Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 1. С. 44—56

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 518.517

Оптимизация нелинейных систем с интегро-дифференциальными связями методом параметризации

И. В. Лутошкин
Ульяновский государственный университет

Аннотация. Метод параметризации решения задач оптимального управления специфицируется для задач оптимизации, содержащих связи, определяемые интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра. Приближённое решение ищется в виде вариационного сплайна.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения; оптимизация; метод параметризации; численные методы.

1. Введение

В статье рассматриваются управляемые динамические процессы с запаздыванием (последействием), представляемые обыкновенными интегро-дифференциальными уравнениями. Примеры соответствующих моделей физических и экономических систем приведены, в частности, в [5], [6], [9], [15]. Основные методы решения подобных проблем основаны на использовании варианта принципа максимума Понтрягина [5], [10]. При этом задача оптимизации процесса сводится к краевой интегро-дифференциальной задаче с сопряженными переменными, которая решается в общем случае численно. Второй подход основан на прямых методах решения [11], [16], заключающихся в полной дискретизации исходной вариационной проблемы и последующем решении полученной задачи линейного или нелинейного программирования (НП). Последний способ может эффективно применяться для задач невысокой размерности.

В 1978 г. Горбуновым В.К. был предложен метод параметризации [2], [3] задач оптимального управления, который получил дальнейшее развитие в работах [12], [4], [13], [14]. Метод параметризации заключается в произвольном разбиении временного промежутка и представлении искомой функции управления на каждом из промежутков в виде конечно параметризованной функции, простейшим вариантом может быть полином. Такое кусочно-аналитическое управление можно считать обобщенным сплайном с переменными узлами. Функционалы исходной задачи становятся функциями конечного числа параметров, включая узлы разбиения, и исходная вариационная задача сводится к конечномерной задаче НП. Проблема численного интегрирования исходной и сопряженных систем в методе параметризации разделена с оптимизацией управления. Это позволяет решать задачу более гибко, чем при конечно-разностной аппроксимации исходной задачи, и, как правило, иметь аппроксимирующую задачу НП небольшой размерности.

Данная методика решения оптимизационной проблемы была распространена на задачи с точечным запаздыванием [8] и на случай распределенного запаздывания с линейным представлением интегральной компоненты [7]. В настоящей работе метод параметризации распространяется на оптимизационные задачи, имеющие интегро-дифференциальные связи, которые входят нелинейным образом в постановку проблемы. На тестовом примере показывается эффективность предлагаемого метода решения оптимизационных проблем с распределенным запаздыванием.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления для системы, имеющей связи, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра. Требуется минимизировать функционал

$$J = g(x(T)) \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t), \int\limits_{t_0}^{t} f(t, s, x(s), u(s))ds), \\ x(t_0) = x^0; \end{cases} \tag{2.2}$$

$$u(t) \in U,\ t_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.3}$$

Будем считать, что фазовая переменная $x \in R^n$, вектор параметров управления $u \in R^r$, множество U замкнуто в R^r. Функции

$$\varphi : R^{1+n+r+m} \to R^n, f : R^{2+n+r} \to R^m \text{ и } g : R^n \to R$$

будем считать непрерывными и непрерывно-дифференцируемыми по всем переменным в некоторых областях соответствующих пространств, при этом область дифференцируемости должна охватывать множество допустимых процессов $\{u(t), x(t)\}$. Предполагается, что задача (2.1)-(2.3) разрешима в классе кусочно непрерывных функций $u(t)$.

3. Параметризация задачи

Метод [3] заключается во введении произвольного разбиения промежутка $[t_0, T]$

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T, \tag{3.1}$$

и закреплении структуры управления на сегментах $[t_{k-1}, t_k)$, $1 \leqslant k \leqslant N$. Приближенное решение исходной задачи ищется в классе управлений вида:

$$u_\mu(t) = u_\mu^k(t; v_\mu^k), \quad t_{k-1} \leqslant t < t_k, \quad k = 1, \ldots, N, \quad \mu = 1, \ldots, r. \tag{3.2}$$

Функции $u^k(t; v^k)$ определены и непрерывны на $[t_{k-1}, t_k)$ и принимают значения в U, параметры $v_\mu^k \in R^d$, соответственно, $v^k = (v_1^k, v_2^k, \ldots, v_r^k) \in R^{rd}$.

При подстановке параметризованного управления (3.2) в (2.2) получается траектория $x(t)$, зависящая от параметров управления $w^k = (t_k, v^k)$. Координаты полного вектора параметров будем обозначать $w_{00}^k = t_k$, $w_{\mu\alpha}^k = v_{\mu\alpha}^k$, $1 \leqslant \mu \leqslant r$, $1 \leqslant \alpha \leqslant d$. Всего параметров управления при переменном T будет $(rd + 1)N$. Отвечающую им траекторию представим в виде

$$x(t) = z(t; v^1, t_1, \ldots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k), \quad t_{k-1} \leqslant t < t_k. \tag{3.3}$$

Функция $z(t; v^1, \ldots, t_k, v^{k+1})$ определяется на промежутках $[t_k, t_{k+1})$ интегральными соотношениями, эквивалентными в совокупности задаче Коши (2.2). Класс параметризованных управлений (3.2) является сужением допустимого класса. Предположим, что его функции определены для любых наборов параметров $\{w^k\}$ из ограниченного множества

$$W = \{(w^1, \ldots, w^N) : (3.1),\ u^k(t; v^k) \in U,\ k = 1, \ldots, N\}.$$

Введем функцию от управляющих параметров $\{w^k\}$:

$$\psi(w^1, w^2, \ldots, w^N) = g(z(T; w^1, \ldots, w^{N-1}, v^N)). \tag{3.4}$$

В терминах этих функций задача (2.1)-(2.3) принимает форму задачи нелинейного программирования:

$$\psi(w^1, w^2, \ldots, w^N) \to \min \tag{3.5}$$

при условиях (2.2), (3.2), $(w^1, w^2, \ldots, w^N) \in W$.

Для решения полученной конечномерной задачи можно применять методы, использующие первые (и вторые) производные целевого функционала. Однако построение производных представляет собой отдельную проблему, в силу того, что целевой функционал задан опосредованно относительно переменных $w^1, w^2, \ldots, w^N$.

4. Дифференцирование функционала по параметрам

При подстановке условий (3.1), (3.2) в задачу (2.2) решение $z(t;\cdot)$ будет определяться следующим соотношением:

$$z(t;\cdot) = x^0 + \int_{t_0}^{t} \left(\varphi(\tau, z(\tau;\cdot), u(\tau), \int_{t_0}^{\tau} f(\tau, s, z(s;\cdot), u(s))ds \right) d\tau. \quad (4.1)$$

Продифференцируем равенство (3.4) по одному из параметров $w^k_{\mu\alpha}$:

$$\frac{\partial \psi(w^1, \ldots, w^N)}{\partial w^k_{\mu\alpha}} = \frac{\partial g(z(T; w^1, \ldots, v^N))}{\partial z} \frac{\partial z(T; w^1, \ldots, v^N)}{\partial w^k_{\mu\alpha}}. \quad (4.2)$$

Введем функции

$$y^{k\mu\alpha}(t) = \frac{\partial z(t; w^1, \ldots, v^j)}{\partial w^k_{\mu\alpha}}, \qquad t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j, \qquad 1 \leqslant k \leqslant j \leqslant N. \quad (4.3)$$

Функции (4.3) представляют собой вариации фазовой траектории относительно соответствующих параметров $w^k_{\mu\alpha}$. Таким образом, вопрос вычисления градиента целевой функции (3.5) сводится к вычислению значений $y^{k\mu\alpha}(T)$, $0 \leqslant \mu \leqslant r$, $1 \leqslant \alpha \leqslant d$, $1 \leqslant k \leqslant N$.

Представим функцию (4.1) для $t \geq t_{k-1}$ в виде

$$\begin{aligned} z(t;\cdot) = z(t_{k-1}) &+ \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\varphi(\tau, z(\tau;\cdot), u(\tau), \int_{t_0}^{\tau} f(\tau, s, z(s;\cdot), u(s))ds \right) d\tau \\ &+ \int_{t_k}^{t} \left(\varphi(\tau, z(\tau;\cdot), u(\tau), \int_{t_0}^{t_k} f(t_k, s, z(s;\cdot), u(s))ds \right. \\ &\left. + \int_{t_k}^{\tau} f(\tau, s, z(s;\cdot), u(s))ds \right) d\tau. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Введем обозначение $q(t) = \int_{t_0}^{t} f(t, s, x(s), u(s))ds$ и продифференцируем равенство (4.4) по переменной t_k, тогда для вариации по этой переменной получаем задачу Коши

$$
\begin{aligned}
&y^{k00}(t) = \frac{\partial z(t;\ldots)}{\partial t_k} = \\
&\quad \varphi\left(t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k), q(t_k)\right) - \varphi\left(t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1}), q(t_k)\right) \\
&+ \int\limits_{t_k}^{t} \left(\frac{\partial \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau), q(\tau))}{\partial x} y^{k00}(\tau) + \frac{\partial \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau), q(\tau))}{\partial q} \times \right. \\
&\quad \left(f\left(\tau, t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k)\right) - f\left(\tau, t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})\right) \right. \\
&\quad \left.\left. + \int\limits_{t_k}^{\tau} \frac{\partial f(\tau, s, x(s), u(s))}{\partial x} y^{k00}(s) ds \right) \right) d\tau,
\end{aligned}
$$

которую можно представить в виде

$$
\left\{
\begin{aligned}
&y^{k00}(t_k) = \\
&\quad \varphi\left(t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k), q(t_k)\right) - \varphi\left(t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1}), q(t_k)\right), \\
&\dot{y}^{k00}(t) = \frac{\partial \varphi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial x} y^{k00}(t) + \frac{\partial \varphi(t, x(t), u(t), q(t))}{\partial q} \times \\
&\quad \left(f\left(t, t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k)\right) - f\left(t, t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})\right) \right. \\
&\quad \left. + \int\limits_{t_k}^{t} \frac{\partial f(t, s, x(s), u(s))}{\partial x} y^{k00}(s) ds \right).
\end{aligned}
\right.
\tag{4.5}
$$

Для нахождения вариации по параметрам управления продифференцируем равенство (4.4) по переменной $v^k_{\mu\alpha}$

$$
\begin{aligned}
&y^{k\mu\alpha}(t) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t} \left(\frac{\partial \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau), q(\tau))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(\tau) + \frac{\partial \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau), q(\tau))}{\partial u_\mu} \times \right. \\
&\frac{\partial u^k_\mu(\tau, v^k)}{\partial v^k_{\mu\alpha}} I^k_{k-1}(\tau) + \frac{\partial \varphi(\tau, x(\tau), u(\tau), q(\tau))}{\partial q} \int\limits_{t_{k-1}}^{\tau} \left(\frac{\partial f(\tau, s, x(s), u(s))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(s) \right. \\
&\qquad \left.\left. + \frac{\partial f(\tau, s, x(s), u(s))}{\partial u_\mu} \frac{\partial u^k_\mu(s, v^k)}{\partial v^k_{\mu\alpha}} I^k_{k-1}(s) \right) ds \right) d\tau,
\end{aligned}
$$

здесь функция $I^k_{k-1}(s) = 1$, если $s \in [t_{k-1}; t_k)$, 0 в противном случае. Тогда, получаем задачу Коши для вариации по переменной $v^k_{\mu\alpha}$

$$\begin{cases} \dot{y}^{k\mu\alpha}(t) = \dfrac{\partial\varphi(t,x(t),u(t),q(t))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(t) + \\ \quad \dfrac{\partial\varphi(t,x(t),u(t),q(t))}{\partial u_\mu} \dfrac{\partial u_\mu^k(t,v^k)}{\partial v_{\mu\alpha}^k} I_{k-1}^k(t) + \\ \quad \dfrac{\partial\varphi(t,x(t),u(t),q(t))}{\partial q} \times \int\limits_{t_{k-1}}^{t} \left(\dfrac{\partial f(t,s,x(s),u(s))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(s) + \right. \\ \quad \left. \dfrac{\partial f(t,s,x(s),u(s))}{\partial u_\mu} \dfrac{\partial u_\mu^k(s,v^k)}{\partial v_{\mu\alpha}^k} I_{k-1}^k(s) \right) ds, \\ y^{k\mu\alpha}(t_{k-1}) = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Полученные формулы (4.5), (4.6) позволяют найти требуемые значения $y^{k\mu\alpha}(T)$, тем самым решить проблему построения градиента целевого функционала (3.5). Однако, данный подход является недостаточно эффективным с точки зрения скорости вычисления градиента, так как для построения градиента кроме задачи Коши (2.2) требуется также вычисление $N(rd+1)$ задач Коши (4.5), (4.6).

Для дальнейших преобразований представим систему (2.2) в виде

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \varphi(t,x(t),u(t),q(t)), \\ \dot{q}(t) = f(t,t,x(t),u(t)) + \int\limits_{t_0}^{t} \dfrac{\partial f(t,s,x(s),u(s))}{\partial t} ds, \\ x(t_0) = x^0, \quad q(t_0) = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Обозначим

$$h(t,s,x,u) = \frac{\partial f(t,s,x,u)}{\partial t}.$$

Пусть $(x(t), q(t))$ – решение задачи (4.7), тогда для любой липшицевой функции $p = (p_x, p_q) : R \to R^{n+m}$ имеет место равенство (см. [5]):

$$\begin{aligned} &\langle p_x(T), x(T)\rangle + \langle p_q(T), q(T)\rangle - \langle p_x(t_0), x(t_0)\rangle = \\ &= \int\limits_{t_0}^{T} \Bigg(\langle \dot{p}_x(t), x(t)\rangle + \langle \dot{p}_q(t), q(t)\rangle + \langle p_x(t), \varphi(t,x(t),u(t),q(t))\rangle + \\ &\langle p_q(t), f(t,t,x(t),u(t))\rangle + \int\limits_{t}^{T} \langle p_q(s), h(s,t,x(t),u(t))\rangle ds \Bigg) dt. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Учитывая представление (4.7) для задачи (2.1)–(2.3), введем функцию Понтрягина [5]

$$\begin{aligned} H(t,x,q,u,p) = &\langle p_x(t), \varphi(t,x,u,q)\rangle + \langle p_q(t), f(t,t,x,u)\rangle + \\ &\int\limits_{t}^{T} \langle p_q(s), h(s,t,x,u)\rangle ds. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Здесь функция $p(t)$ является сопряжённой относительно систем в вариациях (4.5), (4.6) и определяется линейными уравнениями

$$\dot{p}_x(t) = -\frac{\partial H(t,x(t),q(t),u(t),p(t))}{\partial x}, \quad \dot{p}_q(t) = -\frac{\partial H(t,x(t),q(t),u(t),p(t))}{\partial q}.$$

С учетом определения (4.9) это интегро-дифференциальные уравнения

$$\begin{gathered}\dot{p}_x(t) = -\left[\frac{\partial \varphi(t,x(t),u(t),q(t))}{\partial x}\right]^T p_x(t) - \\ \left[\frac{\partial f(t,t,x(t),u(t))}{\partial x}\right]^T p_q(t) - \int\limits_t^T \left[\frac{\partial h(s,t,x(t),u(t))}{\partial x}\right]^T p_q(s)ds;\end{gathered} \tag{4.10}$$

$$\dot{p}_q(t) = -\left[\frac{\partial \varphi(t,x(t),u(t),q(t))}{\partial q}\right]^T p_x(t). \tag{4.11}$$

Для выбора конкретной функции $p(t)$ введём конечное условие

$$p_x(T) = \frac{\partial g(x(T))}{\partial x}, \quad p_q(T) = 0. \tag{4.12}$$

Для функции $y^{k00}(t)$ (4.5) воспользуемся соотношением (4.8), подставим (4.10), (4.11) и найдем выражение

$$\begin{gathered}\langle p_x(T), y^{k00}(T)\rangle - \langle p_x(t_k), y^{k00}(t_k)\rangle = \int\limits_{t_k}^T \Big(\langle \dot{p}_x(t), y^{k00}(t)\rangle + \\ \left\langle \dot{p}_q(t), \int\limits_{t_k}^t \frac{\partial f(t,s,x(s),u(s))}{\partial x} y^{k00}(s)ds \right\rangle + \left\langle p_q(t), \frac{\partial f(t,t,x(t),u(t))}{\partial x} y^{k00}(t) \right\rangle \\ + \int\limits_t^T \left\langle p_q(s), \frac{\partial h(s,t,x(t),u(t))}{\partial x} y^{k00}(t) \right\rangle ds \\ + \Big\langle p_x(t), \frac{\partial \varphi(t,x(t),u(t),q(t))}{\partial x} y^{k00}(t) + \frac{\partial \varphi(t,x(t),u(t),q(t))}{\partial q} \times \\ \Big(f\left(t,t_k,x(t_k),u^k(t_k,v^k)\right) - f\left(t,t_k,x(t_k),u^{k+1}(t_k,v^{k+1})\right) + \\ \int\limits_{t_k}^t \frac{\partial f(t,s,x(s),u(s))}{\partial x} y^{k00}(s)ds\Big)\Big\rangle\Big) dt = \int\limits_{t_k}^T \Big\langle p_x(t), \frac{\partial \varphi(t,x(t),u(t),q(t))}{\partial q} \\ \times \Big(f\left(t,t_k,x(t_k),u^k(t_k,v^k)\right) - f\left(t,t_k,x(t_k),u^{k+1}(t_k,v^{k+1})\right)\Big)\Big\rangle dt.\end{gathered} \tag{4.13}$$

Используя полученное соотношение (4.13), выражения (4.2), (4.3), конечное условие (4.12), начальное (4.5) и определение функции Понтрягина (4.9) нетрудно получить формулу частной производной по переменной t_k $(1 \leqslant k < N)$

$$\frac{\partial\psi(w^1,\ldots,w^N)}{\partial t_k} = \frac{\partial g(z(T;\ldots,v^N))}{\partial z}\frac{\partial z(T;w^1,\ldots,v^N)}{\partial w^k_{\mu\alpha}} = \langle p(T), y(T)\rangle$$
$$= \int\limits_{t_k}^{T} \left\langle p_x(t), \frac{\partial\varphi(t,x(t),u(t),q(t))}{\partial q}\left(f\left(t,t_k,x(t_k),u^k(t_k,v^k)\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.-f\left(t,t_k,x(t_k),u^{k+1}(t_k,v^{k+1})\right)\right)\right\rangle dt + \langle p(t_k), y^{k00}(t_k)\rangle =$$
$$H(t_k,x(t_k),q(t_k),u(t_k-0),p(t_k)) - H(t_k,x(t_k),q(t_k),u(t_k+0),p(t_k)). \tag{4.14}$$

Для вывода производной по переменным $v^k_{\mu\alpha}$ введем обозначение

$$\tilde{q}(t) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t}\left(\frac{\partial f(t,s,x(s),u(s))}{\partial x}y^{k\mu\alpha}(s) + \right.$$
$$\left.\frac{\partial f(t,s,x(s),u(s))}{\partial u_\mu}\frac{\partial u^k_\mu(s,v^k)}{\partial v^k_{\mu\alpha}}I^k_{k-1}(s)\right)ds.$$

С учетом введенной функции $\tilde{q}(t)$ к вариации $y^{k\mu\alpha}(t)$ (4.6) применим соотношение (4.8), подставим (4.10) и вычислим выражение

$$\langle p_x(T), y^{k\mu\alpha}(T)\rangle - \langle p_x(t_{k-1}), y^{k\mu\alpha}(t_{k-1})\rangle = \int\limits_{t_{k-1}}^{T}\left[\left\langle \dot{p}_x(t), y^{k\mu\alpha}(t)\right\rangle + \right.$$
$$\langle \dot{p}_q(t), \tilde{q}(t)\rangle + \left\langle p_x(t), \frac{\partial\varphi(t,x(t),u(t),q(t))}{\partial x}y^{k\mu\alpha}(t) + \right.$$
$$\left.\frac{\partial\varphi(t,x(t),u(t),q(t))}{\partial q}\tilde{q}(t) + \frac{\partial\varphi(t,x(t),u(t),q(t))}{\partial u_\mu}\frac{\partial u^k_\mu(t,v^k)}{\partial v^k_{\mu\alpha}}I^k_{k-1}(t)\right\rangle +$$
$$\left\langle p_q(t), \frac{\partial f(t,t,x(t),u(t))}{\partial x}y^{k\mu\alpha}(t) + \frac{\partial f(t,t,x(t),u(t))}{\partial u_\mu}\frac{\partial u^k_\mu(t,v^k)}{\partial v^k_{\mu\alpha}}I^k_{k-1}(t)\right\rangle$$
$$+\int\limits_{t}^{T}\left\langle p_q(s), \frac{\partial h(s,t,x(t),u(t))}{\partial x}y^{k\mu\alpha}(t) + \right.$$
$$\left.\left.\frac{\partial h(s,t,x(t),u(t))}{\partial u_\mu}\frac{\partial u^k_\mu(t,v^k)}{\partial v^k_{\mu\alpha}}I^k_{k-1}(t)\right\rangle ds\right]dt =$$
$$= \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\left\langle p(t), \frac{\partial\varphi(t,x(t),u(t),q(t))}{\partial u_\mu}\right\rangle + \left\langle p_q(t), \frac{\partial f(t,t,x(t),u(t))}{\partial u_\mu}\right\rangle\right.$$
$$\left.+\int\limits_{t}^{T}\left\langle p_q(s), \frac{\partial h(s,t,x(t),u(t))}{\partial u_\mu}\right\rangle ds\right]\frac{\partial u^k_\mu(t,v^k)}{\partial v^k_{\mu\alpha}}dt. \tag{4.15}$$

Используя полученное соотношение (4.15), выражения (4.2), (4.3), конечное условие (4.12), начальное (4.6) и определение функции Понтрягина (4.9), аналогично частной производной по переменной t_k, найдем частные производные первого порядка по переменным $v^k_{\mu\alpha}$ ($0 \leqslant \mu \leqslant r$, $1 \leqslant \alpha \leqslant d$, $1 \leqslant k \leqslant N$)

$$\frac{\partial\psi(w^1,\dots,w^N)}{\partial v^k_{\mu\alpha}} = \frac{\partial g(z(T;\dots,v^N))}{\partial z}\frac{\partial z(T;w^1,\dots,v^N)}{\partial w^k_{\mu\alpha}} = \\ \langle p(T), y(T)\rangle = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial H(t,x(t),q(t),u(t),p(t))}{\partial u_\mu}\frac{\partial u^k_\mu(t,v^k)}{\partial v^k_{\mu\alpha}}dt. \tag{4.16}$$

Если конечный момент времени T является подвижным, то вариация фазовой траектории по T конечна

$$y^{N00}(T) = \varphi\left(T, x(T), u(T), \int\limits_{t_0}^{T} f(T,s,x(s),u(s))ds\right),$$

и производная находится по формуле

$$\frac{\partial\psi(w^1,\dots,w^N)}{\partial T} = \left\langle p_x(T), \varphi\left(T, x(T), u(T), \int\limits_{t_0}^{T} f(T,s,x(s),u(s))ds\right)\right\rangle. \tag{4.17}$$

Теперь для вычисления производных (4.2) требуется решить помимо основной задачи Коши (2.2), (3.2) дополнительно задачу (4.10), (4.12) и определить функцию (4.9). После этого, вычисление градиента сводится к вычислению определенных интегралов (4.16), (4.17), а также значений (4.14). Приведенный алгоритм менее трудоемок по сравнению с прямым вычислением по формулам (4.5), (4.6).

5. Пример

Рассмотрим тестовый пример (построен на основе примера из [1]):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(t) + \int\limits_0^t (tu(s) + x_1(s) + 1 - s - t)\exp\{s(t-s)\}ds, \\ \dot{x}_2(t) = \left(tx_1(t) - u(t) - t^2 + t + 1\right)^2, \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \\ x_2(1) \to \inf. \end{cases}$$

Решение этой задачи известно: $u^*(t) = t\exp\{t^2\}+1$, $x^*_1(t) = \exp\{t^2\} - 1 + t$, $x^*_2(t) \equiv 0$. Следовательно, минимальное значение целевого функционала равно нулю.

Решение строилось на отрезке $[0; 1]$ в классе кусочно-линейных

$$u(t) = v_{0k} + v_{1k}t, \quad t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant N.$$

и кусочно-квадратичных управлений

$$u(t) = v_{0k} + v_{1k}t + v_{2k}t^2, \quad t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant N.$$

при $N = 2, 3$.

Для нахождения решения использовался поэтапный алгоритм усложнения параметризации управления:

– на первом этапе решение находилось при $N = 2$, т.е управление параметризовалось в классе кусочно-линейных с одним моментом переключения управления функций, таким образом, задача НП содержала 5 переменных.

– решение, полученное на первом этапе использовалось в качестве начального приближения для кусочно-линейного управления с двумя моментами переключения и для кусочно-квадратичного управления с одним моментом переключения.

– на втором этапе решение строилось при $N = 3$ для кусочно-линейного управления с двумя переключениями, задача НП в этом случае имела 8 переменных. Также строилось решение при $N = 2$ для кусочно-квадратичного управления с одним моментом переключения, задача НП имела 7 переменных.

– на третьем этапе управление параметризовалось в классе кусочно-квадратичных функций с двумя переключениями. В качестве начального приближения использовалось соответствующее решение, полученное на предыдущем этапе для $N = 2$. Задача НП имела 11 переменных.

Все задачи НП решались методом Ньютона, матрица вторых производных вычислялась на основе градиентов разностными аппроксимациями. Численный эксперимент проводился при двух способах вычисления градиента: первый основывался на использовании формул (4.14), (4.16), второй на численном дифференцировании – аппроксимации градиента на основе вычисления значений целевой функции (3.5).

Введем обозначения: h – шаг интегрирования задач Коши для (2.2), (4.10), J – значение функционала (3.5) на полученном решении, N_C – число полных задач Коши на интервале $[0; 1]$, N_I – число полных интегралов на $[0; 1]$ (по формулам (4.16)), $\Delta u = \max\limits_{i \in I} |u^*(t_i) - u(t_i)|$, $\Delta x_1 = \max\limits_{i \in I} |x_1^*(t_i) - x_1(t_i)|$. Здесь $I = \{1, 2, \ldots, 51\}$, $t_i = t_0 + (i - 1)(T - t_0)/50$. Интегрирование выполнялось методом Рунге-Кутты 2-го порядка. В силу того, задачи (2.2), (4.10) «имеют память», приходилось сохранять решения для переменных x и p на некоторой сетке. Если требовалось какое-то промежуточное значение фазовой и сопряженной переменных, то они вычислялись линейной интерполяцией по сохраненым значения. Результаты эксперимента приведены в таблицах 1, 2.

Таблица 1.

Результаты решения (первый способ)

функция управления	h	J	N_C	N_I	Δu	Δx_1
линейная	0,005	0,002652	379	288	0,164	0,0068
с одним	0.01	0,002663	343	288	0,164	0,0068
переключением	0.05	0,002705	376	320	0,163	0,0067
линейная	0,005	0,000502	1593	1500	0,070	0,0023
с двумя	0.01	0,000507	953	850	0,070	0,0020
переключениями	0.05	0,000525	677	600	0,070	0,0019
квадратичная	0,005	0,000063	824	1122	0,025	0,0007
с одним	0.01	0,000064	609	792	0,026	0,0006
переключением	0.05	0,000075	598	792	0,032	0,0013
квадратичная	0,005	0,000019	629	816	0,016	0,0004
с двумя	0.01	0,000011	770	1020	0,008	0,0005
переключениями	0.05	0,000023	563	714	0,010	0,0022

Таблица 2.

Результаты решения (второй способ)

функция управления	h	J	N_C	Δu	Δx_1
линейная	0,005	0,002650	2171	0,167	0,0085
с одним	0.01	0,002661	2171	0,167	0,0085
переключением	0.05	0,002703	2171	0,166	0,0084
линейная	0,005	0,001098	3673	0,099	0,0080
с двумя	0.01	0,001140	3684	0,102	0,0055
переключениями	0.05	0,001267	3678	0,100	0,0042
квадратичная	0,005	0,000443	3315	0,080	0,0055
с одним	0.01	0,000439	3323	0,080	0,0055
переключением	0.05	0,000563	3316	0,068	0,0030
квадратичная	0,005	0,000051	11321	0,018	0,0007
с двумя	0.01	0,000034	6803	0,016	0,0014
переключениями	0.05	0,000075	4555	0,032	0,0013

Данные таблицы показывают, что оба способа вычисления градиента приводят к приемлемому решению и дают эквивалентные относительно значения целевого функционала результаты при кусочно-линейной параметризации с одним моментом переключения. Однако при усложнении параметризации решение, полученное на основе формул (4.14), (4.16), имеет лучшее значение функционала, лучшее приближение к оптимальному решению, а также меньшие объемы вычислительных операций за счет существенного сокращения количества задач Коши. Приведенные значения шага интегрирования обеспечивают практически одинаковое качество получаемого решения.

Список литературы

1. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : справ. пособие / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – Киев : Наукова думка, 1986.
2. Горбунов В. К. О сведении задач оптимального управления к конечномерным / В. К. Горбунов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1978. – Т.18, № 5. – С. 1083–1095.
3. Горбунов В.К. Метод параметризации задач оптимального управления / В. К. Горбунов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1979. – Т.19, № 2. – С. 292–303.
4. Горбунов В. К. Развитие и опыт применения метода параметризации в вырожденных задачах динамической оптимизации / В. К. Горбунов, И. В. Лутошкин // Изв. РАН. Сер.: Теория и системы управления. – 2004. – № 5. – С. 67–84.
5. Дждеед М. Методы и алгоритмы оптимального управления системами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями : дис. . . . канд. физ.-мат. наук / М. Дждеед – Тверь,2004. – 114 с.
6. Егоров А.И. Математические методы оптимизации процессов теплопроводности и диффузии / А.И. Егоров. – Фрунзе : Илим, 1990.
7. Лутошкин И. В. Метод параметризации для оптимизации систем, представляемых интегро-дифференциальными уравнениями / И. В. Лутошкин, И. Е. Дергунов // Тр. СВМО. – 2010. – Т. 12, № 4. – С. 116–126.
8. Лутошкин И. В. Метод параметризации для моделирования управляемых систем с точечным запаздыванием / И. В. Лутошкин, А. И. Тонких // Автоматизация процессов управления. – 2010. – № 4.
9. Максимов В. П. Некоторые проблемы регуляризации переопределенных краевых задач экономической динамики / В. П. Максимов // Математическое моделирование. – 1997. – Т.9, № 2. – С. 57–65.
10. Пустарнакова Ю. А. Оптимизация процесса обучения искусственной нейронной сети, описываемой системой интегро-дифференциальных уравнений / Ю. А. Пустарнакова // Методы оптимизации и их приложения : тр. 12-й Байк. Междунар. конф. : Иркутск, 2001. – Т.2. – С. 134–138.
11. Durazzi C. Nonlinear programming methods for solving optimal control problems / C. Durazzi, E. Galligani // Nonconvex Optimization and Its Applications. Equilibrium Problems: Nonsmooth Optimization and Variational Inequality Models.– 2001 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands. – P. 71–99.
12. Gorbunov V. The parameterization method in singular differential-algebraic equations / V. Gorbunov, I. Lutoshkin // Computational Science (ICCS 2003) / eds. P. Slot [et al.]. – LNCS 2658. – Springer, 2003.
13. Gorbunov V. The parameterization method in optimal control problems and differential-algebraic equations/ V. Gorbunov, I. Lutoshkin // Journal of computational and applied mathematics. – Elsevier, 2006. – Vol. 185, iss. 2. – P. 377–390.
14. Gorbunov V. K. A parametrization method for the numerical solution of singular differential equations / V. K. Gorbunov, I. V. Lutoshkin, Y. V. Martynenko // Applied Numerical Mathematics. – 2009. – N 59. – P. 639–655.

15. Kamien M. I. Optimal Control with Integral State / M. I. Kamien, E. Muller // Equations The Review of Economic Studies. – 1976. – Vol. 43, N 3. – P. 469–473.
16. Yuan Wei. The Numerical Analysis of Implicit Runge-Kutta Methods for a Certain Nonlinear Integro-Differential Equation / Wei Yuan, Tao Tang // Mathematics of Computation. – 1990. – Vol. 54, N 189. – P. 155–168.

I. V. Lutoshkin

The parameterization method for optimizing the systems which have integro-differential equations

Abstract. The parameterization method (It was created for solving optimal control problems) is specified for variational problems with Volterra integro-differential equations. The approximation solution is a variational spline.

Keywords: integro-differential equations; optimization; the parameterization method

Лутошкин Игорь Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент, Ульяновский государственный университет, 432000,Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42 тел.: (8422)412357 (lutoshkiniv@ulsu.ru)

Lutoshkin Igor, Ulyanovsk State University, 42, L. Tolstoi St., Ulyanovsk, 432000, docent, Phone: (8422)412357 (lutoshkiniv@ulsu.ru)