

Research article

УДК 518.517

MSC 03C07, 03C60

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.39.1>

## Multilinear Volterra Equation of the First Kind: Elements of the Theory and Numerical Methods

Ivan I. Ivanov<sup>1,2,4</sup>, Petr P. Petrov<sup>1,2,3✉</sup>

<sup>1</sup> Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation

<sup>2</sup> Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russian Federation

<sup>3</sup> Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, Russian Federation

<sup>4</sup> Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

✉ [petrov@math1.isu.ru](mailto:petrov@math1.isu.ru)

**Abstract:** In this paper, we consider a convex function defined as a 1D-regularized total variation with nonhomogeneous coefficients, and prove the Main Theorem concerned with the decomposition of the subdifferential of this convex function to a weighted singular diffusion and a linear regular diffusion. The Main Theorem will be to enhance the previous regularity result for quasilinear equation with singularity, and moreover, it will be to provide some useful information in the advanced mathematical studies of grain boundary motion, based on KWC type energy.

**Keywords:** majorant equation, Lambert function, nonlinear integral inequalities, Sharp estimates, numerical methods

**Acknowledgements:** The study was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project No. ).

**For citation:** Ivanov I. I., Petrov P. P. Integral Volterra Equations of the First Kind: the Elements of the Theory and Numeric Methods. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 39, pp. 1–4. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.39.1>

Научная статья

## Полилинейные интегральные уравнения Вольтерра I рода: элементы теории и численные методы

И. И. Иванов<sup>1,2,4</sup>, П. П. Петров<sup>1,2,3✉</sup>

<sup>1</sup> Иркутский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация

<sup>2</sup> Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Российская Федерация,

<sup>3</sup> Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск, Российская Федерация

<sup>4</sup> Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация  
✉ petrov@math1.isu.ru

**Аннотация:** Рассматривается выпуклая функция, определяемая как одномерная регуляризованная полная вариация с неоднородными коэффициентами. Доказывается основная теорема, касающаяся разложения субдифференциала этой выпуклой функции на взвешенную сингулярную диффузию и линейную регулярную диффузию. Основная теорема заключается в усилении предыдущего результата о регулярности для квазилинейного уравнения с сингулярностью и, кроме того, предоставлении некоторой полезной информации в продвинутых математических исследованиях движения границ зерен, основанных на энергии типа KWC.

**Ключевые слова:** мажорантные уравнения; функция Ламберта; нелинейные интегральные неравенства; неуллучшаемые оценки; численные методы

**Благодарности:** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 00–00–00000).

**Ссылка для цитирования:** Ivanov I. I., Petrov P. P. Integral Volterra Equations of the First Kind: the Elements of the Theory and Numeric Methods // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 39. С. 1–4.  
<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.39.1>

## 1. Introduction

### 2. Specificity of multilinear Volterra equations of the first kind

In (4)  $N = 1, 2, 3$ , we write the series

**Definition 1.** *The text of the definition*

$\bar{x}$  123456789

**Theorem 1.** *The statement of the theorem*

*Proof.* The text of the proof

□

Based on the theorem 1 we obtain

**Theorem 2.** *The statement of the theorem*

Based on the theorem 2 we obtain

**Theorem.** *The text of the unnumbered theorem*

$$x + y^2 = \ln x \tag{2.1}$$

Известия Иркутского государственного университета.  
Серия «Математика». 2023. Т. 39. С. 1–4

Substituting in the 2.1 instead of  $x$  variable  $y$  we obtain

$$y + y^2 = \ln y \quad (2.2)$$

By the formula 2.2

**Lemma 1.** *The text of the lemma*

**Lemma.** *unnumbered lemma*

**State 1.** *The text of the statement*

**Proposition 1.** *The text of the proposition*

**Corollary 1.** *The text of the corollary*

**Remark 1.** The text of the remark

Given the remark 1

Thus, even in the case of constant kernels continuous solution of the bilinear equation exists ...

### 3. Majorant equation (bilinear case)

Using the notation of [1; 3] ...

### 4. Conclusion

We recommend using the following samples for references. The list of references should be in alphabetic order. If available, please always include DOIs as full DOI links in your reference list (e.g. "https://doi.org/abc").

### References

1. Krnić L. Types of Bases in the Algebra of Logic. *Glasnik Matematicko-Fizicki i Astronomski*, ser 2, 1965, vol. 20, pp. 23-32.
2. Lau D., Miyakawa M. Classification and enumerations of bases in  $P_k(2)$ . *Asian-European Journal of Mathematics*, 2008, vol. 1, no. 2, pp. 255-282.
3. Miyakawa M., Rosenberg I., Stojmenović I. Classification of Three-valued logical functions preserving 0. *Discrete Applied Mathematics*, 1990, vol. 28, pp. 231-249. [https://doi.org/10.1016/0166-218X\(90\)90005-W](https://doi.org/10.1016/0166-218X(90)90005-W)

### Список источников

1. Krnić L. Types of Bases in the Algebra of Logic // *Glasnik Matematicko-Fizicki i Astronomski*. ser. 2, 1965. Vol. 20. P. 23-32.

2. Lau D., Miyakawa M. Classification and enumerations of bases in  $P_k(2)$  // Asian-European Journal of Mathematics. 2008. Vol. 1, № 2. P. 255-282.
3. Miyakawa M., Rosenberg I., Stojmenović I. Classification of Three-valued logical functions preserving 0 // Discrete Applied Mathematics. 1990. Vol. 28. P. 231-249. [https://doi.org/10.1016/0166-218X\(90\)90005-W](https://doi.org/10.1016/0166-218X(90)90005-W)

### Об авторах

**Иванов Иван Иванович**, д-р физ.-мат. наук, проф., Иркутский государственный университет, Иркутск, 664003, Российская Федерация, [avtor@math.isu.ru](mailto:avtor@math.isu.ru), <https://orcid.org/xxxx-xxxx-xxxx-xxxx>

**Петров Петр Петрович**, канд. физ.-мат. наук, доц., Новосибирский государственный технический университет, 630073, Российская Федерация, Новосибирск, [petrov@math1.isu.ru](mailto:petrov@math1.isu.ru), <https://orcid.org/xxxx-xxxx-xxxx-xxxx>

### About the authors

**Ivan I. Ivanov**, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Prof., Irkutsk State University, Irkutsk, 664003, Russian Federation, [avtor@math.isu.ru](mailto:avtor@math.isu.ru), <https://orcid.org/xxxx-xxxx-xxxx-xxxx>

**Petr P. Petrov**, Cand. Sci. (Phys.Math.), Assoc. Prof., Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk, 630073, Russian Federation, [petrov@math1.isu.ru](mailto:petrov@math1.isu.ru), <https://orcid.org/xxxx-xxxx-xxxx-xxxx>

*Поступила в редакцию / Received ....2023*  
*Поступила после рецензирования / Revised ....2023*  
*Принята к публикации / Accepted .....2023*