



## О МОЕМ НЕЗАБВЕННОМ УЧИТЕЛЕ

Воспоминания о члене-корреспонденте АН СССР  
Лазаре Ароновиче Люстернике

В 1950 году, окончив с золотой медалью среднюю школу в городе Ужгороде Закарпатской Украины, я поступил на механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова. Нашими лекторами были профессора П. С. Александров, А. Г. Курош, Н. К. Бари, В. В. Немыцкий, Л. А. Люстерник, А. И. Маркушевич, И. М. Гельфанд, Н. Г. Четаев. Да и сокурсники мои, как показала дальнейшая жизнь, тоже были незаурядными людьми. Наш курс по всеобщему признанию оказался лучшим за всю историю мехмата. Вместе со мною учились будущие академики математики Н. С. Бахвалов, М. М. Лаврентьев, О. Б. Лупанов, О. В. Бесов, механики Д. М. Климов, А. Г. Куликовский, астрономы Н. С. Кардашев, Ю. Н. Парийский. Многие мои сокурсники стали докторами наук.

Увлеченный блестящим лекторским талантом Александра Геннадиевича Куроша я принял участие в работе его алгебраического семинара и на втором курсе выполнил под его руководством курсовую работу о введении различных метрик в линейное пространство. Курош высоко оценил эту работу и сказал, что у меня получился функциональный анализ. Вскоре он лично представил меня члену-корреспонденту АН СССР Л. А. Люстернику, рекомендовав как очень перспективного молодого исследователя. С тех пор я стал одним из самых близких учеников Люстерника.

Лазарь Аронович Люстерник родился в 1899 году в Российской империи в городке Здуньска Воля, ныне Польша. Он закончил с золотой медалью гимназию в Смоленске и в 25 лет стал профессором МГУ.

Математическая деятельность Люстерника была многогранна, и на многие направления развития математики в СССР он оказал решающее влияние. Отметим лишь его выдающиеся топологические исследования совместно с Львом Генриховичем Шнирельманом, применение сеточных методов к задачам математической физики, создание и широкое

внедрение асимптотического метода пограничного слоя. Он был одним из первых, кто разрабатывал и применял математические методы для ЭВМ в ВЦ АН, занимался теорией массового обслуживания и применением математических методов в экономике и в народном хозяйстве.

Пожалуй, главными качествами Лазаря Ароновича были его исключительные доброта и внимание к окружающим его людям.

Редко кто из посетителей Люстерника видел, что он занят математикой. У него было множество других увлечений. Он очень любил русскую поэзию и был ее прекрасным знатоком, зная наизусть почти все ее шедевры. Сам он тоже обладал литературным даром. Его стихотворные воспоминания «Молодость московской математической школы», опубликованные в двух номерах журнала «Успехи математических наук», о научной школе Николая Николаевича Лузина (Лузитания), из которой вышла целая плеяда великих советских математиков, написаны прекрасным русским языком.

Эти воспоминания были вызваны неизбывной горечью Люстерника в связи с его участием в политических гонениях академика Лузина, поддержанных большой группой его учеников. Шнирельман не смог пережить своего причастия к «делу Лузина» и покончил с собой.

Говорили, что Люстерник является третьим по значению русским поэтом после Пушкина и Баркова в области неприличных стихов. Но он мне таких стихов никогда не читал и не показывал.

На банкете в ресторане Метрополь, после успешной защиты мною докторской диссертации Л.А. по просьбе присутствующих прочел одно свое очень красивое лирическое стихотворение. Потом, когда я провожал его домой на такси, он сказал, что эти стихи он написал не для жены, как он ей говорил, а для другой дамы.

Люстерник был также большим ценителем живописи и архитектуры, глубоко знал и постоянно изучал священные книги трех основных религий. Пожалуй, эта широта интересов и помешала Л.А. стать академиком. Этот же недостаток, а может это и достоинство, характерен и для меня.

Жил Лазарь Аронович в маленькой двухкомнатной квартире на улице Чкалова напротив Курского вокзала с женой Ираидой Фоминичной и псом-колли по имени Хасан. Все говорили, что этот пес понимает и любит математику. В самом деле, пока речь с посетителем шла о математике, Хасан сидел и внимательно слушал. Но стоило перейти на другую тему, как он тут же уходил. У Люстерника была половина дачи на 42-м км от Казанского вокзала, она была украшена изразцами и деревянной скульптурой, выполненными прекрасными мастерами в старинном русском народном стиле.

Будучи чистокровным евреем, обладая типично еврейской, очень благородной внешностью и выраженным еврейским акцентом Л.А., как каждый высокообразованный и высококультурный человек, ни в ко-

ей степени не был националистом. Среди его учеников были русские, евреи, армяне, грузины, татары, азербайджанцы, китайцы, арабы — люди свыше двадцати национальностей. Быть учеником Люстерника было не очень просто. Человек способный, но без инициативы, без творческой жилки мог так и не сделать ничего в аспирантуре у Л.А. Обычно руководство Люстерника ограничивалось советами и беглым просмотром рукописи. Здесь, правда, он сразу же подмечал все слабые места и достоинства рукописи. В то же время вокруг Люстерника царила творческая атмосфера, постоянно бурлили научные идеи. Люди оказывались захваченными и увлеченными математикой и ее возможностями для приложений.

Речь Л.А. не всегда была ясной: иногда его идеи опережали его мысли, а мысли опережали слова. Чтобы понять его, иногда нужен был переводчик. Такую роль в 50-60-е годы играл его ученик профессор Марк Иосифович Вишик, а в последние годы жизни Люстерника — я, когда совместно с Л.А. мы вели на мехмате учебно-научный семинар.

Скончался Лазарь Аронович летом 1981 года. Многие годы у него из-за излишней полноты были проблемы с сердцем. Усилиями врачей и супруги он похудел, с сердцем проблем не стало, но появился диабет в тяжелой форме. Лечащий врач сообщил Лазарю Ароновичу, что ему осталось жить три дня. Их Люстерник провел целенаправленно и с удовольствием. Он вспоминал и перечитывал любимые стихи русских поэтов серебряного века.

Столетие со дня рождения Лазаря Ароновича Люстерника отмечалось в сентябре 1991 года в Польше, в деревне Бедлево в бывшем замке Потоцкого, приобретенном Польским математическим обществом для проведения небольших конференций. Красота дворца, смягчающая душу природа, и незабываемая польская кухня придавали интимность этой встрече учеников Л.А. Основная группа была из России (М. И. Вишик, А. М. Ильин, В. А. Треногин и др.). Были также ученые из Польши, Италии, США, Канады.

Лазарь Аронович был человеком крайне неординарным, его рассеянность породила многочисленные анекдоты.

*Анекдот.* Люстерник женился и повел жену в театр. После спектакля они вышли из театра. Л.А. велел жене подождать и пошел ловить такси, поймал его, сел и уехал домой. Бедная Ираида Фоминична напрасно прождала и кое-как вернулась домой, а там ее ждал вопрос мужа: "Где же ты шлялась?"

*Анекдот.* Л.А. пришел на лекцию в ботинках разного цвета, оба на правую ногу. Студенты сделали вид, что не заметили этого. На следующей лекции ничего не изменилось, и тогда студенты обратили внимание Л.А. на его ботинки. Но на следующей лекции все повторилось. Тут уж студенты заинтересовались этим повторяющимся явлением и спросили

о нем Люстерника. «Что же я могу поделать? Я заглянул под диван — там были такие же ботинки, но оба на левую ногу», ответил он.

*Анекдот.* Л.А. вышел ненадолго из дома, но, поскольку к нему должен был зайти приятель, приколот к входной двери записку «Буду в 8». Довольно скоро Л.А. вернулся, увидел записку, и поскольку другого выхода не было, пошел погулять до восьми, пока не вернется хозяин.

Приведу две истории, рассказанные мне лично Люстерником.

Первая история. В начале двадцатых годов было решено провести в Ленинграде математический съезд. Время было трудное, купить железнодорожный билет Москва-Ленинград было целой проблемой. Три математика, среди них Люстерник, стояли на одной из центральных улиц Москвы и говорили, что неплохо было бы, если бы московской делегации был предоставлен отдельный вагон. «Нам мог бы помочь Отто Юльевич Шмидт» — сказал С. — близкий знакомый академика Шмидта. Нужно сказать, что О.Ю. был крупным математиком-алгебраистом, но, при этом, постоянно занимал и какой-либо государственный пост, прославившись значительно позднее как выдающийся полярный исследователь. «Да вот он сам идет с дамой, я переговорю с ним» — сказал С. «Нехорошо государственного человека лишать последнего эpsilon личной жизни» — возразил ему Люстерник. «Да я его с этим эpsilon каждый день вижу» — ответил С. Затем он подошел к Шмидту, переговорил с ним, возвратился и говорит, что О.Ю. обещал и вагон будет. Поясню, что эpsilon в прикладной математике это часто маленькая величина, малый параметр, играющий, тем не менее, важную роль.

Вторая история. Звонок в квартиру Люстерника. Ираида Фоминична открывает дверь и видит двух военных. «Нам приказано доставить гражданина Люстерника». В панике И.Ф. спрашивает, можно ли дать мужу с собой чистое белье и сухари. «Нам это не велено» — сообщают ей. Люстерника сажают в автомашину, называемую в народе «черный ворон», и затем бесконечно долго везут неизвестно куда. Привозят в Бутырскую тюрьму, ведут по различным коридорам. Наконец заводят в один из кабинетов, где, как оказалось, сидел один из высших чинов КГБ (комитета государственной безопасности). Тот почтительно здоровается с Л.А. и объясняет суть дела.

Во Владивосток на американском самолете прилетел личный помощник президента Рузвельта Гарри Гопкинс для подготовки встречи великой тройки Сталин-Черчилль-Рузвельт в Тегеране. Далее Гопкинс должен был лететь в Москву на советском самолете. Наши штурманы начали вести учитывавший погодные условия расчет авиационного маршрута Владивосток-Москва. Когда они расчет закончили, американский штурман вынул какую-то книжечку, перелистал ее и тут же сообщил те данные, на получение которых наши штурманы потратили около часа. «Вам, товарищ Люстерник, дается срочное правительственное задание — в кратчайший срок подготовить аналогичную штурман-

скую книжку для наших ВВС (военно-воздушных сил), вся необходимая помощь для расчетов будет обеспечена» — говорит кагэбист. Через две недели группа Люстерника представила штурманскую книжку, через три дня она была разослана по всем фронтам, а еще через два дня Люстернику в Кремле был вручен орден Ленина.

Следующие два эпизода характеризуют мудрость и осторожность Л.А. и степень его доверия ко мне.

Ему прислали документы по тяжбе двух математиков Мордухая Моисеевича Вайнберга и Марка Александровича Красносельского. Каждый из них обвинял другого в научном воровстве — присваивании научных результатов оппонента. Люстерника просили выступить в качестве арбитра — установить кто прав, а кто не прав. Л.А. обратился ко мне за советом. Я рекомендовал ему не поддерживать ни одну из враждующих сторон и отложить дело в долгий ящик. Так он и поступил.

Другой эпизод. Л.А. планировал начать широкое исследование задач с малым параметром при старшей производной и хотел привлечь к сотрудничеству своего ученика профессора Марка Иосифовича Вишика. «Что за человек Вишик? Какого Вы о нем мнения?» — спросил меня Л.А. На пятом курсе я прослушал спецкурс Вишика по граничным задачам для уравнений с частными производными и мнение о нем, как человеке и как ученом, у слушателей его курса сложилось самое положительное, о чем я и сказал Люстернику. После этого началось их плодотворное научное сотрудничество, работал прекрасный совместный научный семинар и был создан асимптотический метод пограничного слоя Люстерника-Вишика. В моем обзоре в журнале «Успехи математических наук» частично отражено развитие этого важного для самых разнообразных приложений метода. Талантливый и трудолюбивый математик Вишик не обладал в достаточной степени даром математического обобщения. Он близко подошел к важнейшим рубежам математической науки, но, к сожалению, решающие шаги сделали другие.

Вкратце отмечу выдающуюся деятельность Люстерника в организации науки в России. И на посту заместителя директора вычислительного центра АН СССР, и на посту члена Московского совнархоза (Совет народного хозяйства), он всегда стремился направить математическую науку на решение конкретных задач промышленности и экономики.

Люстернику я обязан знакомством с академиком Андреем Николаевичем Тихоновым. Лазарь Аронович Люстерник был профессором кафедры вычислительной математики мехмата, заведовал которой Тихонов — один из ведущих участников атомного проекта. Во время одного из моих приходов на кафедру вычислительной математики Люстерник представил меня Тихонову и тот помнил меня с тех студенческих лет.

Впоследствии А. Н. Тихонов создал новый факультет МГУ — факультет вычислительной математики и кибернетики и стал его дека-

ном. После смерти академика М.В. Келдыша Тихонов возглавил также Институт прикладной математики, то есть стал главным теоретиком космонавтики. Когда А.Н. стал также председателем Научно-методического совета (НМС) по математике Министерства, он включил меня в бюро президиума НМС, состоящее из шести человек. Подробно о моей работе в НМС под руководством академика Тихонова было рассказано в моей публикации в книге «Академик Андрей Николаевич Тихонов. К 100-летию со дня рождения». (МАКС ПРЕСС, Москва 2006)

В последние свои годы Л.А. вел семинар по математической экономике, в результате работы которого под его руководством было защищено несколько кандидатских и докторских диссертаций по экономике. Ныне большая часть этих учеников Люстерника работают за рубежом.

Особо следует отметить основополагающую и направляющую роль Л.А. в создании в нашей стране школы нелинейного функционального анализа и, особенно, — в создании современной теории бифуркаций. Ниже дается краткий исторический обзор этой важнейшей в приложениях теории.

В наш век с его неустойчивостями, кризисами и катастрофами особое значение приобретает математическое моделирование и последующее изучение критических явлений. Под терминами ветвление, разветвление и бифуркация понимается явление, когда при переходе через критическое значение параметра существенно меняются качественные или количественные свойства изучаемого объекта (см. мои статьи в пяти-томной Математической Энциклопедии). Например, если объект описывается нелинейным уравнением с параметром, не обязательно числовым, и решение, существующее при критическом значении параметра, разветвляется на несколько новых решений или появляется решение существенно другого качественного характера.

Дадим краткий обзор истории развития теории ветвления решений нелинейных уравнений в банаховых пространствах. Это теория восходит к трудам великого француза Анри Пуанкаре и не менее великого русского Александра Михайловича Ляпунова, заложившим ее основы в ходе исследования ряда конкретных задач небесной механики. Немецкий математик Эрхард Шмидт создал аналогичную теорию для интегральных уравнений с параметром. Главная идея состоит здесь в редукции задачи к алгебраическому уравнению, которое ныне принято называть уравнением разветвления Ляпунова-Шмидта. Для исследования его предлагается использовать метод диаграммы Ньютона, позволяющий найти все решения алгебраического уравнения в виде рядов по целым или дробным степеням числового параметра. Позже метод был развит в работах Пуанкаре и Макмиллана. Отметим, что Пуанкаре и Ляпунов изучали еще и важнейший вопрос об устойчивости или неустойчивости тех или иных решений, ответвившихся от тривиального решения.

В работах А. И. Некрасова и Н. Е. Кочина были рассмотрены задачи механики жидкости, в которых ответвившиеся от тривиального решения вычислялись методом неопределенных коэффициентов в виде рядов по целым или дробным степеням параметра. Подобный путь рассматривался для интегральных уравнений Л. Лихтенштейном и Н. Н. Назаровым. Выдающийся советский математик и прикладник Л.А.Люстерник еще в предвоенные годы поставил задачу об исследовании бифуркационных явлений с использованием функционального анализа. М. А. Красносельский и М. М. Вайнберг установили вариационными и топологическими методами ряд важных теорем о существовании точек бифуркации. Люстерник, высоко оценив эти результаты, был все же не удовлетворен их неконструктивностью и поставил перед двумя своими учениками К. Т. Ахмедовым и В. А. Треногиным задачу создания аналитических методов решения бифуркационных задач. В докторской диссертации К. Т. Ахмедова аналитический метод неопределенных коэффициентов Некрасова-Назарова был перенесен на нелинейные уравнения в банаховых пространствах.

В серии моих статей и в кандидатской диссертации было дано широкое обобщение метода Ляпунова-Шмидта в двух его вариантах — в проекционном варианте и в использовании конечномерной регуляризации вырожденного фредгольмова оператора (результат, названный мною обобщенной леммой Шмидта).

Для литературной помощи в подготовке обзорной статьи в УМН я пригласил своего бывшего оппонента по кандидатской диссертации М. М. Вайнберга. В этой статье, а затем через 7 лет в монографии, нами были освещены также и некоторые мои более новые результаты, изложенные в моих статьях и в докторской диссертации. В монографии «Теория ветвления решений нелинейных уравнений» М. М. Вайнбергу принадлежит элементарная первая часть, содержащая алгебраические и интегральные уравнения, а мне — теория в банаховых пространствах и приложения. Книга была переведена на немецкий и английский языки. Ряд зарубежных математиков, по их признанию, учились методам теории ветвления по указанному обзору и книге. Лазарь Аронович рекомендовал мне не брать Вайнберга в соавторы, чему я, к сожалению, не прислушался. Впоследствии, когда Вайнберг начал серию инсинуаций в адрес Люстерника, я прервал с ним знакомство.

Дальнейшее развитие теории ветвления в СССР, а затем в России, продолжалось, в основном, в моем сотрудничестве с активно действующими моими учениками Борисом Владимировичем Логиновым (Ташкент, затем Ульяновск) и Николаем Александровичем Сидоровым (Иркутск).

Идея использования групповой симметрии в бифуркационных задачах впервые появилась в некоторых гидромеханических работах ныне покойного выдающегося ростовского ученого Виктора Иосифовича Юдо-

вича. В совместных работах моих и Б. В. Логинова была создана общая теория использования групповой инвариантности в рамках абстрактного варианта метода Ляпунова-Шмидта. Система уравнений разветвления наследует групповую симметрию исходной задачи. Применение метода исключения здесь крайне громоздко и даже необозримо. Для анализа системы уравнений разветвления здесь оказывается эффективным метод группового анализа Юстуса Ли, глубоко развитый академиком Львом Васильевичем Овсянниковым. На этом пути профессор Логинов и его ученики успешно исследовали большое число прикладных задач по развитию и применению методов теории ветвления и бифуркации.

Еще одним моим выдающимся учеником является иркутский математик Николай Александрович Сидоров. Вспоминаю обстоятельства начала нашего сотрудничества. В ходе Московского международного конгресса математиков (1960) секцией функционального анализа руководил Л. А. Люстерник, я был его заместителем. Люстерник был занят встречами с зарубежными участниками, поэтому работу секции пришлось организовывать мне. Я был самым молодым из докладчиков и привлекал председательствовать на заседаниях наиболее маститых ученых. Наконец, запас таких ученых стал иссякать и я обратил внимание на иркутского профессора Владимира Владимировича Васильева. Это высокий медвежьего телосложения коренной сибиряк не был доктором наук. Под этим предлогом он отклонил мое предложение ему председательствовать и обратился ко мне с ответной просьбой согласиться стать оппонентом по кандидатской диссертации его ученика Сидорова. Мой приезд в Иркутск и оппонирование этой диссертации положили начало многолетнему нашему плодотворному сотрудничеству.

Совместно с Н. А. Сидоровым (Иркутск) были исследованы вопросы регуляризации (в смысле академика А. Н. Тихонова) вычисления разветвляющихся решений нелинейных уравнений и получены наиболее общие теоремы о существовании точек бифуркации. Профессор Сидоров и его научная школа провели глубокие исследования по теории дифференциальных уравнений с вырожденным оператором при старшей производной, по итерационным методам в задачах теории ветвления и по бифуркационным задачам для системы уравнений Максвелла.

Ныне Иркутск является крупнейшим научным центром России. Здесь успешно работает большая группа первоклассных ученых-математиков и прикладников. Многих из них, как и учеников моих и учеников Б. В. Логинова, с уверенностью можно назвать научными внуками и правнуками великого Люстерника.

В. А. Треногин  
*Национальный исследовательский  
технологический университет МИСиС*