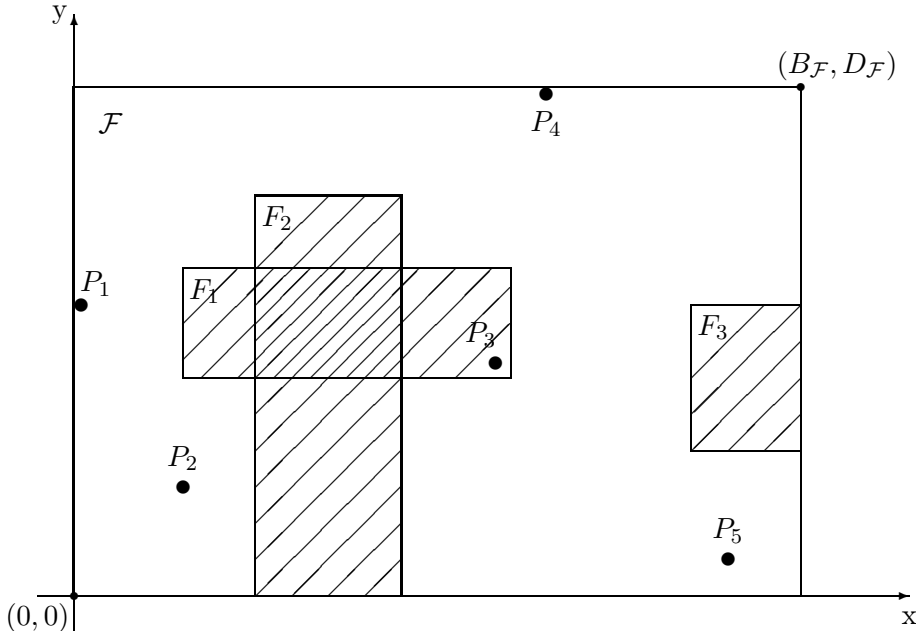


Рис. 1. Пример области \mathcal{F} , $A = p_{11}$, $C = c_2$, $B = b_3$, $D = p_{42}$.

Рассмотрим прямоугольную область \mathcal{F}' , заданную координатами

$$[(A', C'); (B', D')]$$

и через $\partial\mathcal{F}'$ обозначим ее границу. Тогда справедливо

Утверждение 1. *Если $\partial\mathcal{F}' \subseteq R$, то в области \mathcal{F}' существует оптимальное решение задачи (1)–(2).*

Доказательство утверждения приведено в Приложении 1.

Пусть $Z' \subseteq Z$ — множество номеров запрещенных зон таких, что для $j \in Z'$ выполняется условие $\text{Int}(\mathcal{F}' \cap F_j) \neq \emptyset$. Имеет место

Следствие 1. *Если $Z' \neq \emptyset$ и $\text{Int}(F_j \cap F_k) = \emptyset$ для любого $j \in Z'$, $k \in Z \setminus Z'$, то для поиска оптимального решения достаточно рассмотреть область, ограниченную контуром $\partial(\mathcal{F}' \cup_{j \in Z'} F_j)$.*

Справедливость следствия следует из того, что, как и при доказательстве утверждения, объект необходимо переместить не на соответствующую границу области, а на границу запрещенной зоны, которая пересекается с \mathcal{F}' . Указанная граница принадлежит R , та как по условию запрещенные зоны не пересекаются с зонами с номерами из Z' . Для построения указанного контура можно использовать алгоритм плоского заметания, основанного на дереве отрезков [6].

3. Модель целочисленного линейного программирования

Запишем модель ЦЛП для задачи (1)–(2) [2]. Для учета условия (2) отметим, что область R может быть представлена в виде объединения прямоугольников R_k — разрешенных областей со сторонами параллельными осям координат, в которых допускается размещение объектов, $k \in G = \{1, \dots, g\}$. Разрешенные области строятся с помощью алгоритма, описанного в [1].

Пусть область R_k ограничена прямоугольником $[(\tilde{a}_k, \tilde{c}_k); (\tilde{b}_k, \tilde{d}_k)]$, $k \in G$. Условие принадлежности объекта X_j только одной разрешенной области R_k записывается с помощью булевых переменных h_{jk} , $j \in N$, $k \in G$, ($h_{jk} = 1$, если $X_j \in R_k$, иначе $h_{jk} = 0$) и имеет вид:

$$\left. \begin{array}{l} x_j - \tilde{a}_k h_{jk} \geq 0 \\ y_j - \tilde{c}_k h_{jk} \geq 0 \\ -x_j + B_{\mathcal{F}} - h_{jk}(B_{\mathcal{F}} - \tilde{b}_k) \geq 0 \\ -y_j + D_{\mathcal{F}} - h_{jk}(D_{\mathcal{F}} - \tilde{d}_k) \geq 0 \\ \sum_{k=1}^g h_{jk} = 1 \\ h_{jk} \in \{0, 1\} \end{array} \right\} j \in N, k \in G. \quad (3)$$

Ведением дополнительного параметра $x_0 \geq 0$ задача (1) сводится к эквивалентной задаче ЛП [10]. С учетом условий (3) получаем следующую модель ЦЛП (3)–(6):

$$x_0 \rightarrow \min \tag{4}$$

$$\left. \begin{aligned} x_j + y_j + \frac{x_0}{w_{ij}} &\geq p_{i1} + p_{i2} \\ -x_j + y_j + \frac{x_0}{w_{ij}} &\geq -p_{i1} + p_{i2} \\ x_j - y_j + \frac{x_0}{w_{ij}} &\geq p_{i1} - p_{i2} \\ -x_j - y_j + \frac{x_0}{w_{ij}} &\geq -p_{i1} - p_{i2} \end{aligned} \right\}, i \in M, j \in N, \tag{5}$$

$$\left. \begin{aligned} x_j - x_k + y_j - y_k + \frac{x_0}{v_{jk}} &\geq 0 \\ -x_j + x_k + y_j - y_k + \frac{x_0}{v_{jk}} &\geq 0 \\ x_j - x_k - y_j + y_k + \frac{x_0}{v_{jk}} &\geq 0 \\ -x_j + x_k - y_j + y_k + \frac{x_0}{v_{jk}} &\geq 0 \end{aligned} \right\}, j, k \in N, j < k, \tag{6}$$

Замечание 1. Отметим, что если существует подмножество $G' \subseteq G$ таких, что $\mathcal{F}' \subseteq \bigcup_{k \in G'} R_k$, то задача (1)–(2) полиномиально разрешима.

Действительно, для этого достаточно решить задачу ЛП в \mathcal{F}' , при этом в модели (3)–(6) условия (3) заменяются линейными ограничениями.

4. Алгоритм ветвей и границ

В алгоритме ветвей и границ важным является построение нижних оценок целевой функции и разбиение множества допустимых решений на подмножества (ветвление).

Ветвление. Осуществляется с помощью последовательного фиксирования объектов в заданном порядке в разрешенных областях.

Нижние оценки. Предложено несколько вариантов построения оценок размещения объектов в разрешенных областях.

В первом варианте X_j фиксируется в области R_k , G' — номера областей, в которых зафиксированы размещаемые объекты, $N(R_s)$ — множество размещаемых объектов в области R_s , $s \in G' \subseteq G$. Тогда нижняя оценка значения функции (1) при размещении объекта X_j в области R_k вычисляется по формуле:

$$\max\left\{\max_{i \in M}(w_{ij}d(P_i, R_k)), \max_{s \in G'}(v_{jt(s)}d(R_k, R_s))\right\},$$

где $v_{jt(s)} = \max_{r \in N(R_s)} v_{jr}$, $s \in G'$ и расстояния между множествами определяются стандартным образом.

Во втором варианте решается задача (1)–(2) для $n = 1$ алгоритмом из [2], т.е. оценивается максимальное взвешенное расстояние каждого размещаемого только по отношению к фиксированным объектам.

В третьем варианте, при фиксации объектов в разрешенных областях, добавляются ограничения на максимально допустимые расстояния между объектами, которые определяются максимальными расстояниями между соответствующими разрешенными областями и решается задача ЛП.

Для описания алгоритма ветвей и границ введем обозначения: rec — лучшее значение целевой функции из известных допустимых решений (рекорд) в текущий момент;

f — оптимальное значение задачи ЛП с фиксированными булевыми переменными;

D — подмножество допустимых решений;

$\xi(D)$ — нижняя оценка целевой функции на подмножестве D ;

u — уровень ветвления, т.е. номер объекта, который размещается на этом уровне;

$H(u)$ — номер области, в которой фиксируется объект u ;

D_{uj} — разрешенная область с номером j , рассматриваемая в дереве ветвления на уровне u .

Начальное значение rec положим равным $+\infty$.

Итерация 0. Решаем задачу ЛП (4)–(6). Если все объекты находятся вне $Int F$, то исходная задача решена. Иначе строим разрешенные области и разбиваем множество D на g непересекающихся (кроме как по границе) подмножеств $D = D_{11} \cup D_{12} \cup \dots \cup D_{1g}$. Полагаем $u = 1$ и на итерацию 1.

Итерация $l \geq 1$.

Шаг 1. Если D_u — семейство подмножеств не подвергавшихся ветвлению на уровне u не пусто, то на Шаг 2. Иначе на Шаг 3.

Шаг 2. Вычисляем нижние оценки $\xi(D_{uk})$, $k \in G$ и выбираем для разбиения подмножество D_{up} : $\xi(D_{up}) = \min_{k \in G} \xi(D_{uk})$.

Если $\xi(D_{up}) \geq rec$, то на Шаг 3, иначе $H(u) := p$ и на Шаг 4.

Шаг 3. Если $u = 1$, то СТОП, задача решена. Иначе $u := u - 1$ и на Шаг 1.

Шаг 4. Если $u = n$, то полагаем $h_{jH(j)} = 1$, $j \in N$ и $h_{jk} = 0$, $k \neq H(j)$, $k \in G$, $j \in N$. На Шаг 5.

Иначе множество D_{up} разбивается на g непересекающихся подмножеств $D_{up} = D_{u+1\ 1} \cup D_{u+1\ 2} \cup \dots \cup D_{u+1\ g}$, $u := u + 1$ и на Шаг 2.

Шаг 5. Решаем задачу ЛП. Если $f < rec$, то полагаем $rec = f$, иначе на Итерацию $l + 1$.

Для решения задачи реализован программно алгоритм ветвей и границ с первым вариантом оценки значений целевой функции.

5. Результаты эксперимента

Проведен вычислительный эксперимент по сравнению результатов решения задач с учетом найденного свойства (утверждение) и без него. Решения находились с помощью разработанного алгоритма ветвей и границ и с использованием модели ЦЛП и пакета IBM ILOG CPLEX 12.2. Эксперимент проводился на компьютере со следующими техническими характеристиками: Intel® Core™ i5-2450M 2.50GHz 6,00ГБ. Алгоритм ветвей и границ с первым вариантом оценки реализован в среде Borland C++ Builder Version 6.0 (Build 10.166). Координаты фиксированных объектов и удельные стоимости связи между объектами генерировались случайным образом. Численное решение задачи на конкретном примере представлено в Приложении 2.

Сравнение результатов эксперимента приведено в таблицах 1 и 2, где используются следующие обозначения $t_{\text{АВГ}}^*$ и $t_{\text{АВГ}}$ — время работы (в секундах) алгоритма с учетом свойства и без него. Аналогично, t_{CPLEX}^* и t_{CPLEX} — время работы пакета IBM ILOG CPLEX с применением свойства и без него. Число разрешенных областей в задаче с учетом свойства и без него обозначены как g^* и g соответственно.

Таблица 1
Решение задачи алгоритмом

№	n	m	g	g^*	$t_{\text{АВГ}}$	$t_{\text{АВГ}}^*$
1	3	2	3	1	0,202	0,140
2	5	5	8	3	1,076	0,562
3	6	7	5	2	2,371	1,155
4	6	7	4	2	0,873	0,561
5	5	9	10	3	3,712	1,373
6	8	2	5	2	0,889	0,499
7	10	10	10	3	4,586	0,843
8	10	15	10	3	5,928	1,762
9	16	19	7	3	9,142	6,614
10	20	5	7	3	5,897	3,135

В результате эксперимента можно отметить, что учет доказанного свойства задачи сокращает время ее решения при использовании обоих рассматриваемых подходов.

6. Заключение

Исследована минимаксная задача Вебера на плоскости с прямоугольной метрикой и прямоугольными запрещенными зонами. Доказано, что

Таблица 2

Решение задачи пакетом

№	n	m	g	g^*	t_{CPLEX}	t_{CPLEX}^*
1	3	2	3	1	0,12	0,01
2	5	5	8	3	0,44	0,11
3	6	7	5	2	0,13	0,01
4	6	7	4	2	0,22	0,2
5	5	9	10	3	0,36	0,05
6	8	2	5	2	0,33	0,22

существует оптимальное размещение в прямоугольной оболочке, построенной с помощью решения задач для каждого из размещаемых объектов отдельно. Разработаны варианты алгоритма ветвей и границ. Проведен вычислительный эксперимент с использованием алгоритма и решения задачи с применением модели ЦЛП и пакета IBM ILOG CPLEX. По результатам эксперимента можно сделать вывод, что применение доказанного свойства является перспективным как при решении задачи комбинаторными методами, так и с применением аппарата целочисленной оптимизации.

Список литературы

1. *Забудский Г. Г.* О минимаксной и минисуммной задачах размещения на плоскости с запрещенными областями / Г. Г. Забудский // XIII Байкальская международная школа-семинар «Методы оптимизации и их приложения»: тр. школы-семинара. – Иркутск : ИСЭ СО РАН, 2005. – Т. 1. – С. 455–460.
2. *Забудский Г. Г.* Построение моделей и решение задач размещения на плоскости с запрещенными зонами / Г. Г. Забудский // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 12. – С. 136–141.
3. *Забудский Г. Г.* Сужение области поиска решения задачи Вебера на плоскости с прямоугольными зонами / Г. Г. Забудский, И. В. Амзин // Автоматика и телемеханика. – 2012. – № 5. – С. 71–83.
4. *Забудский Г. Г.* О минимаксной задаче Вебера на плоскости с запрещенными зонами / Г. Г. Забудский, Н. С. Веремчук // Междунар. конф. «Дискретная оптимизация и исследование операций»: материалы конф. – Новосибирск : Изд-во Ин-та математики, 2013. – С. 123.
5. *Забудский Г. Г.* Решение минимаксной задачи Вебера на плоскости с запрещенными зонами / Г. Г. Забудский, Н. С. Веремчук // XVI Байкальская международная школа-семинар «Методы оптимизации и их приложения»: тез. докл. – Иркутск : ИСЭМ СО РАН, 2014. – С. 54.
6. *Препарата Ф.* Вычислительная геометрия: Введение / Ф. Препарата, М. Шеймос. – М. : Мир, 1989. – 478 с.
7. *Dearing H.V.* A Network Flow Solution to a Multifacility Minimax Location Problem Involving Rectilinear Distances / H.V. Dearing, R.L. Francis // Transportation Science. – 1974. – Vol. 8. – P. 126–141.

8. *Ichimori T.* A Shortest Path Approach to a Multifacility Minimax Location Problem with Rectilinear Distances / Т. Ichimori // Journal of the Operation Research Society of Japan. – 1985. – N 4. – P. 269–284.
9. *Klamroth K.* Single-Facility Location Problems with Barriers / К. Klamroth. – Springer Series in Operation Research, 2002. – 197 p.
10. *Morris J. G.* A Linear Programming Approach to the Solution of Constrained Multi-Facility Minimax Location Problems Where Distances are Rectangular / J. G. Morris // Operation Research Quarterly. – 1973. – Vol. 24. – P. 419–435.

Забудский Геннадий Григорьевич, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 664043, Омск, ул. Певцова, 13, тел.: (3812)236739 (e-mail: zabudsky@ofim.oscsbras.ru)

Веремчук Наталья Сергеевна, аспирант, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 664043, Омск, ул. Певцова, 13, тел.: (3812)236739 (e-mail: n-veremchuk@rambler.ru)

G. G. Zabudsky, N. S. Veremchuk

Solving Weber Problem on Plane with Minimax Criterion and Forbidden Gaps

Abstract. Location problems of various facilities are a wide class of operations research. The variety of statements of location problems is depends on the area in which are to be placed facilities and various restrictions and types of criteria. Important subclass of location problems of the interconnected facilities is the Weber problem. Two criteria of optimality are considered: minimization of total cost of communications between facilities or minimization of the maximum communication cost. Minimax Weber problem with a rectangular metrics is researched by J. G. Morris, R. L. Francis and T. Ichimori. In this paper, the problem of optimum location of facilities on the plane with the fixed facilities located on it and the rectangular forbidden gaps, with the borders parallel to axes of coordinates is considered. The located facilities are connected among themselves and with fixed facilities. The criterion is minimization of the maximum cost of communications between all facilities. Location in forbidden gaps is not allowed. The rectangular metrics is used. Properties of the problem, model of integer linear programming with Boolean variables are described. It is proved that it is sufficient to consider a subset of admissible solutions to find the optimum. Three variants of branch and bounds algorithm with different lower bounds on the goal function are developed. Computational experiment on comparison of efficiency of one of these algorithms and the IBM ILOG CPLEX is presented. Usage of the obtained property is perspective both in combinatorial methods as well as in integer programming methods for solving the problem.

Keywords: location problem, integer programming, minimax Weber problem, forbidden gaps, algorithm branch and bounds.

References

1. Zabudsky G.G. About Minimax and Minsum Location Problems on Plane with Forbidden Gaps (in Russian). *Materials of 13th Baikal International Triannual School-Seminar "Methods of Optimization and Their Applications"*, Irkutsk, 2005, vol. 1, pp. 455-460.
2. Zabudskii G.G. Model Building and Location Problem Solving in a Plane with Forbidden Gaps. *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, issue 12, pp. 1986-1990.
3. Zabudskii G.G., Amzin I.V. Search Region Contraction of the Weber Problem Solution on the Plane with Rectangular Forbidden Zones. *Automation and Remote Control*, 2012, vol. 73, issue 5, pp. 821-830.
4. Zabudsky G.G., Veremchuk N.S. Minimax Weber Problem on Plane with Forbidden Gaps (in Russian). *Materials of International conference "Discrete Optimization and Operations Research"*, Novosibirsk, Institute of mathematics, 2013, p. 123.
5. Zabudsky G.G., Veremchuk N.S. Solving Minimax Weber Problem on Plane with Forbidden Gaps (in Russian). *Materials of 16th Baikal International Triannual School-Seminar "Methods of Optimization and Their Applications"*, Irkutsk, 2014, p. 54.
6. Preparata P., Shamos M. *Computational Geometry: an Introduction*. Springer-Verlag, 1985, 478 p.
7. Dearing H.V., Francis R.L. A Network Flow Solution to a Multifacility Minimax Location Problem Involving Rectilinear Distances. *Transportation Science*, 1974, vol. 8, p. 126-141.
8. Ichimori T. A Shortest Path Approach to a Multifacility Minimax Location Problem with Rectilinear Distances. *Journal of the Operation Research Society of Japan*, 1985, no 4, p. 269-284.
9. Klamroth K. *Single-Facility Location Problems with Barriers*. Springer Series in Operation Research, 2002, 197 p.
10. Morris J.G. A Linear Programming Approach to the Solution of Constrained Multifacility Minimax Location Problems Where Distances are Rectangular. *Operation Research Quarterly*, 1973, vol. 24, pp. 419-435.

Zabudsky Gennady Grigorjevich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the RAS, 13, Pevtsova St., Omsk, 644043, tel.: (3812)236739 (e-mail: zabudsky@ofim.oscsbras.ru)

Veremchuk Natalia Sergeevna, Postgraduate, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the RAS, 13, Pevtsova St., Omsk, 644043, tel.: (3812)236739 (e-mail: n-veremchuk@rambler.ru)

П Р И Л О Ж Е Н И Е 1

Доказательство. Пусть найдено оптимальное решение X^* задачи (1)–(2), причем некоторые из X_j^* , $j \in N$ расположены вне \mathcal{F}' . Построим новое решение $\tilde{X} \in \mathcal{F}$, для которого $f(\tilde{X}) = f(X^*)$. Разобьем область \mathcal{F} на подобласти \mathcal{F}' , \mathcal{F}_a , \mathcal{F}_b , \mathcal{F}_c , \mathcal{F}_d и множество N на соответствующие подмножества N' , N_a , N_b , N_c , N_d (см. рис. 2). Пусть $X_j^* \in \mathcal{F}_a$, $j \in N_a = \{1, \dots, t\}$. Построим решение $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_t, X_{t+1}^*, \dots, X_n^*$, для которого $f(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_t, X_{t+1}^*, \dots, X_n^*) = f(X^*)$, где \tilde{X}_j имеет координаты $(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j) : \tilde{x}_j = A'$, $\tilde{y}_j = y_j^*$, $j \in N_a$.

Функцию $f(X^*)$ можно расписать следующим образом:

$$\max\left\{ \max_{i \in I, j \in N_a} w_{ij}d(P_i, X_j^*); \max_{i \in I, j \notin N_a} w_{ij}d(P_i, X_j^*); \max_{j, k \in N_a, j < k} v_{jk}d(X_j^*, X_k^*); \right. \\ \left. \max_{j \in N_a, k \notin N_a} v_{jk}d(X_j^*, X_k^*); \max_{j, k \notin N_a} v_{jk}d(X_j^*, X_k^*) \right\}. \quad (*)$$

Покажем, что для решения $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_t, X_{t+1}^*, \dots, X_n^*$ справедливы три неравенства.

1) Первое неравенство:

$$\max_{i \in I, j \in N_a} w_{ij}d(P_i, X_j^*) \geq \max_{i \in I, j \in N_a} w_{ij}d(P_i, \tilde{X}_j).$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\max_{i \in I} w_{ij}d(P_i, X_j^*) \geq \max_{i \in I} w_{ij}d(P_i, \tilde{X}_j), \forall j \in N_a.$$

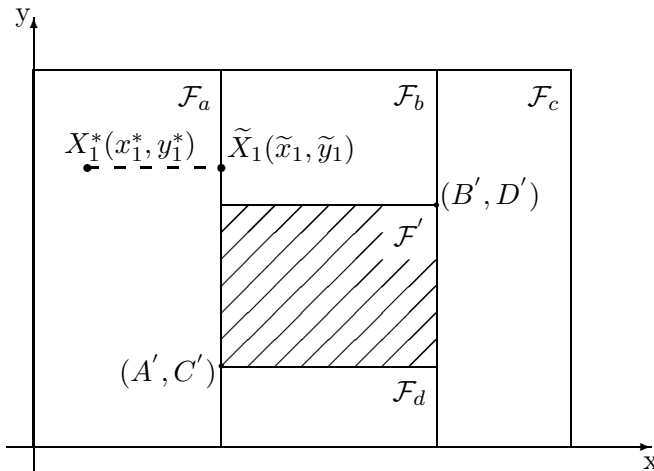


Рис. 2. Разбиение области \mathcal{F} на подобласти.

$$\begin{aligned} \max_{i \in I} w_{ij} d(P_i, X_j^*) &= \max_{i \in I} w_{ij} (|p_{1i} - x_j^*| + |p_{2i} - y_j^*|) = \\ &= \max_{i \in I} w_{ij} (|p_{1i} - x_j^*| + |p_{2i} - \tilde{y}_j|). \end{aligned}$$

Так как $\tilde{y}_j = y_j^*$, для $\forall j \in N_a$ по построению, то, не учитывая одинаковые составляющие, для справедливости первого неравенства, необходимо показать, что

$$\max_{i \in I} w_{ij} (|p_{1i} - x_j^*|) \geq \max_{i \in I} w_{ij} (|p_{1i} - \tilde{x}_j|), \forall j \in N_a.$$

Для каждого j это неравенство выполняется, так как функция $\max_{i \in I} w_{ij} (|p_{1i} - x_j|)$ является выпуклой вниз и $\max_{i \in I} w_{ij} (|p_{1i} - x_j'|)$ — ее оптимальное значение, $x_j^* \leq \tilde{x}_j \leq x_j'$, для $\forall j \in N_a$.

2) Второе неравенство:

$$\max_{j, k \in N_a, j < k} v_{jk} d(X_j^*, X_k^*) \geq \max_{j, k \in N_a, j < k} v_{jk} d(\tilde{X}_j, \tilde{X}_k).$$

Его справедливость следует из цепочки равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} \max_{j, k \in N_a, j < k} v_{jk} d(X_j^*, X_k^*) &= \max_{j, k \in N_a, j < k} v_{jk} (|x_j^* - x_k^*| + |y_j^* - y_k^*|) \geq \\ &\geq \max_{j, k \in N_a, j < k} v_{jk} (|y_j^* - y_k^*|) = \max_{j, k \in N_a, j < k} v_{jk} (|\tilde{y}_j - \tilde{y}_k|) = \\ &= \max_{j, k \in N_a, j < k} v_{jk} (|\tilde{x}_j - \tilde{x}_k| + |\tilde{y}_j - \tilde{y}_k|) = \max_{j, k \in N_a, j < k} v_{jk} d(\tilde{X}_j, \tilde{X}_k), \end{aligned}$$

так как $y_j^* = \tilde{y}_j, \tilde{x}_j = \tilde{x}_k$, для $\forall j, k \in N_a$ по построению.

3) Третье неравенство:

$$\max_{j \in N_a, k \notin N_a} v_{jk} d(X_j^*, X_k^*) \geq \max_{j \in N_a, k \notin N_a} v_{jk} d(\tilde{X}_j, X_k^*).$$

Это следует из того, что

$$\begin{aligned} \max_{j \in N_a, k \notin N_a} v_{jk} d(X_j^*, X_k^*) &= \max_{j \in N_a, k \notin N_a} v_{jk} (|x_j^* - x_k^*| + |y_j^* - y_k^*|) \geq \\ &\geq \max_{j \in N_a, k \notin N_a} v_{jk} (|\tilde{x}_j - x_k^*| + |y_j^* - y_k^*|) = \max_{j \in N_a, k \notin N_a} v_{jk} (|\tilde{x}_j - x_k^*| + \\ &\quad + |\tilde{y}_j - y_k^*|) = \max_{j \in N_a, k \notin N_a} v_{jk} d(\tilde{X}_j, X_k^*) \end{aligned}$$

и

$$|x_j^* - x_k^*| \geq |\tilde{x}_j - x_k^*|, \forall j \in N_a, \forall k \notin N_a.$$

Подставляя указанные три неравенства в формулу (*), получаем:

$$\max\left\{\max_{i \in I, j \in N_a} w_{ij}d(P_i, \tilde{X}_j); \max_{i \in I, j \notin N_a} w_{ij}d(P_i, X_j^*); \max_{j, k \in N_a, j < k} v_{jk}d(\tilde{X}_j, \tilde{X}_k); \right. \\ \left. \max_{j \in N_a, k \notin N_a} v_{jk}d(\tilde{X}_j, X_k^*); \max_{j, k \notin N_a} v_{jk}d(X_j^*, X_k^*)\right\} = f(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_t, X_{t+1}^*, \dots, X_n^*),$$

т.е.

$$f(X^*) \geq f(\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_t, X_{t+1}^*, \dots, X_n^*). \quad (**)$$

Поскольку X^* — оптимальное решение задачи (1)–(2), то в (**) возможно только равенство.

Таким образом получено решение $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_t, X_{t+1}^*, \dots, X_n^*$ задачи (1)–(2) с оптимальным значением целевой функции. В построенном решении $\tilde{x}'_j = A', j \in N_a$ и $x_k^* \geq A', k \notin N_a$, т.е. по оси ОХ все объекты расположены правее или на левой границе области \mathcal{F}' . Далее по полученному решению $\tilde{X}_1, \dots, \tilde{X}_t, X_{t+1}^*, \dots, X_n^*$ аналогично строим новые решения для множеств $\mathcal{F}_b, \mathcal{F}_c, \mathcal{F}_d$. В результате получим оптимальное решение \tilde{X} задачи (1)–(2) такое, что $\tilde{X}_j \in \mathcal{F}', j \in N$.

□

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Пример 1. Решение задачи для $n = 5$, $m = 9$, $\partial\mathcal{F}' \subseteq R$.

Объекты P_1, \dots, P_9 расположены в точках с координатами (21;67), (17;47), (44;10), (19;8), (45;7), (89;75), (44;5), (51;57), (94;52). Необходимо разместить X_1, \dots, X_5 . Удельные стоимости связи между объектами заданы в таблицах 3 и 4.

Таблица 3

Связи размещаемых объектов с фиксированными

w_{ij}	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9
X_1	1	4	86	21	28	67	32	17	37
X_2	43	9	48	7	84	6	30	91	37
X_3	77	33	70	84	72	31	17	33	47
X_4	25	82	28	48	15	87	29	77	97
X_5	49	88	82	3	14	15	50	3	59

Таблица 4

Связи размещаемых объектов между собой

v_{jk}	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
X_1	0	1	77	65	77
X_2	1	0	71	56	21
X_3	77	71	0	68	59
X_4	65	56	68	0	95
X_5	77	21	59	95	0

По заданным запрещенным зонам построены разрешенные области R_1, \dots, R_9 , координаты углов которых представлены в таблице 5.

Таблица 5

Координаты разрешенных областей

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	R_9
(a_k, c_k)	(49;4)	(86;44)	(12;83)	(86;61)	(0;32)	(43;79)	(61;91)	(92;81)	(7;32)
(b_k, d_k)	(70;7)	(98;55)	(36;94)	(91;77)	(7;89)	(46;85)	(88;98)	(95;83)	(70;60)

Решение задачи (1) приведено в таблице 6.

Объекты $X_1, X_2, X_3, X_5 \in \text{Int } F$, следовательно, условие (2) не выполнено.

Строим подмножество \mathcal{F}' . Оптимальные размещения объектов только по отношению к фиксированным представлены в таблице 7.

Таблица 6

Решение задачи без учета запрещенных зон

X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
(82,411; 18,337)	(51; 10,43)	(32,435; 23,398)	(68,485; 46,804)	(46,165; 28,007)

Таблица 7

Размещения объектов по отношению к фиксированным

X'_1	X'_2	X'_3	X'_4	X'_5
(44; 58,17)	(45; 36,12)	(28,942; 36,12)	(56,8; 58,489)	(49,184; 43,312)

Прямоугольник \mathcal{F}' имеет координаты $[(28, 942; 36, 12), (56, 8; 58, 489)]$. Отметим, что $\mathcal{F}' \subseteq R$, т.е. условия утверждения выполнены.

В модели (3)–(6) блок (3) заменяем на линейные ограничения, соответствующие принадлежности размещаемых объектов прямоугольнику \mathcal{F}' . Решение полученной задачи ЛП приведено в таблице 8.

Таблица 8

Оптимальное решение задачи

X_1^*	X_2^*	X_3^*	X_4^*	X_5^*
(44,789; 58,489)	(28,942; 36,12)	((28,942; 36,12)	(56,8; 58,489)	(38,052; 36,12)

Время вычисления составляет $t = 0,01$ сек., а при решении задачи (1)–(2) пакетом CPLEX $t = 0,11$ сек.