Серия «Математика»
2014. Т. 9. С. 49—60

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.946

Многомерные точные решения одного класса нелинейных эллиптических систем *

А. А. Косов
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Э. И. Семенов
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. Для моделирования плазмы применяют обычно уравнения Больцмана, Власова и другие аналогичные уравнения и системы уравнений с частными производными. Для них требуется отыскивать решения, удовлетворяющие заданным начальным и краевым условиям, что представляет собой весьма трудноразрешимую задачу. Поэтому обычно проводят редукцию к более простой задаче, описываемой, например, обыкновенными дифференциальными уравнениями. На этом пути группой французских математиков была предложена модель магнитной изоляции электронов в плоском вакуумном диоде, описываемая системой двух нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Для этой модели ее разработчики рассматривали задачу нахождения всех ее точных решений, т. е. полного интегрирования. В данной статье мы рассматриваем класс систем эллиптического типа с многомерным оператором Лапласа, включающий обобщение модели вакуумного диода, изучавшейся французскими математиками. Такого рода системы встречаются также в моделях химической технологии, математической биологии и других прикладных областях. Установлено, что решениями рассматриваемого класса систем двух нелинейных уравнений эллиптического типа могут быть только решения линейного уравнения Гельмгольца. Показано, что свойства решений уравнения Гельмгольца могут наследоваться решениями изучаемой нелинейной системы. Предложен способ конструирования радиально симметричных точных решений. Рассмотрен целый ряд примеров систем с управлением, для которых найдены параметрические семейства точных решений, в том числе анизотропных по пространственным переменным, заданных элементарными или гармоническими функциями. В том числе указаны примеры глобальных решений, которые определены на всем пространстве. Полученные в статье явные выражения точных решений могут иметь не только теоретическое, но и прикладное значение, поскольку их можно использовать для тестирования, настройки и адаптации численных методов и алгоритмов построения приближенных решений краевых задач для обобщенной модели магнитной изоляции.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, нелинейные системы, точные решения, модель магнитной изоляции.

1. Введение

Для моделирования плазмы и движения заряженных частиц в магнитном поле применяют обычно уравнения Больцмана, Власова и другие аналогичные уравнения и системы уравнений с частными производными [14; 2]. Для них требуется отыскивать решения, удовлетворяющие заданным начальным и краевым условиям, что представляет собой весьма трудноразрешимую задачу. Поэтому обычно стараются провести редукцию к более простой задаче, описываемой, например, обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). На этом пути группой французских математиков была предложена модель магнитной изоляции электронов в плоском вакуумном диоде, описываемая системой двух нелинейных ОДУ второго порядка [12]. Для этой модели ее разработчики рассматривали задачу нахождения всех ее точных решений, т. е. полного интегрирования. Модель оказалась интересным объектом для исследования, ее свойства изучались различными методами в ряде работ [12; 13; 9; 8; 5].

В [4] было предложено рассмотреть обобщенную модель магнитной изоляции с заменой производных второго порядка трехмерным оператором Лапласа, являющуюся дальнейшим развитием модели вакуумного диода [12]. Заметим, что правые части исходной [12] и обобщенной [4] моделей идентичны и зависят от разности квадратов искомых функций. Системы такого рода, как указано в [11], часто встречаются в теории тепло- и массопереноса реагирующих систем, в теории химических реакторов, теории горения и математической биологии. В данной статье мы рассматриваем в качестве объекта исследования такую систему эллиптического типа с нелинейностью, зависящей от разности квадратов искомых функций, и основной целью ставим задачу построения ее точных решений. Отметим, что в работах ведущих специалистов указывалось [6; 7; 3; 1] на важную роль построения точных решений нелинейных систем уравнений в частных производных. Перейдем к описанию точной постановки задачи.

2. Постановка задачи и основные уравнения

В [11] рассмотрена система нелинейных уравнений с частными производными в двумерном координатном пространстве

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-5007.2014.9) и поддержке СО РАН (междисциплинарный проект № 80).

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}=\psi F(\psi^2-a^2)+aG(\psi^2-a^2), \\ \dfrac{\partial^2 a}{\partial x_1^2}+\dfrac{\partial^2 a}{\partial x_2^2}=aF(\psi^2-a^2)+\psi G(\psi^2-a^2), \end{array}\right. \tag{2.1}$$

которая встречается при моделировании стационарных процессов теории тепло- и массопереноса. Там же предлагается искать точное решение системы (2.1) в виде

$$\begin{array}{c} \psi(x_1,x_2)=r(z)\,\mathrm{ch}\,(\theta(z)+C_1x_2+C_2)\,, \\ a(x_1,x_2)=r(z)\,\mathrm{sh}\,(\theta(z)+C_1x_2+C_2)\,, \end{array} \tag{2.2}$$

где $z=k_1x_1+k_2x_2$, k_1, k_2, C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функции $r(z)$, $\theta(z)$ должны определяться из системы двух нелинейных ОДУ второго порядка. Отметим, что если функции $F(\psi^2-a^2)$, $G(\psi^2-a^2)$ в системе (2.1) представимы в виде

$$F(\psi^2-a^2)=\frac{j}{\sqrt{\psi^2-a^2-1}},\ j=\mathrm{const},\ G(\psi^2-a^2)\equiv 0,$$

то уравнения (2.1) являются обобщением модели магнитной изоляции вакуумного диода [12; 4].

Цель данной статьи — построение точных решений системы уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\psi=\psi F(\mathbf{x},\psi^2-a^2), \\ \Delta a=aF(\mathbf{x},\psi^2-a^2), \end{array}\right. \tag{2.3}$$

где $\psi\stackrel{\triangle}{=}\psi(\mathbf{x})$, $a\stackrel{\triangle}{=}a(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, Δ – n -мерный оператор Лапласа.

В отличие от (2.1), здесь размерность вектора пространственных переменных произвольна и может быть больше 2, от этого вектора может явно зависеть нелинейность $F(\mathbf{x},W)$, однако вторая нелинейность считается тождественным нулем. Заметим, что класс систем (2.3), очевидно, включает обобщенную модель магнитной изоляции.

Опираясь на структуру (2.2), точные решения системы (2.3) будем отыскивать в виде

$$\left\{\begin{array}{l} \psi(\mathbf{x})=f\,\mathrm{ch}(\omega), \\ a(\mathbf{x})=f\,\mathrm{sh}(\omega), \end{array}\right. \tag{2.4}$$

где $f\stackrel{\triangle}{=}f(\mathbf{x})$, $\omega\stackrel{\triangle}{=}\omega(\mathbf{x})$ – пока произвольные дважды дифференцируемые по переменным $(x_1,\ldots,x_n)$ функции. После подстановки анзатца (2.4) в уравнения (2.3) соответственно получим

$$\left\{\begin{array}{l} A\,\mathrm{ch}(\omega)+B\,\mathrm{sh}(\omega)=0, \\ A\,\mathrm{sh}(\omega)+B\,\mathrm{ch}(\omega)=0, \end{array}\right. \tag{2.5}$$

где приняты обозначения

$$A \stackrel{\triangle}{=} \Delta f + f|\nabla\omega|^2 - fF(\mathbf{x}, f^2),\ B \stackrel{\triangle}{=} f\Delta\omega + 2\nabla f \cdot \nabla\omega.$$

Здесь и далее $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ — градиент, символ $\cdot$ означает скалярное произведение. Относительно переменных A и B система алгебраических уравнений (2.5) является линейной и однородной, её определитель равен единице, поэтому она имеет только тривиальное решение $A = 0$, $B = 0$. Следовательно, с учетом введенных обозначений, система (2.5) сводится к следующим двум нелинейным уравнениям в частных производных

$$\Delta f + f|\nabla\omega|^2 = fF(\mathbf{x}, f^2), \tag{2.6}$$

$$f\Delta\omega + 2\nabla f \cdot \nabla\omega = 0. \tag{2.7}$$

Уравнения (2.6), (2.7) будем называть разрешающими для системы (2.3) в виде анзатца (2.4).

С общих позиций система разрешающих уравнений нисколько не проще исходной системы (2.3), однако, как показано в следующих разделах, такая форма представления задачи может быть полезна для отыскания точных решений. Приведем теперь еще одну форму представления изучаемой системы, полезную для выявления качественных свойств решений.

Пусть функции $\psi = \bar\psi(\mathbf{x})$ и $a = \bar a(\mathbf{x})$ являются решениями системы (2.3), тогда из (2.3) получаем $\Delta\bar\psi(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})\bar\psi(\mathbf{x})$ и $\Delta\bar a(\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x})\bar a(\mathbf{x})$, где $\lambda(\mathbf{x}) = F\left(\mathbf{x}, \bar\psi^2(\mathbf{x}) - \bar a^2(\mathbf{x})\right)$. Тем самым доказано следующее

Утверждение 1. *Решениями $\psi = \bar\psi(\mathbf{x})$, $a = \bar a(\mathbf{x})$ системы (2.3) могут быть только решения линейного однородного уравнения Гельмгольца с переменным коэффициентом*

$$\Delta u = \lambda(\mathbf{x})u, \tag{2.8}$$

где $\lambda(\mathbf{x})$ — некоторая функция, своя для каждого решения $\left(\bar\psi(\mathbf{x}), \bar a(\mathbf{x})\right)$.

Заметим, что из этого утверждения вытекает, что решения нашей системы (2.3) наследуют свойства решений уравнения Гельмгольца. В частности, для системы (2.3) имеет место принцип максимального значения [10] в следующей форме.

Утверждение 2. *Если функция $F(\mathbf{x}, W)$ принимает только положительные значения, то обе компоненты любого решения $\bar\psi(\mathbf{x})$, $\bar a(\mathbf{x})$ системы (2.3), определенного внутри некоторой области $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ с границей $\partial\mathcal{D}$, не могут достигать во внутренних точках области $\mathcal{D}$ максимальных положительных и минимальных отрицательных значений.*

Так как для обобщенной модели магнитной изоляции вакуумного диода [12; 4] функция $F(\mathbf{x}, W) \equiv \dfrac{j}{\sqrt{W-1}}$, $j > 0$ очевидно, всюду в области определения положительна, то принцип максимального значения справедлив для названной модели.

3. Точные радиально-симметричные решения системы разрешающих уравнений

В этом разделе мы займемся построением точных радиально-симметричных решений уравнений (2.6), (2.7). Будем искать решения системы (2.6), (2.7) в виде

$$f(\mathbf{x}) \stackrel{\triangle}{=} f(r), \;\; \omega(\mathbf{x}) \stackrel{\triangle}{=} \omega(r), \;\; \text{где} \;\; r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \;\; n \geq 2.$$

При этом будем полагать, что для нелинейности $F(\mathbf{x}, f^2)$ выполнено тождество $F(\mathbf{x}, f^2) \equiv F(r, f^2)$. Простыми вычислениями легко показать, что имеют место равенства

$$\Delta f = f'' + \frac{n-1}{r} f', \; \nabla f \cdot \nabla \omega = f' \omega', \; |\nabla \omega|^2 = \omega'^2, \; \Delta \omega = \omega'' + \frac{n-1}{r} \omega',$$

где штрих означает производную по аргументу r. С учетом последних соотношений уравнения в частных производных (2.6), (2.7) преобразуются к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка

$$f'' + \frac{n-1}{r} f' + f \omega'^2 = f F(r, f^2), \tag{3.1}$$

$$f \omega'' + \left(\frac{n-1}{r} f + 2f' \right) \omega' = 0. \tag{3.2}$$

Интегрируя ОДУ (3.2) находим

$$\omega'(r) = c_1 r^{1-n} f^{-2}(r), \tag{3.3}$$

где $c_1 > 0$ — произвольная постоянная. Подставляя выражение (3.3) в (3.1) получим нелинейное ОДУ для функции $f(r)$

$$f'' + (n-1) r^{-1} f' + c_1^2 r^{2-2n} f^{-3} = f F(r, f^2). \tag{3.4}$$

Таким образом, задача построения точных радиально-симметричных решений уравнений (2.6), (2.7) свелась к интегрированию нелинейного ОДУ второго порядка (3.4) для функции $f(r)$, а $\omega(r)$ находится по формуле (3.3) однократным интегрированием по переменной r. При этом функция $F(r, f^2)$ является заданной и в ряде случаев уравнение (3.4) допускает решения в элементарных или специальных функциях.

Пример 1. Пусть $n > 2$ и $F(r,f^2) \equiv f^{\frac{2(n-3)}{2-n}}$, тогда при $c_1 = 1$, нелинейное ОДУ (3.4) имеет точное решение $f(r) = r^{2-n}$, для которого из формулы (3.3) имеем $\omega(r) = \dfrac{r^{n-2}}{n-2} + c_0$, $c_0 = const$. Возвращаясь к исходной системе, находим, что система нелинейных эллиптических уравнений

$$\Delta\psi = \psi\left(\psi^2 - a^2\right)^{\frac{(n-3)}{2-n}}, \quad \Delta a = a\left(\psi^2 - a^2\right)^{\frac{(n-3)}{2-n}}, \tag{3.5}$$

имеет точное радиально-симметричное решение вида

$$\psi(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{2-n}{2}} \operatorname{ch}\left(\frac{1}{n-2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{n-2}{2}} + c_0\right),$$

$$a(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{2-n}{2}} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{n-2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{n-2}{2}} + c_0\right).$$

Система (3.5) любопытна тем, что в случае $n = 3$ она расщепляется и становится линейной.

Пример 2. Система нелинейных эллиптических уравнений

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} = \frac{\psi e^{-2\sqrt{\psi^2-a^2}}}{\left(\psi^2 - a^2\right)^2}, \quad \frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} = \frac{a e^{-2\sqrt{\psi^2-a^2}}}{\left(\psi^2 - a^2\right)^2},$$

обладает точным радиально-симметричным решением вида

$$\psi\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{2}\ln\left(x_1^2 + x_2^2\right)\operatorname{ch}\left(c_0 - \frac{2}{\ln\left(x_1^2 + x_2^2\right)}\right),$$

$$a\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{2}\ln\left(x_1^2 + x_2^2\right)\operatorname{sh}\left(c_0 - \frac{2}{\ln\left(x_1^2 + x_2^2\right)}\right).$$

Теперь, приведем пример неавтономной системы (2.3), для которой построим радиально-симметричное решение в явном виде.

Пример 3. Пусть $n = 3$ и $F(r,f^2) \equiv r^{-4}f^{-4}$, тогда при $c_1 = 1$, нелинейное ОДУ (3.4) имеет точное решение $f(r) = r^{-1}$, для которого из формулы (3.3) находим $\omega(r) = r + c_0$, $c_0 = const$. Возвращаясь к исходной системе, получим, что система нелинейных эллиптических уравнений

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_3^2} = \frac{\psi\left(\psi^2 - a^2\right)^{-2}}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial x_3^2} = \frac{a\left(\psi^2 - a^2\right)^{-2}}{\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)^2},$$

имеет точное радиально-симметричное решение вида

$$\psi\left(x_1, x_2, x_3\right) = \frac{\operatorname{ch}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + c_0\right)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

$$a\left(x_1, x_2, x_3\right) = \frac{\operatorname{sh}\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + c_0\right)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}.$$

Отметим, что если в уравнении (3.4) положить $F(r, f^2) \equiv \dfrac{1}{\sqrt{f^2 - 1}}$, то исходная система (2.3) представляет собой обобщенную математическую модель магнитной изоляции вакуумного диода [12; 4].

Если $F(r, f^2) \equiv r^{2-2n}\Phi(f^2)$, $n \geq 2$, то уравнение (3.4) может быть приведено к автономному виду.

Пусть $n = 2$, тогда для $f(r) \equiv f(\xi)$, $\xi = \ln r$, уравнение (3.4) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 f}{d\xi^2} = f\Phi(f^2) - c_1^2 f^{-3}. \tag{3.6}$$

Уравнение (3.6) сводится к квадратуре

$$\int \frac{|f| df}{\sqrt{c_1^2 + c_2 f^2 + 2f^2 Q(f)}} = \xi + c_3, \tag{3.7}$$

где $Q(f) = \displaystyle\int f\Phi(f^2)df$, $c_1 > 0$, c_2, c_3 — произвольные постоянные.

Пусть теперь $n > 2$, тогда для $f(r) \equiv f(\theta)$, $\theta = \dfrac{r^{2-n}}{2-n}$, уравнение (3.4) преобразуется к виду

$$\frac{d^2 f}{d\theta^2} = f\Phi(f^2) - c_1^2 f^{-3}.$$

Это уравнение аналогично уравнению (3.6), поэтому оно также приводится к квадратуре (3.7).

4. Нелинейные системы с управлением

Рассмотрим более подробно систему (2.3). Функция $F(\mathbf{x}, W)$ в ней обычно отражает особенности моделируемого процесса, специфику химической технологии и т. п. Эта функция в некоторых случаях может целенаправленно изменяться ради обеспечения желаемого хода процесса, т. е. реализации некоторого точного решения системы. Будем считать, что такие целенаправленные изменения осуществляются посредством аддитивного или мультипликативного управления. Соответственно этим двум типам управления система принимает вид

$$\begin{cases} \Delta\psi = \psi\left(\tilde{F}(\mathbf{x}, \psi^2 - a^2) + U_a(\mathbf{x})\right), \\ \Delta a = a\left(\tilde{F}(\mathbf{x}, \psi^2 - a^2) + U_a(\mathbf{x})\right), \end{cases} \tag{4.1}$$

или

$$\begin{cases} \Delta\psi = \psi\dfrac{U_m(\mathbf{x})}{\Phi(\mathbf{x}, \psi^2 - a^2)}, \\ \Delta a = a\dfrac{U_m(\mathbf{x})}{\Phi(\mathbf{x}, \psi^2 - a^2)}, \end{cases} \tag{4.2}$$

В уравнениях (4.1), (4.2) функции $\tilde{F}(\mathbf{x}, \psi^2 - a^2)$ и $\Phi(\mathbf{x}, \psi^2 - a^2)$ считаются заданными, а аддитивное $U_a(\mathbf{x})$ и мультипликативное $U_m(\mathbf{x})$ управления можно выбирать. Различный выбор законов управления, очевидно, влияет на множества решений систем (4.1) и (4.2). Дадим описание семейства функций $\psi(\mathbf{x})$, $a(\mathbf{x})$, которые гарантированно могут быть реализованы как точные решения систем (4.1) и (4.2) за счет выбора управления и укажем соответствующие каждому такому решению законы $U_a(\mathbf{x})$ и $U_m(\mathbf{x})$.

Теорема 1. *Пусть пара гармонических функций $z_\alpha(\mathbf{x})$ и $z_\beta(\mathbf{x})$ имеет ортогональные градиенты, т.е. $\nabla z_\alpha(\mathbf{x}) \cdot \nabla z_\beta(\mathbf{x}) \equiv 0$. Тогда пара функций*

$$\psi(\mathbf{x}) = z_\alpha(\mathbf{x})\operatorname{ch} z_\beta(\mathbf{x}), \quad a(\mathbf{x}) = z_\alpha(\mathbf{x})\operatorname{sh} z_\beta(\mathbf{x}), \tag{4.3}$$

является точным решением систем (4.1) и (4.2) при следующем выборе управлений

$$U_a(\mathbf{x}) = |\nabla z_\beta(\mathbf{x})|^2 - \tilde{F}(\mathbf{x}, z_\alpha^2(\mathbf{x})), \tag{4.4}$$

$$U_m(\mathbf{x}) = |\nabla z_\beta(\mathbf{x})|^2 \Phi(\mathbf{x}, z_\alpha^2(\mathbf{x})). \tag{4.5}$$

Доказательство. Рассмотрим систему (4.1) с аддитивным управлением $U_a(\mathbf{x})$. В этом случае система разрешающих уравнений (2.6), (2.7) примет вид

$$\Delta f + f|\nabla\omega|^2 = f\left(\tilde{F}(\mathbf{x}, f^2) + U_a(\mathbf{x})\right)$$

$$f\Delta\omega + 2\nabla f \cdot \nabla\omega = 0.$$

или

$$\Delta z_\alpha(\mathbf{x}) + z_\alpha(\mathbf{x})|\nabla z_\beta(\mathbf{x})|^2 = z_\alpha(\mathbf{x})\left(\tilde{F}(\mathbf{x}, f^2) + U_a(\mathbf{x})\right). \tag{4.6}$$

$$z_\alpha \Delta z_\beta(\mathbf{x}) + 2\nabla z_\alpha(\mathbf{x}) \cdot \nabla z_\beta(\mathbf{x}) = 0. \tag{4.7}$$

Здесь мы учли тот факт, что $f(\mathbf{x}) = z_\alpha(\mathbf{x})$ и $\omega(\mathbf{x}) = z_\beta(\mathbf{x})$. Функции $z_\alpha(\mathbf{x})$ и $z_\beta(\mathbf{x})$ являются гармоническими, имеют ортогональные градиенты, поэтому (4.7) тождественно выполняется, а из (4.6) получаем (4.4). Случай мультипликативного управления рассматривается аналогично и приводит к (4.5). Теорема доказана. □

Замечание 1. В случае $n = 2$ функции $z_\alpha(x_1, x_2)$, $z_\beta(x_1, x_2)$ фигурирующие в условиях теоремы 1 можно выбрать сопряженными гармоническими, для которых условие ортогональности их градиентов $\nabla z_\alpha(\mathbf{x}) \cdot \nabla z_\beta(\mathbf{x}) \equiv 0$ заведомо выполняется.

Пример 4. Рассмотрим систему (4.2) с функцией $\Phi(\mathbf{x}, \psi^2 - a^2) \equiv \sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}$. Отметим, что именно эта функция фигурирует в модели магнитной изоляции [8]. Применяя теорему 1 находим, что в случае $n = 2$ система (4.2) вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 \psi}{\partial x_2^2} = \dfrac{\psi}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}} U_m(x_1, x_2), \\ \dfrac{\partial^2 a}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 a}{\partial x_2^2} = \dfrac{a}{\sqrt{\psi^2 - a^2 - 1}} U_m(x_1, x_2), \end{cases}$$

где

$$U_m(x_1, x_2) = 9\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 \sqrt{\left(x_1^3 - 3x_1x_2^2\right)^2 - 1},$$

имеет в области $\mathcal{D} = \{(x_1, x_2) : \left(x_1^3 - 3x_1x_2^2\right)^2 > 1\}$ точное анизотропное по пространственным переменным x_1, x_2 решение

$$\psi(x_1, x_2) = \left(x_1^3 - 3x_1x_2^2\right) \operatorname{ch}\left(3x_1^2x_2 - x_2^3\right),$$

$$a(x_1, x_2) = \left(x_1^3 - 3x_1x_2^2\right) \operatorname{sh}\left(3x_1^2x_2 - x_2^3\right).$$

5. Заключение

Полученные в статье явные выражения точных решений могут иметь не только теоретическое, но и прикладное значение, поскольку их можно использовать для тестирования, настройки и адаптации численных методов и алгоритмов построения приближенных решений краевых задач для систем уравнений эллиптического типа, в том числе обобщенной модели магнитной изоляции. Отметим также, что предложенный в статье подход может быть использован и для построения точных решений систем параболического типа.

Список литературы

1. Вязьмина Е. А. Новые классы точных решений нелинейных диффузионно-кинетических уравнений и систем общего вида / Е. А. Вязьмина, А. Д. Полянин // Теор. основы хим. технологии. – 2006. – Т. 40, № 6. – С. 1–10.
2. Дривотин О. И. Решения уравнения Власова для пучка заряженных частиц в магнитном поле / О. И. Дривотин, Д. А. Овсянников // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2013. – Т. 6. № 4. – С. 2–22.
3. Ибрагимов Н. Х. Принцип априорного использования симметрий в теории нелинейных волн / Н. Х. Ибрагимов, О. В. Руденко // Акуст. журн. – 2004. – Т. 50, № 4. – С. 1–15.
4. Косов А. А. Интегрируемость модели магнитной изоляции и ее точные радиально-симметричные решения / А. А. Косов, Э. И. Семенов, А. В. Синицын // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2013. – Т. 6, № 1. – С. 45–56.
5. Косов А. А. О построении первых интегралов для одного класса нелинейных систем / А. А. Косов, А. В. Синицын // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2012. – Т. 5, № 1. – С. 57–69.
6. Полянин А. Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: Точные решения / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев // М. : Физматлит, 2002. – 432 с.
7. Пухначев В. В. Точные решения уравнений движения несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла/ В. В. Пухначев // ПМТФ. – 2009. – Т. 50, № 2. – С. 16–23.
8. Семенов Э. И. Математическая модель магнитной изоляции вакуумного диода и ее точные решения / Э. И. Семенов, А. В. Синицын // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2010. – № 1. – С. 78–91.
9. Сидоров Н. А. О разветвляющихся решениях нелинейных дифференциальных уравнений n-го порядка / Н. А. Сидоров, Д. Н. Сидоров // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 92–103.
10. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977. – 735 с.
11. URL: http://eqworld.ipmnet.ru/ru/solutions/syspde/spde-toc3.htm.
12. Ben Abdallah N. Mathematical model of magnetic insulation / N. Ben Abdallah. P. Degond, F. Mehats // Physics of plasmas. – 1998. – Vol. 5. – P. 1522–1534.
13. Lyapunov – Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn and M. Falaleev. – Kluwer Academic Publishers, 2002.
14. Vedenypin V. Kinetic Boltzmann – Vlasov and related equations / V. Vedenypin, A. Sinitsyn, E. Dulov. – Amsterdam : Elsevier, 2011.

Косов Александр Аркадьевич, кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952) 427100 (e-mail: kosov_idstu@mail.ru)

Семенов Эдуард Иванович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134, тел.: (3952) 453099 (e-mail: edwseiz@gmail.com)

Известия Иркутского государственного университета.
2014. Т. 9. Серия «Математика». С. 49–60

A. A. Kosov, E. I. Semenov

Multidimensional Exact Solutions of a Class of Elliptic Systems

Abstract. In plasma modeling, partial differential equations and equation systems are usually applied, such as Boltzmann or Vlasov equations. Their solutions must meet initial and boundary conditions which presents a stubborn problem. Thus, the task is commonly reduced to a simpler one, e.g., to solving ordinary differential equations. This is the basis for model of magnetic electron isolation in vacuum diode proposed by a group of French mathematicians. The model is described by a system of two nonlinear ordinary second-order differential equations, and the problem of finding all exact solutions, i.e. full integration is concerned. In this paper, the whole concept is further developed into a class of elliptic equation systems with multidimensional Laplace operator, including both generalization of the above vacuum diode model and other systems applied in chemical technology, mathematical biology, etc. It is established that only solutions of Helmholtz linear equation can be solutions of the elliptic systems considered, and the properties of the former solutions can be inherited by the latter ones. Method of finding radially symmetric exact solutions is offered. A series of example control systems are observed, for which parametrical families of exact solutions (including those anisotropic by spatial variables) described by elementary or harmonious functions are found. Examples of global solutions defined on entire space are specified. The explicit expressions of exact solutions obtained have both theoretical and applied value as they can be used for testing, development and adaptation of numerical methods and algorithms of finding approximate solutions for boundary problems within the generalized model of magnetic isolation.

Keywords: equations of elliptic type, nonlinear systems, exact solutions, model of magnetic insulation.

References

1. Vyazmina E.A., Polyanin A.D. New classes of exact solutions of nonlinear diffusion-kinetic equations and systems of general form (in Russian) [Novye klassy tochnykh resheniy nelineynykh diffuzionno-kineticheskikh uravneniy i sistem obshchego vida]. Teor. osnovy khimicheskoy tekhnologii, 2006, vol. 40,no 6, pp. 1-10.
2. Drivotin O.I., Ovsyannikov D.A. Solutions of the Vlasov equation for a beam of charged particles in a magnetic field (in Russian) [Resheniya uravneniya Vlasova dlya puchka zaryazhennykh chastits v magnitnom pole]. Izvestia ISU. Ser. Mathematics, 2013, vol.6, no 4, pp. 2-22.
3. Ibragimov N.K., Rudenko O.V. The principle of a priori use of symmetries in the theory of nonlinear waves (in Russian) [Printsip apriornogo ispol'zovaniya simmenriy v teorii nelineynykh voln]. Acusticheskiy Zhurnal, 2004, vol. 50, no 4, pp. 1-15.
4. Kosov A.A., Semenov E.I., Sinitsyn A.V. Integrable models of magnetic insulation and its exact radially symmetric solutions (in Russian) [Inegriruemost' modeli magnitnoy izolyatsii i eye tochnye radial'no simmetrichnye resheniya]. Izvestia ISU. Ser. Mathematics, 2013, vol.6, no 1, pp. 45-56.
5. Kosov A.A., Sinitsyn A.V. On the construction of first integrals for a class of nonlinear systems (in Russian) [O postroenii pervykh integralov dlya odnogo klassa nelineynykh sistem]. Izvestia ISU. Ser. Mathematics, 2012, vol.5, no 1, pp. 57-69.

6. A.D. Polyanin. V.F. Zaitsev Handbook of nonlinear partial differential equations. Publisher, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton-London-New York, 2012, 1912 p.
7. V. V. Pukhnachev Exact solutions of the equations of motion for an incompressible viscoelastic Maxwell medium. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2009, vol. 50, no 2, pp. 181-187.
8. Semenov E.I., Sinitsyn A.V. Mathematical model of magnetic insulation vacuum diode and its exact solutions (in Russian) [Matematicheskaya model' magnitnoy izolyatsii vakuumnogo dioda i eye tochnye resheniya]. Izvestia ISU. Ser. Mathematics, 2010, vol.3, no 1, pp. 78-91.
9. Sidorov N.A., Sidorov D.N. About branching solutions of nonlinear differential equations of n-th order (in Russian) [O razvetvlyayushchikhsya resheniyakh nelineynykh differentsial'nykh uravneniy n-go poryadka]. Izvestia ISU. Ser. Mathematics, 2010, vol.3, no 1, pp. 92-103.
10. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of mathematical physics (in Russian) [Uravneniya matematicheskoy fiziki]. M., Nauka, 1977, 735 p.
11. http://eqworld.ipmnet.ru/ru/solutions/syspde/spde-toc3.htm
12. Ben Abdallah N., Degond P., Mehats F. Mathematical model of magnetic insulation. Physics of plasmas, 1998, vol. 5, pp. 1522-1534.
13. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A. and Falaleev M. Lyapunov – Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Kluwer Academic Publishers, 2002.
14. Vedenypin V., Sinitsyn A., Dulov E. Kinetic Boltzmann-Vlasov and related equations. Amsterdam, Elsevier, 2011.

Kosov Alexander Arcad'evich, Leading Research Scientist, Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS); Post Box 292, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, Russia; tel.: (3952) 427100
(e-mail: kosov_idstu@mail.ru)

Semenov Edward Ivanovich, Senior Research Scientist, Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS); Post Box 292, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, Russia; tel.: (3952) 453099 (e-mail: edwseiz@gmail.com)