Серия «Математика»
2016. Т. 16. С. 43—57

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.853.4
MSC 90C26

Анализ поведения генераторов в двухуровневой рыночной модели функционирования ЭЭС *

Н. В. Дресвянская
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН

Аннотация. В работе рассматривается рыночная электроэнергетическая модель взаимодействия поставщиков электроэнергии (ГенКо) и Системного оператора (СО). В рыночных условиях ГенКо формируют собственные стратегии поведения при передаче информации СО. Поставщики могут искажать некоторые параметры представляемых затрат для увеличения своей прибыли. Достижение минимума суммарных затрат в ЭЭС не является их основной целью. СО решает задачу планирования, минимизируя суммарные затраты на производство электроэнергии. При этом СО принимает во внимание значения расходных характеристик, которые ему передают ГенКо. Данная модель рассматривается в двухуровневой постановке. Верхний уровень моделирует действия ГенКо, стремящихся максимизировать прибыль. Нижний уровень задачи моделирует действия СО, который с учетом предоставленной информации о затратах осуществляет планирование загрузки электростанций, определяет узловые равновесные цены, при этом минимизируя суммарные затраты. В работе рассмотрена модель, в которой ограничения по выработке и ограничения на перетоки считаются несущественными. Для данного случая исследованы свойства целевой функции верхнего уровня и доказано существование равновесия по Нэшу. Также в работе представлен численный пример, описывающий основные результаты работы.

Ключевые слова: модель ЭЭС, манипулирование издержками, некооперативная игра k лиц, равновесие по Нэшу, двухуровневое программирование.

1. Введение

Исследованию рынка электроэнергии посвящено много работ. На сегодняшний день актуальной задачей является исследование взаимодействия Системного оператора (СО) и поставщиков электроэнергии [2]. Поставщиками на рынке являются генерирующие компании (ГенКо).

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 15-07-08986.

В рыночных условиях поставщики передают данные о своих затратах Системному оператору. СО решает задачу планирования, минимизируя суммарные затраты на производство электроэнергии, основываясь на данных, получаемых от ГенКо. Однако ГенКо могут искажать некоторые параметры представляемых затрат для увеличения своей прибыли. Подобное взаимодействие СО и ГенКо может быть промоделировано с помощью двухуровневых задач математического программирования (см. [6; 7]). Ранее задачи двухуровневого программирования использовались при моделировании рынка тепловой энергии [5].

В работе рассматривается двухуровневая модель взаимодействия СО и ГенКо. Верхний уровень моделирует действия ГенКо, стремящихся максимизировать прибыль. Нижний уровень задачи моделирует действия СО, который, с учетом предоставленной информации о затратах, определяет объем генерации электроэнергии на каждой электростанции, а также вычисляет узловые равновесные цены, минимизируя суммарные затраты. При этом на верхнем уровне действует несколько ГенКо, каждая из которых стремится максимизировать собственную прибыль, вследствие чего на верхнем уровне возникает задача поиска равновесия.

В полученной модели ограничения по выработке и ограничения на перетоки считаются несущественными. Для данного случая нижний уровень задачи разрешим аналитически, поэтому удалось доказать существование равновесия по Нэшу и указать способ нахождения равновесия (решение системы линейных уравнений).

В работе представлен численный пример, демонстрирующий применимость предложенного подхода к решению рассматриваемой задачи.

2. Постановка задачи

Рассматривается электроэнергетическая система (ЭЭС), состоящая из n узлов и m линий [2; 4]. Не уменьшая общности, будем считать, что в первых k ($k < n$) узлах находятся поставщики электроэнергии (ГЭС, ТЭС, АЭС и т. д.), а в остальных $(n - k)$ — потребители. Каждый из поставщиков эксплуатирует одну электростанцию.

Топология сети задается с помощью матрицы инцидентности A размера $n \times m$, элементы которой определяются следующим образом:

$$a_{ij} = \begin{cases} -1, & \text{если } j\text{-я дуга входит в } i\text{-й узел}, \\ 0, & \text{если } j\text{-я дуга не связана с } i\text{-м узлом}, \\ 1, & \text{если } j\text{-я дуга выходит из } i\text{-го узла}. \end{cases}$$

Известия Иркутского государственного университета.
2016. Т. 16. Серия «Математика». С. 43–57

Перетоки электроэнергии в сети должны удовлетворять первому закону Кирхгофа

$$Ax = b,$$

где x_j — переток по линии j, $b_i \geq 0$ — генерация в i-ом узле при $i = \overline{1,k}$ и нагрузка в i-ом узле (в этом случае считается $b_i \leq 0$) при $i = \overline{k+1,n}$, A — введенная выше матрица инцидентности размера $n \times m$. Необходимо отметить, что матрица инцидентности A обладает следующим свойством: если $\lambda^T A = 0$, то $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n$.

В рамках данной работы спрос является неэластичным, т. е. $b_i = \text{const}$, $i = \overline{k+1,n}$. Генерация электроэнергии поставщиками определяется квадратичной функцией издержек следующего вида

$$c_i(b_i) = \alpha_i b_i^2 + \beta_i b_i + \gamma_i, \quad i = \overline{1,k}, \tag{2.1}$$

где $\alpha_i>0$, $\beta_i>0$, $\gamma_i>0$.

В соответствии с существующими нормативами механизм ценообразования выглядит следующим образом. Системный оператор (СО) решает задачу выпуклого квадратичного программирования

$$\sum_{i=1}^{k} c_i(b_i) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i b_i^2 + \beta_i b_i + \gamma_i \to \min_{(x,b_1,\ldots,b_k)}, \tag{2.2}$$

$$Ax = b. \tag{2.3}$$

Система ограничений (2.3) совместна всегда, целевая функция в (2.2) является строго выпуклой. Это обеспечивает единственность решения задачи в переменных $b_1, \ldots, b_k$.

В (2.2) рассматриваются суммарные эксплуатационные затраты на производство электроэнергии в ЭЭС. Решая эту задачу, СО определяет множители Лагранжа, связанные с ограничениями (2.3), выступающие в дальнейшем в качестве узловых равновесных цен, и объемы генерации для каждого поставщика. Далее на основе этих величин поставщики определяют свою прибыль.

Такая система ценообразования ориентирована только на удовлетворение спроса с минимальными издержками и полностью игнорирует интересы поставщиков. В условиях же рынка ГенКо ориентируются на максимум прибыли, а не на минимум суммарных издержек, что и представляет собой задача (2.2) при ограничениях (2.3).

В этой ситуации поставщики электроэнергии начинают манипулировать своими расходными характеристиками, т. е. значения параметров α_i, β_i, γ_i в (2.2), сообщаемые СО, могут быть сознательно искажены поставщиками и отличаться от истинных значений $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\beta}_i$, $\hat{\gamma}_i$ с целью максимизации своей прибыли при ценах и объемах генерации, определяемых после решения задачи (2.2)-(2.3).

Таким образом, задача верхнего уровня имеет следующий вид:

$$p^*(\beta)b_i^*(\beta) - \hat{\alpha}_i b_i^*(\beta)^2 - \hat{\beta}_i b_i^*(\beta) - \hat{\gamma}_i \to \max_{\beta_i}, \tag{2.4}$$

где $p^*(\beta)$ и $b_i^*(\beta)$ — соответствующие оптимальные значения двойственных и прямых переменных, полученных после решения задачи нижнего уровня при заданном векторном параметре β.

Каждый поставщик i решает задачу двухуровневого программирования (2.4), (2.2)-(2.3). Цель статьи — исследование существования и нахождение равновесного по Нэшу состояния между поставщиками.

Далее предполагается, что $\alpha_i = \hat{\alpha}_i, \gamma = \hat{\gamma}_i$, т.е. изучается влияние только параметров β_i на прибыль ГенКо. Поэтому далее в постановке задачи СО используются переменные параметры β_i, а при нахождении прибыли самими поставщиками — настоящие значения $\hat{\beta}_i$.

3. Анализ двухуровневой математической модели

3.1. Решение задачи нижнего уровня

Для решения задачи (2.2)-(2.3), в которой $\alpha_i = \hat{\alpha}_i, \gamma = \hat{\gamma}_i$, а вектор $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_k)^T$ — внешний параметр, воспользуемся методом Лагранжа. Составим функцию Лагранжа

$$L = \sum_{i=1}^{k} \hat{\alpha}_i b_i^2 + \beta_i b_i + \hat{\gamma}_i + \lambda^T(Ax - b).$$

Вычислим частные производные и приравняем их к нулю:

$$\frac{\partial L}{\partial b_i} = 2\hat{\alpha}_i b_i + \beta_i - \lambda_i = 0, \quad i = \overline{1,k} \tag{3.1}$$

$$L_x = A^T\lambda = 0, \quad L_x = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_m}\right)^T. \tag{3.2}$$

Используя свойство матрицы инцидентности A, из (3.2) получаем, что все цены λ_i равны одной и той же цене, которую обозначим p,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = p. \tag{3.3}$$

Таким образом, в силу (3.1) и (3.3) устанавливается единая цена

$$2\hat{\alpha}_i b_i + \beta_i = p. \tag{3.4}$$

Заметим, что величина $2\hat{\alpha}_i b_i + \beta_i$ есть величина предельных издержек i-го поставщика, поскольку $c_i'(b_i) = 2\hat{\alpha}_i b_i + \beta_i$. Поэтому в оптимальном решении все поставщики выходят на одинаковый уровень предельных издержек, который и равен установившейся цене.

Таким образом, в рассматриваемой модели все расчеты происходят по единой цене, определяемой текущими издержками ГенКо.

Перейдем к описанию прибыли i-го поставщика как функции нулевых предельных издержек $\beta_i = c_i'(0)$.

Функции прибыли поставщиков

$$\pi_i(\beta) = p^*(\beta)b_i^*(\beta) - \left(\hat{\alpha}_i b_i^*(\beta)^2 + \hat{\beta}_i b_i^*(\beta) + \hat{\gamma}_i\right), \quad i = \overline{1,k}, \tag{3.5}$$

запишем в более подходящем для дальнейшего анализа виде.

Из (3.4) получаем

$$(2\hat{\alpha}_i b_i + \beta_i)b_i - \hat{\alpha}_i b_i^2 - \hat{\beta}_i b_i - \hat{\gamma}_i = \hat{\alpha}_i b_i^2 + \beta_i b_i - \hat{\beta}_i b_i - \hat{\gamma}_i,$$

где $\hat{\beta}_i$ — реальные нулевые издержки i-го поставщика.
Поскольку A — матрица инцидентности, то, просуммировав все уравнения системы (2.3), получим уравнение-следствие

$$0 = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

или

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_k = |b_{k+1}| + \ldots + |b_n| = b_T, \tag{3.6}$$

где b_T — суммарная нагрузка.
Выразим из равенства (3.4)

$$b_i = \frac{p - \beta_i}{2\hat{\alpha}_i}, \quad i = \overline{1,k}. \tag{3.7}$$

Подставим это выражение в (3.6)

$$\frac{p - \beta_1}{2\hat{\alpha}_1} + \frac{p - \beta_2}{2\hat{\alpha}_2} + \ldots + \frac{p - \beta_k}{2\hat{\alpha}_k} = b_T$$

или

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{p - \beta_i}{2\hat{\alpha}_i} = b_T.$$

Выразим из последнего равенства p

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{p}{2\hat{\alpha}_i} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{2\hat{\alpha}_i} = b_T,$$

$$\frac{p}{2}\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\hat{\alpha}_i} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\hat{\alpha}_i} = b_T \Rightarrow p^*(\beta) = 2\left[\frac{b_T + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\frac{\beta_i}{\hat{\alpha}_i}}{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\hat{\alpha}_i}}\right]. \tag{3.8}$$

Заметим, что увеличение параметра β_i влечет за собой увеличение $p^*(\beta)$.

Подставим найденную цену $p^*(\beta)$ в (3.7) при $i = q$ и найдем оптимальный объем генерации каждого поставщика

$$b_q^*(\beta) = \frac{\dfrac{2b_T + \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\beta_i}{\hat{\alpha}_i}}{\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\hat{\alpha}_i}} - \beta_q}{2\hat{\alpha}_q} = \frac{2b_T + \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\beta_i}{\hat{\alpha}_i} - \beta_q \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\hat{\alpha}_i}}{\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\hat{\alpha}_i}} \cdot \frac{1}{2\hat{\alpha}_q},$$

$$b_q^*(\beta) = \frac{2b_T + \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\beta_i - \beta_q}{\hat{\alpha}_i}}{\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\hat{\alpha}_i}} \cdot \frac{1}{2\hat{\alpha}_q}. \tag{3.9}$$

Аналитическое выражение функций прибыли как функций параметров β получается подстановкой выражений (3.8) и (3.9) в (3.5) и имеет вид

$$\pi_q(\beta) = K_q \beta_q^2 + \xi_q(\beta), \quad q = \overline{1,k}, \tag{3.10}$$

где $\xi_q(\beta) = \xi_q(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ — афинная относительно β_q функция, K_q — константа, определенная ниже. Как будет видно из дальнейшего анализа, нет необходимости явно выписывать вид функций $\xi_q(\beta)$, тем более что они имеют довольно громоздкий вид.

Подведем промежуточный итог. Мы получили аналитическое решение задачи СО (или задачи нижнего уровня) и подставили его в целевые функции задач верхнего уровня и тем самым исключили из дальнейшего рассмотрения задачу нижнего уровня. В результате осуществили переход к некооперативной игре k лиц.

Далее в статье исследуется некооперативная игра k лиц с функциями выигрыша (3.10) в двух постановках. В первой постановке делается предположение о том, что параметры β_i варьируются в некоторых разумных пределах: $\beta_i \in [0, \overline{\beta}], \overline{\beta} = const > 0$. В результате получаем некооперативную игру k лиц с функциями выигрыша (3.10) и стратегиями $\beta_i \in [0, \overline{\beta}],\ i = \overline{1,k}$. Такую игру будем называть игрой с ограниченными стратегиями. Во второй постановке такого предположения не делается, т. е. считается, что β_q могут принимать значения на всей числовой оси. Такую игру будем называть игрой с неограниченными стратегиями.

Стоит отметить, что прибыль q-го поставщика зависит не только от собственных нулевых предельных издержек, но и от нулевых предельных издержек других поставщиков. Кроме того, увеличение своих собственных издержек (параметра β_q) приведет к уменьшению выпуска электроэнергии поставщиком q, и тем самым, к увеличению выпуска электроэнергии другими участниками игры.

3.2. Проверка потенциальности игры

Известно, что некоторые игры допускают сведение к задаче оптимизации [8]. Такие игры называются потенциальными и нахождение равновесия по Нэшу для них существенно облегчается. Большинство практически интересных игр потенциальными не являются, и это служит препятствием на пути построения вычислительных процедур, гарантировано определяющих равновесную точку. Проверим потенциальность рассматриваемой некооперативной игры k лиц.

Лемма 1. *Некооперативная игра k лиц с функциями выигрыша (3.10) с неограниченными стратегиями не является потенциальной.*

Доказательство. Игра является потенциальной в том и только том случае, когда [8]

$$\frac{\partial^2 \pi_q}{\partial \beta_q \partial \beta_l} = \frac{\partial^2 \pi_q}{\partial \beta_l \partial \beta_q}.$$

Найдем смешанные частные производные второго порядка функции π_q.

$$\frac{\partial^2 \pi_q}{\partial \beta_q \partial \beta_l} = \frac{\partial^2 p}{\partial \beta_q \partial \beta_l} \cdot b_q + \frac{\partial p}{\partial \beta_q} \cdot \frac{\partial b_q}{\partial \beta_l} + \frac{\partial p}{\partial \beta_l} \cdot \frac{\partial \beta_q}{\partial \beta_q} +$$
$$+ p \cdot \frac{\partial^2 b_q}{\partial \beta_q \partial \beta_l} - 2\hat{\alpha}_q \frac{\partial b_q}{\partial \beta_l} \cdot \frac{\partial b_q}{\partial \beta_q} - \hat{\beta}_q \frac{\partial^2 b_q}{\partial \beta_q^2} =$$
$$= \frac{\partial p}{\partial \beta_q} \cdot \frac{\partial b_q}{\partial \beta_l} + \frac{\partial p}{\partial \beta_l} \cdot \frac{\partial b_q}{\partial \beta_q} - 2\hat{\alpha}_q \frac{\partial b_q}{\partial \beta_l} \cdot \frac{\partial b_q}{\partial \beta_q}.$$

Поскольку

$$\frac{\partial p}{\partial \beta_q} = \frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma}, \frac{\partial b_q}{\partial \beta_q} = \frac{1}{2\hat{\alpha}_q} \left[\frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma} - 1 \right], \frac{\partial b_q}{\partial \beta_l} = \frac{1}{2\hat{\alpha}_q} \cdot \frac{1}{\hat{\alpha}_l \sigma}, l \neq q,$$

то

$$\frac{\partial^2 \pi_q}{\partial \beta_q \partial \beta_l} = \frac{\partial p}{\partial \beta_q} \cdot \frac{\partial b_q}{\partial \beta_l} + \frac{\partial b_q}{\partial \beta_q} \left[\frac{\partial p}{\partial \beta_l} - 2\hat{\alpha}_q \frac{\partial b_q}{\partial \beta_l} \right] =$$
$$= \frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma} \cdot \frac{1}{2\hat{\alpha}_q} \cdot \frac{1}{\hat{\alpha}_l \sigma} + \frac{1}{2\hat{\alpha}_q} \left[\frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma} - 1 \right] \cdot \left[\frac{1}{\hat{\alpha}_l \sigma} - 2\hat{\alpha}_q \frac{1}{2\hat{\alpha}_q} \cdot \frac{1}{\hat{\alpha}_l \sigma} \right] = \frac{1}{2\hat{\alpha}_q^2 \hat{\alpha}_l \sigma^2}.$$

Очевидно, что рассматриваемая игра не является потенциальной. □

Поскольку потенциальность определяется свойствами функций выигрыша, то очевидно, что и игра с ограниченными стратегиями также не является потенциальной.

3.3. Поиск равновесия по Нэшу

Везде далее естественным образом (иначе нет игры) предполагается, что $k > 1$. Докажем существование равновесия по Нэшу в некооперативной игре k лиц с функциями выигрыша (3.10) и с ограниченными стратегиями. Для этого нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. *Величины* $K_q < 0 \ \forall q = \overline{1, k}$.

Доказательство. Путем несложных математических преобразований получаем

$$K_q = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\hat{\alpha}_q^2 \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\hat{\alpha}_i} \right)^2 - 1}{\hat{\alpha}_q^3 \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\hat{\alpha}_i} \right)^2} =$$

$$= -\frac{1}{4} \left[\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\hat{\alpha}_q}{\hat{\alpha}_i} \right)^2 - 1}{\hat{\alpha}_q^3 \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\hat{\alpha}_i} \right)^2} \right] = -\frac{1}{4} \left[\frac{\left(1 + \sum\limits_{i \neq q}^{k} \dfrac{\hat{\alpha}_q}{\hat{\alpha}_i} \right)^2 - 1}{\hat{\alpha}_q^3 \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\hat{\alpha}_i} \right)^2} \right] < 0.$$

□

Следовательно, каждая функция $\pi_q(\beta)$ вогнута по β_q. Поскольку множества стратегий — отрезки, т. е. выпуклые и компактные множества, то из известной теоремы о существовании равновесия [3] следует, что в данной игре существует равновесие по Нэшу.

Перейдем теперь к игре с неограниченными стратегиями. Так как функции выигрыша строго вогнуты по своим стратегиям, то для нахождения точек максимума этих функций достаточно приравнять их градиенты к нулю. Продифференцируем π_q по β_q.

$$\frac{\partial \pi_q}{\partial \beta_q} = \frac{\partial p}{\partial \beta_q} \cdot b_q + p \cdot \frac{\partial b_q}{\partial \beta_q} - 2\hat{\alpha}_q b_q \cdot \frac{\partial b_q}{\partial \beta_q} - \hat{\beta}_q \cdot \frac{\partial b_q}{\partial \beta_q} =$$

$$= \frac{\partial p}{\partial \beta_q} \cdot b_q + p \cdot \frac{\partial b_q}{\partial \beta_q} - 2\hat{\alpha}_q b_q \cdot \frac{\partial b_q}{\partial \beta_q} - \beta_q \cdot \frac{\partial b_q}{\partial \beta_q} + \beta_q \cdot \frac{\partial b_q}{\partial \beta_q} - \hat{\beta}_q \cdot \frac{\partial b_q}{\partial \beta_q} =$$

$$= \frac{\partial p}{\partial \beta_q} \cdot b_q + \beta_q \cdot \frac{\partial b_q}{\partial \beta_q} - \hat{\beta}_q \cdot \frac{\partial b_q}{\partial \beta_q}. \tag{3.11}$$

Обозначим $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\hat{\alpha}_i}$, тогда

$$p(\beta) = \frac{2b_T + \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{\beta_i}{\hat{\alpha}_i}}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}\left[2b_T + \sum_{i\neq q}^{k} \frac{\beta_i}{\hat{\alpha}_i} + \frac{\beta_q}{\hat{\alpha}_q}\right] \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial \beta_q} = \frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma},$$

$$b_q(\beta) = \frac{1}{2\hat{\alpha}_q}[p - \beta_q] \Rightarrow \frac{\partial b_q}{\partial \beta_q} = \frac{1}{2\hat{\alpha}_q}\left[\frac{\partial p}{\partial \beta_q} - 1\right] = \frac{1}{2\hat{\alpha}_q}\left[\frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma} - 1\right].$$

Подставим найденные частные производные в (3.11) и приравняем полученное выражение к нулю.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \pi_q}{\partial \beta_q} &= \frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma} \cdot b_q + \beta_q \cdot \left[\frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma} - 1\right] - \hat{\beta}_q \cdot \frac{1}{2\hat{\alpha}_q}\left[\frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma} - 1\right] = \\
&= \frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma} \cdot \frac{1}{2\hat{\alpha}_q}\left[p - \hat{\beta}_q\right] + \beta_q \cdot \frac{1}{2\hat{\alpha}_q^2 \sigma} - \beta_q \cdot \frac{1}{2\hat{\alpha}_q} - \hat{\beta}_q \cdot \frac{1}{2\hat{\alpha}_q}\left[\frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma} - 1\right] = \\
&= \frac{1}{2\hat{\alpha}_q^2 \sigma} \cdot p - \frac{1}{2\hat{\alpha}_q^2 \sigma} \cdot \beta_q + \beta_q \cdot \frac{1}{2\hat{\alpha}_q^2 \sigma} - \beta_q \cdot \frac{1}{2\hat{\alpha}_q} - \hat{\beta}_q \cdot \frac{1}{2\hat{\alpha}_q}\left[\frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma} - 1\right] = \\
&= \frac{1}{2\hat{\alpha}_q^2 \sigma} \cdot p - \beta_q \cdot \frac{1}{2\hat{\alpha}_q} - \hat{\beta}_q \cdot \frac{1}{2\hat{\alpha}_q}\left[\frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma} - 1\right] = 0.
\end{aligned}$$

Домножим полученное выражение на $2\hat{\alpha}_q$. Получим:

$$\frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma} \cdot p - \beta_q - \hat{\beta}_q \cdot \left[\frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma} - 1\right] = 0.$$

Откуда

$$p - \beta_q \hat{\alpha}_q \sigma - \hat{\beta}_q \hat{\alpha}_q \sigma \cdot \left[\frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma} - 1\right] = 0$$

или

$$\frac{1}{\sigma}\left[2b_T + \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\hat{\alpha}_i}\right] - \beta_q \hat{\alpha}_q \sigma = \hat{\beta}_q \hat{\alpha}_q \sigma \cdot \left[\frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma} - 1\right].$$

Домножив последнее выражение на σ, преобразуем его к виду

$$2b_T + \sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\hat{\alpha}_i} - \beta_q \hat{\alpha}_q \sigma^2 = \hat{\beta}_q \hat{\alpha}_q \sigma^2 \cdot \left[\frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma} - 1\right].$$

В результате получим систему линейных уравнений следующего вида:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\beta_i}{\hat{\alpha}_i} - \beta_q \hat{\alpha}_q \sigma^2 = \hat{\beta}_q \hat{\alpha}_q \sigma^2 \cdot \left[\frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma} - 1 \right] - 2b_T. \tag{3.12}$$

В векторно-матричной форме уравнение (3.12) можно записать следующим образом:

$$D\beta = r, \tag{3.13}$$

где

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{\alpha}_1} - \hat{\alpha}_1 \sigma^2 & \frac{1}{\hat{\alpha}_2} & \cdots & \frac{1}{\hat{\alpha}_k} \\ \frac{1}{\hat{\alpha}_1} & \frac{1}{\hat{\alpha}_2} - \hat{\alpha}_2 \sigma^2 & \cdots & \frac{1}{\hat{\alpha}_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\hat{\alpha}_1} & \frac{1}{\hat{\alpha}_2} & \cdots & \frac{1}{\hat{\alpha}_k} - \hat{\alpha}_k \sigma^2 \end{pmatrix}, r = \hat{\beta}_q \hat{\alpha}_q \sigma^2 \cdot \left[\frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma} - 1 \right] - 2b_T.$$

Лемма 3. *Матрица D^{-1} существует и все её элементы отрицательны.*

Доказательство. Перепишем D в следующем виде:

$$D = \Lambda + uv^T,$$

где

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\hat{\alpha}_1 \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\hat{\alpha}_2 \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\hat{\alpha}_k \sigma^2 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{\alpha}_1} \\ \frac{1}{\hat{\alpha}_2} \\ \vdots \\ \frac{1}{\hat{\alpha}_k} \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся известной формулой Шермана-Моррисона [1]

$$(\Lambda + uv^T)^{-1} = \Lambda^{-1} - \frac{1}{1 + v^T \Lambda^{-1} u} \Lambda^{-1} u v^T \Lambda^{-1}.$$

Очевидно, что Λ^{-1} существует. Так как

$$1 + v^T \Lambda^{-1} u = 1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\hat{\alpha}_i^2 \sigma^2} = 1 - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\hat{\alpha}_i^2} = \frac{1}{\sigma^2} \left[\sigma^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\hat{\alpha}_i^2} \right],$$

и $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\hat{\alpha}_i}$, то $\sigma^2 - \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\hat{\alpha}_i^2} = \left[\sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\hat{\alpha}_i}\right]^2 - \sum\limits_{i=1}^{k} \dfrac{1}{\hat{\alpha}_i^2} > 0$ при $\hat{\alpha}_i > 0$. Поэтому знаменатель в дроби больше нуля, деление корректно, следовательно D^{-1} существует и может вычислена по формуле Шермана-Моррисона.

Поскольку

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\hat{\alpha}_1\sigma^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{\hat{\alpha}_2\sigma^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\dfrac{1}{\hat{\alpha}_k\sigma^2} \end{pmatrix}, \Lambda^{-1}u = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\hat{\alpha}_1\sigma^2} \\ -\dfrac{1}{\hat{\alpha}_2\sigma^2} \\ \vdots \\ -\dfrac{1}{\hat{\alpha}_k\sigma^2} \end{pmatrix},$$

$$v^T\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\hat{\alpha}_1^2\sigma^2} & -\dfrac{1}{\hat{\alpha}_2^2\sigma^2} & \cdots & -\dfrac{1}{\hat{\alpha}_k^2\sigma^2} \end{pmatrix},$$

то

$$\Lambda^{-1}uv^T\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\hat{\alpha}_1^3\sigma^4} & \dfrac{1}{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_2^2\sigma^4} & \cdots & \dfrac{1}{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_k^2\sigma^4} \\ \dfrac{1}{\hat{\alpha}_2\hat{\alpha}_1^2\sigma^4} & \dfrac{1}{\hat{\alpha}_2^3\sigma^4} & \cdots & \dfrac{1}{\hat{\alpha}_2\hat{\alpha}_k^2\sigma^4} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{\hat{\alpha}_k\hat{\alpha}_1^2\sigma^4} & \dfrac{1}{\hat{\alpha}_k\hat{\alpha}_2^2\sigma^4} & \cdots & \dfrac{1}{\hat{\alpha}_k^3\sigma^4} \end{pmatrix}.$$

Откуда

$$\Lambda^{-1} - \frac{1}{1+v^T\Lambda^{-1}u}\Lambda^{-1}uv^T\Lambda^{-1} =$$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\hat{\alpha}_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\dfrac{1}{\hat{\alpha}_k} \end{pmatrix} - \frac{1}{\sigma^2 - \sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{1}{\hat{\alpha}_i^2}} \cdot \frac{1}{\sigma^2}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\hat{\alpha}_1^3} & \cdots & \dfrac{1}{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_k^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{\hat{\alpha}_k\hat{\alpha}_1^2} & \cdots & \dfrac{1}{\hat{\alpha}_k^3} \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\sigma^2}\left[\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\hat{\alpha}_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \dfrac{1}{\hat{\alpha}_k} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sigma^2 - \sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{1}{\hat{\alpha}_i^2}}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\hat{\alpha}_1^3} & \cdots & \dfrac{1}{\hat{\alpha}_1\hat{\alpha}_k^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{\hat{\alpha}_k\hat{\alpha}_1^2} & \cdots & \dfrac{1}{\hat{\alpha}_k^3} \end{pmatrix}\right].$$

Следовательно, матрица D^{-1} имеет отрицательные (не равные нулю) элементы.

$\square$

Лемма 4. *Элементы вектора r отрицательны.*

Доказательство. Рассмотрим компоненты вектора правых частей

$$r_q = \hat{\beta}_q \hat{\alpha}_q \sigma^2 \cdot \left[\frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma} - 1\right] - 2b_T.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma} - 1 = \frac{1 - \hat{\alpha}_q \sigma}{\hat{\alpha}_q \sigma} = \frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma}\left[1 - \hat{\alpha}_q \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\hat{\alpha}_i}\right] =$$
$$= \frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma}\left[1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{\alpha}_q}{\hat{\alpha}_i}\right] = \frac{1}{\hat{\alpha}_q \sigma}\left[-\sum_{i \neq q} \frac{\hat{\alpha}_q}{\hat{\alpha}_i}\right] < 0,$$

то $r_q < 0 \ \forall q$.

□

Теорема. *Решение β^* системы (3.13) существует и единственно, компоненты вектора β^* положительны и*

$$\beta^* = -\frac{1}{\sigma^2}\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{\alpha}_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{\hat{\alpha}_k} \end{pmatrix} + \frac{1}{\sigma^2 - \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{\hat{\alpha}_i^2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\hat{\alpha}_1^3} & \cdots & \frac{1}{\hat{\alpha}_1 \hat{\alpha}_k^2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{\hat{\alpha}_k \hat{\alpha}_1^2} & \cdots & \frac{1}{\hat{\alpha}_k^3} \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_k \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Следует из двух последних лемм. □

4. Численный пример

Рассмотрим ЭЭС, состоящую из двух ГенКо и двух потребителей [2]. Каждый из поставщиков эксплуатирует одну электростанцию. Исходные данные приведены в табл. 1. Оба поставщика стремятся увеличить свою прибыль за счет искаженных коэффициентов β_i в предоставляемых СО характеристиках затрат своих электростанций.

Если бы ГенКо передавали Системному оператору точные характеристики издержек, приведенные в табл. 1, то результат соответствовал бы данным табл. 2. Прибыли ГенКо в таком случае составили бы соответственно $\pi_1 = 7\,499,3$, $\pi_2 = 3\,738,2$ руб. Однако СО не имеет информации о точных характеристиках издержек.

Таблица 1

Исходные данные

Узел	Точные характеристики издержек, $c_i(b_i)$	Спрос, МВт
1	$c_1(b_1) = 0{,}1b_1^2 + 70b_1$	72,2
2	$c_2(b_2) = 0{,}08b_2^2 + 90b_2$	–
3	–	416,9

Таблица 2

Результат расчета с точными характеристиками издержек

Узел	b_i, МВт	Цены, руб./МВтч	Прибыль поставщиков, руб.	Ветвь	x_j, МВт
1	272,9	124,6	7 499,3	1-2	18,7
2	216,2	124,6	3 738,2	1-3	253,3
3	-	-	-	2-3	234,7

Таблица 3

Результат расчета с определением искаженных характеристик издержек

Узел	b_i, МВт	β_i	Цены, руб./МВтч	Прибыль поставщиков, руб.	Ветвь	x_j, МВт
1	342,6	171,5	240,0	46 509,1	1-2	65,4
2	146,5	216,6	240,0	20 257,2	1-3	277,2
3	-	-	-	-	2-3	211,9

ГенКо формируют информацию о производственных возможностях своих электростанций для передачи СО. В табл. 3 приведено решение, полученное в предположении, что ГенКо искажают информацию о характеристиках эксплуатационных затрат своих электростанций.

ГенКо за счет изменения параметров β_i увеличивают уровень рыночных цен. Повышение цен обеспечивает поставщикам возможность получения дополнительной прибыли. По данным таблицы 3 прибыль ГенКо возросла до $\pi_1 = 46\,509{,}1$, $\pi_2 = 20\,257{,}2$ руб. соответственно.

5. Заключение

В работе была рассмотрена модель взаимодействия СО и ГенКо. Данная модель сформулирована как двухуровневая задача математического программирования. При этом на верхнем уровне действуют несколько ГенКо, каждая из которых стремится максимизировать собственную прибыль за счет искажения расходных характеристик, передаваемых СО.

В полученной модели ограничения по выработке и ограничения на перетоки считаются несущественными. Было доказано существование равновесия по Нэшу в игре с ограниченными стратегиями. Равновесие в игре с неограниченными стратегиями было найдено аналитически. Равновесие это единственно и находится во внутренней точке неотрицательного ортанта, что соответствует содержательной интерпретации нулевых предельных издержек. Рассмотрен численный пример для простейшей ЭЭС, демонстрирующий эффект, полученный ГенКо вследствие предоставления СО искаженных характеристик затрат своих электростанций.

Список литературы

1. Каханер Д. Численные методы и математическое обеспечение : пер. с англ. / Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш. – М. : Мир, 1998. – 575 с.
2. Нечаев И. А. Планирование загрузки электростанций в условиях оптового рынка электроэнергии / И. А. Нечаев, С. И. Паламарчук // Изв. РАН. Энергетика. – 2011. – № 6. – С. 71–84.
3. Никайдо Х. Заметка о бескоалиционных выпуклых играх // Бесконечные антагонистические игры / Х. Никайдо, К. Исода ; под ред. Н. Н. Воробьева. – М. : Физматгиз, 1963. – С. 449–458.
4. Паламарчук С. И. Планирование двусторонних договоров на поставку электроэнергии в условиях конкурентного оптового рынка / С. И. Паламарчук // Изв. РАН. Энергетика. – 2011. – № 2. – С. 77–91.
5. Стенников В. А. Оптимизация теплового рынка на основе двухуровневого подхода / В. А. Стенников, О. В. Хамисов, А. В. Пеньковский // Теплоэнергетика. – 2011. – Т. 58, № 12. – С. 67–72.
6. Bard J. F. Practical Bilevel Optimization / J. F. Bard. – Dordrecht, The Netherlands : Kluwer Academic Publishers, 1998. – 488 p.
7. Dempe S. Foundations of Bilevel Programming / S. Dempe. – Dordrecht, The Netherlands : Kluwer Academic Publishers, 2002. – 320 p.
8. Monderer D. Potential Games / D. Monderer, L. S. Shapley // Games and Economic Behavior. – 1996. – N 14. – P. 124–143.

Дресвянская Надежда Владимировна, аспирант, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, д. 130 (e-mail: nadyadresvyanskya@gmail.com)

N. V. Dresvyanskaya

The Analysis of the Behavior of Generators in the Two-Level Market Model of Functioning of the EPS

Abstract. Electricity market model of interaction between producers (Generation Companies – GC) and System Operator (SO) is considered. We analyze the situation when power producers try to increase their profit distorting their technical parameters. SO solves a generation scheduling problem, minimizing total costs of electricity generation and calculating the nodal prices (dual variables) on the basis of technical parameters of the power plants provided by the producers. The problem is considered in two-level statement. The upper level corresponds to GC which try to increase their profit. The lower level corresponds to SO which solves the generation scheduling problem. SO takes into account technical parameters derived from GC. We study properties of the objective function of the upper level and investigate the existence of the Nash equilibrium. Numerical example for a simple electrical power system is presented. In this example we show how the GC increase profit distorting technical parameters.

Keywords: Electric Power System (EPS), manipulation costs, noncooperative multiperson game, Nash equilibrium, bilevel programming.

References

1. Kahaner D., Moler C., Nash S. Numerical Methods and Software. Prentice Hall, 1989. 504 p.
2. Nechaev I.A. Power plant generation scheduling in the wholesale electricity market environment (in Russian). *Izvestiya Akademii Nauk. Energetika*, 2011, no 6, pp. 71–84.
3. Nikaido H., Isoda K. Note on Noncooperative Convex Games. *Pacific Journal of Mathematics*, 1955, vol. 5, no 5, pp. 807-815.
4. Palamarchuk S.I. Bilateral contract scheduling for electricity delivery in the competitive wholesale market (in Russian). *Izvestiya Akademii Nauk. Energetika*, 2011, no 2, pp. 77–91.
5. Stennikov V.A., Khamisov O.V., Pen'kovskii A.V. Optimizing the heat market on the basis of a two-level approach. *Thermal Engineering*, 2011, vol. 58, no 12, pp. 1043–1048.
6. Bard J.F. Practical Bilevel Optimization. Dordrecht, The Netherlands : Kluwer Academic Publishers, 1998. 488 p.
7. Dempe S. Foundations of Bilevel Programming. Dordrecht, The Netherlands : Kluwer Academic Publishers, 2002. 320 p.
8. Monderer D., Shapley L.S. Potential Games. *Games and Economic Behavior*, 1996, no 14, pp. 124–143.

Dresvyanskaya Nadezhda Vladimirovna, Postgraduate, Melentiev Energy Systems Institute SB RAS, 130, Lermontov st., Irkutsk, 664033 (e-mail: nadyadresvyanskya@gmail.com)