Серия «Математика»
2014. Т. 9. С. 3—9

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.716

Минимальные частичные ультраклоны на двухэлементном множестве

С. А. Бадмаев
Бурятский государственный университет

И. К. Шаранхаев
Бурятский государственный университет

Аннотация. Множество функций, определенных на конечном множестве A и принимающих в качестве значений подмножества множества A, является естественным обобщением множества конечнозначных функций на A (функций k-значной логики). Такие «обобщенные» функции, которые в последнее время принято называть мультифункциями, часто рассматривают как не всюду определенные функции, т. е. функции, определенные не на всех наборах. Для этого в мультифункциях неопределенности можно понимать как некоторые подмножества основного множества A. В зависимости от вида мультифункций и соответствующей им суперпозиции возникают частичные функции, гиперфункции, ультрафункции, частичные гиперфункции, частичные ультрафункции на A.

В теории дискретных функций классической является задача описания решетки клонов – множеств функций, замкнутых относительно операции суперпозиции и содержащих все функции-проекции. Полное описание такой решетки получено только для булевых функций. Это было сделано Эмилем Постом в 1921 году. Таким образом, для других дискретных функций данная проблема остается открытой уже более 90 лет. В связи с трудностью решения этой задачи изучается не вся решетка целиком, а только ее отдельные фрагменты, например, минимальные и максимальные элементы, различные интервалы. В частности, отметим, что описания всех минимальных клонов известны для булевых функций, функций 3-значной логики, частичных функций на двухэлементном и трехэлементном множествах, гиперфункций и частичных гиперфункций на двухэлементном множестве.

В настоящей работе рассматриваются ультрафункции и частичные ультрафункции на двухэлементном множестве. Дано описание всех минимальных клонов для этих классов мультифункций.

Ключевые слова: минимальный клон; частичный ультраклон; мультифункция; частичная ультрафункция; суперпозиция.

1. Основные понятия и определения

Пусть $|A|$ — мощность множества A, 2^A — множество всех подмножеств A, $E_2 = \{0,1\}$. Определим следующие множества функций:

$P_{2,n}^{\overline{*}} = \{f | f : E_2^n \to 2^{E_2}\}, P_2^{\overline{*}} = \bigcup\limits_n P_{2,n}^{\overline{*}}$,

$P_{2,n}^{-} = \{f | f : E_2^n \to 2^{E_2} \setminus \{\varnothing\}\}, P_2^{-} = \bigcup\limits_n P_{2,n}^{-}$,

$P_{2,n}^{*} = \{f | f \in P_{2,n}^{\overline{*}}$ и $|f(\tilde{\alpha})| \leq 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in E_2^n\}, P_2^{*} = \bigcup\limits_n P_{2,n}^{*}$,

$P_{2,n} = \{f | f \in P_{2,n}^{\overline{*}}$ и $|f(\tilde{\alpha})| = 1$ для всех $\tilde{\alpha} \in E_2^n\}, P_2 = \bigcup\limits_n P_{2,n}$.

Функции из P_2 называют булевыми функциями, из P_2^* — частичными булевыми функциями, из P_2^- – гиперфункциями или ультрафункциями на E_2 (различие в выборе суперпозиции), из $P_2^{\overline{*}}$ – мультифункциями на E_2.

Для того, чтобы суперпозиция $f(f_1(x_1,\ldots,x_m),\ldots,f_n(x_1,\ldots,x_m))$ определяла некоторую мультифункцию $g(x_1,\ldots,x_m)$, следуя [3], определим значения мультифункции на наборах из подмножеств множества E_2.

Если $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) \in E_2^m$, то по определению

$$g(\alpha_1,\ldots,\alpha_m) = \begin{cases} \bigcap\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)} f(\beta_1,\ldots,\beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup\limits_{\beta_i \in f_i(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)} f(\beta_1,\ldots,\beta_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

На наборах, содержащих $\varnothing$, мультифункция принимает значение $\varnothing$.

Это определение позволяет вычислить значение мультифункции $f(x_1,\ldots,x_n)$ на любом наборе $(\sigma_1,\ldots,\sigma_n) \in (2^{E_2})^n$.

Если мультифункции на E_2 (функции из P_2^-) рассматриваются с данной суперпозицией, то их называют частичными ультрафункциями на E_2 (ультрафункциями на E_2).

Для $f \in P_2^{\overline{*}}$ положим

$D^*(f) = \{\tilde{\alpha} \in E_2^n | f(\tilde{\alpha}) = \varnothing\}$, $D(f) = E_2^n \setminus D^*(f)$.

Пусть $D \subseteq E_2^n$.

Частичной проекцией называется мультифункция $e_{i,D}^n$ такая, что

$$e_{i,D}^n(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) = \begin{cases} \{\alpha_i\}, & \text{если } (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in D; \\ \varnothing, & \text{иначе.} \end{cases}$$

При $D = E_2^n$ частичная проекция называется проекцией и обозначается e_i^n.

В дальнейшем, если это не вызывает недоразумений, мультифункцию будем называть просто функцией.

Для упрощения записи договоримся использовать следующую кодировку: $\varnothing \leftrightarrow *$, $\{0\} \leftrightarrow 0$, $\{1\} \leftrightarrow 1$, $\{0,1\} \leftrightarrow -$.

Функцию из $P_2^{\overline{*}}$ будем задавать ее значениями на двоичных наборах, причем вектор значений функции будем записывать в виде строки или столбца, а двоичные наборы будем считать заданными в соответствии с натуральным порядком. Например, $f = (0{*}{-}1)$ означает, что $f(00) = 0$, $f(01) = *$, $f(10) = -$, $f(11) = 1$. Также рассматриваются нульместные функции, которые будем называть константными и обозначать 0, 1, $*$ и $(-)$.

Клоном (частичным клоном, ультраклоном, частичным ультраклоном) на E_2 называется множество булевых функций (частичных булевых функций, ультрафункций на E_2, частичных ультрафункций на E_2, соответственно), замкнутое относительно определенной выше суперпозиции и содержащее все проекции.

Очевидно, что множество всех проекций образует клон на E_2, обозначим его J_{E_2}.

Клон (частичный клон, ультраклон, частичный ультраклон) K на E_2 называется минимальным, если для любого клона (частичного клона, ультраклона, частичного ультраклона, соответственно) K_1 на E_2 из того, что $J_{E_2} \subseteq K_1 \subseteq K$ и $K_1 \neq K$ следует, что $K_1 = J_{E_2}$.

В теории дискретных функций классической является задача описания решетки клонов. Полное описание такой решетки получено только для булевых функций. Это было сделано Эмилем Постом в 1921 году [10; 11]. Таким образом, для других дискретных функций данная проблема остается открытой уже более 90 лет. В связи с трудностью решения этой задачи изучается не вся решетка целиком, а только ее отдельные фрагменты, например, минимальные и максимальные элементы, различные интервалы (см., например, [1; 2; 3; 4; 5]). Минимальные клоны для различных классов дискретных функций изучаются в [6; 7; 8; 9; 12].

В настоящей работе описаны все минимальные ультраклоны и частичные ультраклоны на двухэлементном множестве.

2. Минимальные ультраклоны

В этом разделе дано описание всех минимальных ультраклонов на множестве E_2.

Лемма 1. *1) Любой минимальный клон на E_2 является минимальным ультраклоном на E_2;*

2) Функция $(-)$ порождает минимальный ультраклон на E_2.

Доказательство. Первая часть очевидна в силу вложенности решетки клонов на E_2 в решетку ультраклонов на E_2, вторая — так как функция $(-)$ является константной. □

Теорема 1. *Существует ровно 8 минимальных ультраклонов на E_2.*

Доказательство. Известно [10; 11], что существует ровно 7 минимальных клонов на E_2, которые порождаются следующими булевыми функциями: 0, 1, $\bar{x}$, $x \cdot y$, $x \vee y$, $x \oplus y \oplus z$, $xy \vee xz \vee yz$. Из леммы 1 следует, что существует 8 минимальных ультраклонов на E_2. Докажем, что других минимальных ультраклонов на E_2 не существует.

Предположим, что некоторая ультрафункция $f(x_1, \ldots, x_n)$ порождает минимальный ультраклон на E_2, отличный от указанных выше. Сначала покажем, что $f(x, \ldots, x) = x$.

Пусть $f(x, \ldots, x) = g(x)$. Тогда $g(x)$ сразу не может быть 0, 1, $(-)$, $\bar{x}$ в силу леммы 1. Осталось проверить следующие варианты: $(0-)$, (-0), $(1-)$, (-1).

Если $g(x) = (-0)$, то $h(x) = g(g(x)) = (0-)$ и $h(h(x)) = 0$, что противоречит минимальности ультраклона.

Аналогичная ситуация, если $g(x) = (1-)$, то $h(x) = g(g(x)) = (-1)$ и $h(h(x)) = 1$. Таким образом, $f(x, \ldots, x) = x$.

Так как f не является унарной и булевой функцией, отождествлением переменных у f можем получить $g_1(x, y)$, которая может быть равна одной из следующих функций: $(0--1)$, $(0-01)$, $(00-1)$, $(0-11)$, $(01-1)$. Здесь достаточно рассмотреть первый, второй и четвертый варианты.

Если $g_1(x, y) = (00-1)$, тогда $g_1(g_1(x, y), y) = x \cdot y$, что противоречит минимальности ультраклона. Аналогичная ситуация в двух других вариантах. Если $g_1(x, y) = (0-11)$, тогда $g_1(g_1(x, y), y) = x \vee y$, а если $g_1(x, y) = (0--1)$, тогда $h_1(x, y, z) = g_1(g_1(x, y), z)$ и $h_1(x, y, h_1(x, y, z)) = xy \vee xz \vee yz$.

Таким образом, функция f не может порождать минимальный ультраклон. Теорема доказана. □

3. Минимальные частичные ультраклоны

В этом разделе дано описание всех минимальных частичных ультраклонов на множестве E_2.

Лемма 2. *Любой минимальный ультраклон на E_2 является минимальным частичным ультраклоном на E_2.*

Доказательство. Очевидно в силу вложенности решетки ультраклонов на E_2 в решетку частичных ультраклонов на E_2. □

Лемма 3. *Пусть K – произвольный частичный ультраклон на E_2. Если $f(x_1, \ldots, x_n) \in K$, то $e^n_{i,D(f)} \in K$.*

Доказательство. Следует из того, что выполняется $e^n_{i,D(f)} = e^2_2(f, e^n_i)$. □

Теорема 2. *Если M — минимальный частичный ультраклон на E_2, тогда либо M – минимальный ультраклон на E_2, либо M — минимальный частичный клон на E_2, порожденный одной из следующих функций $e^1_{1,\varnothing}$, $e^1_{1,\{0\}}$, $e^1_{1,\{1\}}$, $e^2_{1,\{(00),(11)\}}$.*

Доказательство. Следует из лемм 2, 3 и описания минимальных частичных клонов на E_2 в [6; 7]. □

Следствие 1. *Существует ровно 12 минимальных частичных ультраклонов на E_2.*

Список литературы

1. Алексеев В. Б. О некоторых замкнутых классах в частичной двузначной логике / В. Б. Алексеев, А. А. Вороненко // Дискрет. математика. — 1994. – Т. 6, вып. 4. – С. 58–79.
2. Пантелеев В. И. Критерий полноты для доопределяемых булевых функций / В. И. Пантелеев // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. – 2009. – №2 (68). – С. 60–79.
3. Пантелеев В. И. О двух максимальных мультиклонах и частичных ультраклонах / В. И. Пантелеев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 46–53.
4. Тарасов В. В. Критерий полноты для не всюду определенных функций алгебры логики / В. В. Тарасов // Проблемы кибернетики. – М. : Наука, 1975. – Вып. 30. – С. 319–325.
5. Фрейвалд Р. В. Критерий полноты для частичных функций алгебры логики и многозначной логики / Р. В. Фрейвалд // Докл. АН СССР. – 1966. – Т. 167. – С. 1249–1250.
6. Börner F. Minimal partial clones / F. Börner, L. Haddad, R. Pöschel // Bulletin of the Austral. Math. Soc. – 1991. – Vol. 44, N 3. – P. 405–415.
7. Börner F. A note on minimal partial clones / F. Börner, L. Haddad, R. Pöschel // Proceedings of 21th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL). – 1991. – P. 262–267.
8. Csákány B. All minimal clones on the three-element set / B. Csákány // Acta cybernetica. – 1983. – N 6. – P. 227–238.
9. Pantovic J. Minimal partial hyperclones on a two-element set / J. Pantovic, G. Vojvodic // Proceedings of 34th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL). – 2004. – P. 115–119.
10. Post E. L. Introduction to a general theory of elementary propositions / E. L. Post // American Journal of Math. – 1921. – Vol. 43.
11. Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic / E. L. Post // Annals of Math. Studies. – Princeton : Univer. Press, 1941. – Vol. 5. – 122 p.
12. Rosenberg I. G. Minimal clones I: the five types / I. G. Rosenberg // In Lectures in Universal Algebra 43, Colloq.Math. Soc. J. Bolyai. – 1983. – P. 405–427.

Бадмаев Сергей Александрович, аспирант, Институт математики и информатики, Бурятский государственный университет, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а тел.: (3012)219757
(e-mail: `badmaevsa@mail.ru`)

Шаранхаев Иван Константинович, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт математики и информатики, Бурятский государственный университет, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а тел.: (3012) 219757 (e-mail: `goran5@mail.ru`)

S. A. Badmaev, I. K. Sharankhaev

Minimal Partial Ultraclones on a Two-Element Set

Abstract. Set of functions from a finite set A to set of all subsets of A is a natural generalization of the set of many-valued functions on A (k-valued logic functions). These generalized functions, which are called multifunctions, often are regarded as incompletely defined functions. Partial functions, hyperfunctions, ultrafunctions, partial hyperfunctions, partial ultrafunctions on A are arised depending on the type of multifunctions and superposition.

In the theory of discrete functions the classical problem is description of lattice of clones - sets of functions that are closed with respect to superposition and contain all projections. Full description of a lattice is obtained only for Boolean functions by Emil Post in 1921. Thus this problem remains open more than 90 years for other discrete functions. Because of difficulty of this problem lattice fragments are studied, for example, the minimum and maximum elements, different intervals. In particular, we note that the descriptions of all minimal clones are known for Boolean functions, 3-valued logic functions, partial functions on two-element and three-element sets, hyperfunctions and partial hyperfunctions on a two-element set.

In this paper we consider ultrafunctions and partial ultrafunctions on a two-element set. A description of all minimal clones for these classes of multifunctions is got.

Keywords: minimal clone; partial ultraclone; multifunction; partial ultrafunction; superposition.

References

1. Alekseev V.B., Voronenko A.A. On Some Closed Sets in Partial Two-Valued Logic. *Discrete Mathematics and Applications*, 1994, 4:5, pp. 401-419.
2. Panteleyev V.I. Completeness Criterion for Incompletely Defined Boolean Functions (in Russian). *Vestnik Samar. Gos. Univ. Est.-Naush. Ser.*, 2009, vol. 2, no. 68, pp. 60-79.
3. Panteleyev V.I. On Two Maximal Multiclones and Partial Ultraclones (in Russian). *Izvestiya Irk. Gos. Univ. Ser. Matematika*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 46-53.
4. Tarasov V.V. Completeness Criterion for Partial Logic Functions (in Russian). *Problemy Kibernetiki*, Moscow, Nauka, 1975, vol. 30, pp. 319-325.
5. Freivald R.V. Completeness Criterion for Partial Functions of Algebra Logic and Many-valued Logics (in Russian). *Dokl. Akad. Nauk of USSR*, 1967, vol. 167, pp. 1249-1250.
6. Börner F., Haddad L., Pöschel R. Minimal Partial Clones. *Bulletin of the Austral. Math. Soc.*, 1991, vol. 44, no. 3, pp. 405-415.

7. Börner F., Haddad L., Pöschel R. A Note on Minimal Partial Clones. *Proceedings of 21th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic* (ISMVL), 1991, pp. 262-267.
8. Csákány B. All Minimal Clones on the Three-Element Set. *Acta cybernetica*, 1983, no. 6, pp. 227-238.
9. Pantovic J., Vojvodic G. Minimal Partial Hyperclones on a Two-Element Set. *Proceedings of 34th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic* (ISMVL), 2004, pp. 115-119.
10. Post E. L. Introduction to a General Theory of Elementary Propositions. *American Journal of Math.*, 1921, vol. 43.
11. Post E. L. Two-Valued Iterative Systems of Mathematical Logic. *Annals of Math. Studies.* Princeton, Univer. Press, 1941, vol. 5, 122 p.
12. Rosenberg I. G. Minimal Clones I: the Five Types. *In Lectures in Universal Algebra 43, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai*, 1983, pp. 405-427.

Badmaev Sergey Alexandrovich, Postgraduate, Buryat State University, 24a, Smolin St., Ulan-Ude, 670000 tel.: (3012)219757
(e-mail: badmaevsa@mail.ru)

Sharankhaev Ivan Konstantinovich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Buryat State University, 24a, Smolin St., Ulan-Ude, 670000 tel.: (3012)219757 (e-mail: goran5@mail.ru)