Серия «Математика»
2016. Т. 16. С. 58—70

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 519.7
MSC 08A99,03B50

Классификация и типы базисов ультрафункций ранга 2 *

С. В. Замарацкая
ОГБУЗ «Медицинский информационно-аналитический центр Иркутской области»

В. И. Пантелеев
Иркутский государственный университет

Аннотация. В статье рассматривается классификация ультрафункций ранга 2 относительно принадлежности максимальным клонам.

Известно, что число максимальных клонов множества всех ультрафункций равно 11 (В. И. Пантелеев, 2009 г.). В работе показано, что отношение принадлежности максимальным клонам разбивает множество всех ультрафункций на 45 классов эквивалентности.

Используя представленное разбиение, перечисляются различные типы базисов одинаковой мощности. Два базиса считаются разными по типу, если хотя бы для одной ультрафункции некоторого базиса не найдется эквивалентной в другом базисе. Показано, что существует ровно один тип базиса мощности 1, 180 типов базисов мощности 2, 686 типов базисов мощности 3 и 28 типов базисов мощности 4. Мощность 4 является максимальной мощностью базисов.

Ключевые слова: ультрафункция, клон, базис, максимальный клон.

1. Введение

Вопросы классификации являются одними из важнейших при изучении дискретных объектов. В теории дискретных функций интерес вызывают классификации, построенные на основе операторов замыкания. Операторы замыкания приводят к естественным вопросам о замкнутых множествах, о порождающих (полных) множествах и критериях полноты. Если критерий полноты основан на максимальных замкнутых классах, то отношение принадлежности функций максимальным

* Работа выполнена при поддержке РФФИ: проект № 13-01-00621.

замкнутым классам является отношением эквивалентности и, соответственно, приводит к естественной классификации как самих функций, так и полных множеств (базисов).

Среди операторов замыкания чаще всего рассматривается операция суперпозиции и соответствующие ей классификации.

Известно [4; 7], что для множества булевых функций с операцией суперпозиции число классов эквивалентности относительно принадлежности максимальным клонам равно 15, а все базисы (минимальные порождающие множества) разбиваются на следующие типы: один тип мощности 1, 17 типов мощности 2, 22 типа мощности 3, 2 типа мощности 4. Классы эквивалентности и типы базисов различных функций можно посмотреть, например, в работах [2; 5; 6; 8; 9].

В работе рассматриваются так называемые ультрафункции ранга 2 и показано, что отношение принадлежности максимальным клонам разбивает множество всех ультрафункций на 45 классов эквивалентности.

Используя представленное разбиение, перечисляются различные типы базисов одинаковой мощности. Показано, что существует ровно один тип базиса мощности 1, 180 типов базисов мощности 2, 686 типов базисов мощности 3 и 28 типов базисов мощности 4. Мощность 4 является максимальной мощностью базисов.

2. Основные понятия и предварительные результаты

Пусть $E = \{0, 1\}$, $F = \{\{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Отображение $f : E^n \to F$ называется n-местной ультрафункцией ранга 2. В дальнейшем мы не различаем одноэлементные множества и элементы этого множества, а для множества $\{0, 1\}$ используем обозначение «$-$».

Множество всех ультрафункций обозначим через P_2^-.

Пусть $f(x_1, ..., x_m)$,$f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n) \in P_2^-$. Суперпозиция $f(f_1, ..., f_m)$ порождает ультрафункцию $h(x_1, ..., x_n)$ следующим образом: для каждого набора значений переменных $(a_1, ..., a_n) \in E^n$

$$h(a_1, ..., a_n) = \begin{cases} \bigcap\limits_{b_i \in f_i(a_1,...,a_n)} f(b_1, ..., b_m), & \text{если это пересечение} \\ & \text{не пусто;} \\ \bigcup\limits_{b_i \in f_i(a_1,...,a_n)} f(b_1, ..., b_m), & \text{иначе.} \end{cases}$$

В работе используем стандартные определения клона, максимального клона, полного множества и базиса, сохранения предиката функцией. Все необходимые определения можно посмотреть в [1; 2].

Приведем список всех 11 максимальных клонов в P_2^- [3]:

1) $\mathbb{P}_2$ — класс всюду определенных функций;

2) $\mathbb{T}_0^-$ — класс функций, которые сохраняют 0;

3) $\mathbb{T}_1^-$ — класс функций, которые сохраняют 1;

4) $\mathbb{S}^-$ – класс функций, сохраняющих предикат $\mathbb{S}^- = \begin{pmatrix} 0\,1\,- \\ 1\,0\,- \end{pmatrix}$;

5) $\mathbb{L}^-$ — класс функций, сохраняющих предикат $\mathbb{L}^- = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,1\,- \\ 1\,0\,1\,0\,- \end{pmatrix}$;

6) $\mathbb{M}^-$ — класс функций, сохраняющих предикат $\mathbb{M}^- = \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,-\,0\,- \\ 1\,0\,1\,-\,-\,1 \end{pmatrix}$;

7) $\mathbb{K}_1$ — класс функций, сохраняющих предикат $\mathbb{K}_1 = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,-\,1\,- \\ 1\,0\,1\,-\,-\,1 \end{pmatrix}$;

8) $\mathbb{K}_2$ – класс функций, сохраняющих предикат $\mathbb{K}_2 = \begin{pmatrix} 0\,0\,0\,-\,-\,1 \\ 0\,1\,-\,0\,-\,0 \end{pmatrix}$;

9) $\mathbb{K}_3$ — класс функций, сохраняющих предикат

$$\mathbb{K}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & - & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & - & 0 & 0 & - & - \\ 0 & 0 & - & - & - & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & 1 & - & - & 1 & 1 & 0 \\ 0 & - & 0 & - & - & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 1 & - & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

10) $\mathbb{K}_4$ — класс функций, сохраняющих предикат

$$\mathbb{K}_4 = \begin{pmatrix} - & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & - & 1 \\ - & - & 0 & 1 & 0 & - & 0 & 0 & 0 & - & 1 \\ - & 0 & 1 & 0 & - & - & 0 & 0 & - & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

11) $\mathbb{K}_5$ — класс, состоящий из всех функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной, а также из функций принимающих два значения, одно из которых есть «$-$».

Для максимальных клонов справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если $f \in \mathbb{P}_2$ и $f \notin \mathbb{M}^-$ или $f \in \mathbb{S}^-$ и $f \notin \mathbb{L}^-$, то $f \notin \mathbb{K}_3$ и $f \notin \mathbb{K}_4$.*

Доказательство. Рассматриваемые ультрафункции являются всюду определенными и не сохраняющими предикат $\mathbb{M}^-$ или сохраняющими предикат $\mathbb{S}^-$ и не сохраняющими $\mathbb{L}^-$.

Рассмотрим первый случай. Ультрафункция f не сохраняет предикат $\mathbb{M}^-$. Это означает, что

$$f \begin{pmatrix} 1\,0\,0\,-\,0\,- \\ 1\,0\,1\,-\,-\,1 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ - \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} - \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Первый и последний варианты из возможных значений ультрафункции f дадут непринадлежность клону $\mathbb{K}_3$ при рассмотрении строк предиката $\mathbb{M}^-$ в последовательности верхняя, нижняя и снова нижняя.

Теперь, рассматривая эти же варианты значений ультрафункции f, выбрав для верхней строки предиката $\mathbb{M}^-$ уточнение, где значение функции равно 1, а для нижней строки – уточнение, подставляя 1 вместо «$-$», получим, с учетом того, что функция принадлежит классу $\mathbb{P}_2$,

$$f \begin{pmatrix} 1\,0\,0 \\ 1\,0\,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

При рассмотрении строк в последовательности верхняя, нижняя и снова верхняя, имеем непринадлежность клону $\mathbb{K}_4$.

Из трех возможных вариантов значений ультрафункции f осталось рассмотреть вариант $(1-)^t$. Для нижней строки предиката $\mathbb{M}^-$ выберем уточнение, где значение функции равно 0, а для верхней строки выберем уточнение, подставляя 0 вместо «$-$». На этих строках ультрафункция f будет принимать только значение $(10)^t$, поскольку она является всюду определенной.

Таким образом, при рассмотрении строк в последовательности верхняя, нижняя и снова нижняя, имеем непринадлежность клону $\mathbb{K}_3$, а при рассмотрении строк в последовательности верхняя, нижняя и снова верхняя, имеем непринадлежность клону $\mathbb{K}_4$.

Теперь рассмотрим второй случай. Ультрафункция f не сохраняет предикат $\mathbb{L}^-$. Это означает, что

$$f\begin{pmatrix}1\,0\,0\,1\,-\\1\,0\,1\,0\,-\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}0\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Достаточно рассмотреть первый и третий варианты возможных значений ультрафункции f, так как второй и четвертый варианты можно к ним свести перестановкой верхней и нижней строк.

Рассмотрим вариант $(0-)$. Непринадлежность клону $\mathbb{K}_3$ следует из рассмотрения строк предиката $\mathbb{L}^-$ в последовательности нижняя, верхняя и снова нижняя. Полученное значение ультрафункции f на этих строках, $(-0-)^t$, не принадлежит предикату клона $\mathbb{K}_3$.

Допишем для строк предиката $\mathbb{L}^-$ ниже противоположные строки и, с учетом сохранения функцией предиката $\mathbb{S}^-$, получим

$$f\begin{pmatrix}1\,0\,0\,1\,-\\1\,0\,1\,0\,-\\0\,1\,1\,0\,-\\0\,1\,0\,1\,-\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\\1\\-\end{pmatrix}.$$

Дописав ниже строку $(0100-)$ и, рассмотрев строки снизу вверх, получим непринадлежность клону $\mathbb{K}_4$.

Теперь рассмотрим вариант $(1-)$. Дописав к строкам предиката $\mathbb{L}^-$ выше строку $(1000-)$, получим:

$$f\begin{pmatrix}1\,0\,0\,0\,-\\1\,0\,0\,1\,-\\1\,0\,1\,0\,-\end{pmatrix}\in\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\\1\\-\end{pmatrix}\right\}.$$

Из полученных значений следует непринадлежность клону $\mathbb{K}_4$.

Далее для строк предиката $\mathbb{L}^-$ допишем ниже строку, противоположную верхней строке и получим

$$f\begin{pmatrix}1\,0\,0\,1 - \\ 1\,0\,1\,0 - \\ 0\,1\,1\,0 -\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -\\ 0\end{pmatrix}.$$

Так как ультрафункция f сохраняет предикат $\mathbb{S}^-$, то на дописанной строке ее значение равно 0. Рассмотрим строки приведенного равенства в последовательности вторая, третья и снова вторая, получим непринадлежность клону $\mathbb{K}_3$.

Таким образом, ультрафункции не принадлежат клонам $\mathbb{K}_3$, $\mathbb{K}_4$ одновременно. □

В [1] были определены различные свойства, которыми обладают максимальные клоны. Сформулируем свойства максимальных клонов из [1] и леммы 1 в виде следующего предложения.

Предложение 1. *Пусть $f \in P_2^-$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если $f \notin \mathbb{T}_0^-$ и $f \notin \mathbb{K}_5$, то $f \notin \mathbb{M}^-, f \notin \mathbb{K}_2, f \notin \mathbb{K}_3$ и $f \notin \mathbb{K}_4$;*
2) *если $f \notin \mathbb{T}_1^-$ и $f \notin \mathbb{K}_5$, то $f \notin \mathbb{M}^-, f \notin \mathbb{K}_1, f \notin \mathbb{K}_3$ и $f \notin \mathbb{K}_4$;*
3) *если $f \in \mathbb{T}_0^-$ и $f \notin \mathbb{T}_1^-$ или $f \notin \mathbb{T}_0^-$ и $f \in \mathbb{T}_1^-$, то $f \notin \mathbb{S}^-$;*
4) *если $f \notin \mathbb{S}^-$, то $f \notin \mathbb{K}_1$ или $f \notin \mathbb{K}_2$;*
5) *если $f \in \mathbb{T}_0^-, f \in \mathbb{T}_1^-, f \notin \mathbb{S}^-$ или $f \notin \mathbb{T}_0^-, f \notin \mathbb{T}_1^-, f \notin \mathbb{S}^-$, то $f \notin \mathbb{L}^-$;*
6) *если $f \in \mathbb{T}_0^-, f \notin \mathbb{T}_1^-, f \notin \mathbb{K}_5$, то $f \notin \mathbb{L}^-$ или $f \notin \mathbb{K}_2$;*
7) *если $f \notin \mathbb{T}_0^-, f \in \mathbb{T}_1^-, f \notin \mathbb{K}_5$, то $f \notin \mathbb{L}^-$ или $f \notin \mathbb{K}_1$;*
8) *если $f \notin \mathbb{T}_0^-$ и $f \notin \mathbb{K}_1$ или $f \notin \mathbb{T}_1^-$ и $f \notin \mathbb{K}_2$, то $f \notin \mathbb{M}^-$;*
9) *если $f \in \mathbb{S}^-$ и $f \notin \mathbb{M}^-$, то $f \notin \mathbb{K}_1$ и $f \notin \mathbb{K}_2$;*
10) *если $f \in \mathbb{S}^-$ и $f \in \mathbb{M}^-$, то $f \in \mathbb{K}_1$ и $f \in \mathbb{K}_2$;*
11) *если $f \notin \mathbb{P}_2$ и $f \notin \mathbb{K}_5$, то $f \notin \mathbb{L}^-$, $f \notin \mathbb{K}_3$, $f \notin \mathbb{K}_4$;*
12) *если $f \in \mathbb{P}_2$ и $f \notin \mathbb{M}^-$ или $f \in \mathbb{S}^-$ и $f \notin \mathbb{L}^-$, то $f \notin \mathbb{K}_3$ и $f \notin \mathbb{K}_4$;*
13) *если $f \in \mathbb{T}_0^-$ и $f \notin \mathbb{K}_2$, то $f \notin \mathbb{K}_4$;*
14) *если $f \in \mathbb{T}_1^-$ и $f \notin \mathbb{K}_1$, то $f \notin \mathbb{K}_3$;*
15) *если $f \in \mathbb{P}_2$, $f \notin \mathbb{K}_5$, то $f \notin \mathbb{L}^-$ или $f \notin \mathbb{K}_1$, $f \notin \mathbb{K}_2$, $f \notin \mathbb{K}_3$, $f \notin \mathbb{K}_4$.*

3. Классификация ультрафункций

Принадлежность ультрафункций максимальным клонам разбивает все множество ультрафункций на классы эквивалентности.

Класс эквивалентности, порождаемый функцией f, задается вектором $\phi(f) = (a_1, \ldots, a_{11})$ в котором

$$a_i = \begin{cases}0, \text{ если } f \in N_i\\ 1, \text{ если } f \notin N_i\end{cases},$$

и $N_1 = \mathbb{P}_2$, $N_2 = \mathbb{T}_0^-$, $N_3 = \mathbb{T}_1^-$, $N_4 = \mathbb{S}^-$, $N_5 = \mathbb{L}^-$, $N_6 = \mathbb{M}^-$, $N_7 = \mathbb{K}_1$, $N_8 = \mathbb{K}_2$, $N_9 = \mathbb{K}_3$, $N_{10} = \mathbb{K}_4$, $N_{11} = \mathbb{K}_5$.

Число максисимальных клонов равно 11, поэтому число классов эквивалентности не более 2^{11}.

Ограничения из предложения 1 позволяют понизить верхнюю оценку на число классов эквивалентности.

Теорема 1. *Максимальные клоны порождают не более 45 классов эквивалентности.*

Доказательство. Сначала рассмотрим все ультрафункции, принадлежащие клону $\mathbb{K}_5$. Возможных классов эквивалентности таких ультрафункций 1024.

Разделим ультрафункции клона $\mathbb{K}_5$ на два основных множества:
1) ультрафункции существенно зависящие от одной переменной;
2) ультрафункции существенно зависящие более чем от одной переменной и принимающие два значения, одно из которых есть «$-$».

К первому множеству относятся 9 ультрафункций: (0), (1), (01), (10), ($-$), (0$-$), ($-$0), (1$-$), ($-$1). Соответственно, они являются представителями 9 классов эквивалентности.

Ультрафункции второго множества рассмотрим в виде двух подмножеств:
2.1) ультрафункции принимающие значения 0 и «$-$»;
2.2) ультрафункции принимающие значения 1 и «$-$».

Первое подмножество ультрафункций принадлежит клонам $\mathbb{K}_2$ и $\mathbb{K}_4$. Это следует из того, что среди значений ультрафункций нет 1, а значит невозможно получить наборы, не принадлежащие предикатам клонов $\mathbb{K}_2$ и $\mathbb{K}_4$. Также первое подмножество ультрафункций не принадлежит клонам $\mathbb{P}_2$, $\mathbb{T}_1^-$, $\mathbb{S}^-$, $\mathbb{L}^-$, $\mathbb{K}_1$ и $\mathbb{K}_3$. Непринадлежность первым двум клонам очевидна.

Покажем непринадлежность клону $\mathbb{S}^-$. Для этого выберем набор $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, на котором ультрафункция f имеет значение 0, и рассмотрим этот набор с противоположным $(\bar{\alpha}_1, ..., \bar{\alpha}_n)$. Получим:

$$f\begin{pmatrix}\alpha_1 \dots \alpha_n\\ \bar{\alpha_1} \dots \bar{\alpha_n}\end{pmatrix} \in \left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-\end{pmatrix}\right\}.$$

На выбранных наборах возможные значения ультрафункции f не принадлежат предикату клона $\mathbb{S}^-$.

Непринадлежность клону $\mathbb{K}_1$ показывается аналогично.

Непринадлежность клону $\mathbb{L}^-$ дают наборы, на которых ультрафункция f имеет значение 0 и «$-$».

Покажем непринадлежность клону $\mathbb{K}_3$. Для этого рассмотрим набор $(1, ..., 1)$. Пусть на этом наборе ультрафункция f имеет значение 0, тогда есть набор $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, на котором ультрафункция f имеет значение

«$-$». Получим

$$f\begin{pmatrix}\alpha_1 \dots \alpha_n \\ 1 \dots 1 \\ 1 \dots 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}- \\ 0 \\ 0\end{pmatrix},$$

что показывает непринадлежность клону $\mathbb{K}_3$.

Если же на наборе $(1, \dots, 1)$ ультрафункция f имеет значение «$-$», то непринадлежность клону $\mathbb{K}_3$ следует из равенства

$$f\begin{pmatrix}1 \dots 1 \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \\ 1 \dots 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}- \\ 0 \\ -\end{pmatrix}.$$

Таким образом, для первого подмножества ультрафункций осталось 4 возможных класса эквивалентности:

$$(10111010100), (10111110100), (11111010100), (11111110100).$$

При этом третий класс эквивалентности из перечисленных противоречит утверждению 8 в предложении 1, а первый и четвертый классы уже были получены ранее. Следовательно, новым является только класс эквивалентности (10111110100).

Двойственным образом второе подмножество ультрафункций дает только класс эквивалентности (11011101010).

В результате для всех ультрафункций, принадлежащих клону $\mathbb{K}_5$, имеем 11 классов эквивалентности.

Теперь рассмотрим все ультрафункции, не принадлежащие клону $\mathbb{K}_5$. Возможных классов эквивалентности таких ультрафункций 1024. Разделим эти ультрафункции на два основных множества:

1) всюду определенные ультрафункции существенно зависящие более чем от одной переменной;

2) ультрафункции, существенно зависящие более чем от одной переменной и принимающие все три значения 0, 1, $-$.

Каждое множество разобьем на четыре подмножества:

a) ультрафункции, принадлежащие клонам $\mathbb{T}_0^-$ и $\mathbb{T}_1^-$;

b) ультрафункции, принадлежащие клону $\mathbb{T}_0^-$, но не принадлежащие клону $\mathbb{T}_1^-$;

c) ультрафункции, не принадлежащие клону $\mathbb{T}_0^-$, но принадлежащие клону $\mathbb{T}_1^-$;

d) ультрафункции, не принадлежащие клонам $\mathbb{T}_0^-$ и $\mathbb{T}_1^-$.

Таким образом, всего необходимо рассмотреть 8 случаев.

Случай 1.a. Ультрафункции принадлежат клонам $\mathbb{P}_2$, $\mathbb{T}_0^-$, $\mathbb{T}_1^-$ и не принадлежат клону $\mathbb{K}_5$. Рассмотрим два случая: 1.a.1) ультрафункции принадлежат клону $\mathbb{S}^-$; 1.a.2) ультрафункции не принадлежат клону $\mathbb{S}^-$. Для каждого случая возможно 64 класса эквивалентности. В первом случае при принадлежности ультрафункций клону $\mathbb{M}^-$ применим утверждения 10, 15, 12 предложения 1, а при непринадлежности клону $\mathbb{M}^-$ — утверждения 9 и 12. В результате для случая 1.a.1 имеем максимум 3 класса эквивалентности: (00001000111), (00000111111) и (00001111111).

В случае 1.a.2 применим утверждения 4 и 5 предложения 1, согласно которым рассматриваемые ультрафункции не принадлежат клону $\mathbb{L}^-$, а также клону $\mathbb{K}_1$ или $\mathbb{K}_2$. Следовательно, исключим классы эквивалентности, в которых такие ультрафункции должны принадлежать клону $\mathbb{L}^-$, и классы эквивалентности, в которых ультрафункции принадлежат клонам $\mathbb{K}_1$ и $\mathbb{K}_2$ одновременно. Таких классов эквивалентности $2^5 + 2^3 = 40$. Осталось 24 класса эквивалентности следующих видов: (00011_01__1),(00011_10__1),(00011_11__1), где на месте «_» может быть 0 или 1. К ультрафункциям этих классов применим утверждения 13 и 14 предложения 1, согласно которым такие ультрафункции не принадлежат клону $\mathbb{K}_3$ (если имеется непринадлежность клону $\mathbb{K}_1$) и клону $\mathbb{K}_4$ (если имеется непринадлежность клону $\mathbb{K}_2$). Таким образом, исключим $2^2 + 2^2 + 2 \cdot 3 = 14$ классов эквивалентности, и останется 10 классов: (00011_01_11),(00011_101_1),(00011_11111). Из них 2 класса эквивалентности — (00011101011) и (00011110101), противоречат утверждению 12 предложения 1. Следовательно, в случае 1.a.2 останется 8 классов эквивалентности. Итоговым результатом случая 1.a являются 11 классов эквивалентности.

Случай 1.b. Ультрафункции принадлежат клонам $\mathbb{P}_2$, $\mathbb{T}_0^-$ и не принадлежат клонам $\mathbb{T}_1^-$, $\mathbb{K}_5$. Применим утверждения 2 и 3 предложения 1, согласно которым рассматриваемые ультрафункции не принадлежат клонам $\mathbb{S}^-$, $\mathbb{M}^-$, $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_3$, $\mathbb{K}_4$. Остались классы вида (0011_11_111), где на месте «_» может быть 0 или 1. Из этих классов по утверждению 6 исключится класс эквивалентности (00110110111). В итоге для данного случая останется 3 класса эквивалентности.

Случай 1.c. Ультрафункции принадлежат клонам $\mathbb{P}_2$, $\mathbb{T}_1^-$ и не принадлежат клонам $\mathbb{T}_0^-$, $\mathbb{K}_5$. Применим утверждения 1, 3 и 7из предложения 1. В итоге для данного случая останется 3 класса эквивалентности.

Случай 1.d. Ультрафункции принадлежат клону $\mathbb{P}_2$ и не принадлежат клонам $\mathbb{T}_0^-$, $\mathbb{T}_1^-$, $\mathbb{K}_5$. Применим утверждения 1 и 2 предложения 1, согласно которым рассматриваемые ультрафункции не принадлежат клонам $\mathbb{M}^-$, $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$, $\mathbb{K}_3$, $\mathbb{K}_4$. Тем самым исключим из дальнейшего рассмотрения классы эквивалентности, в которых ультрафункции должны принадлежать хотя бы одному из этих клонов. Таких классов эквивалентности $2^2 * (2^5 - 1) = 124$. Осталось рассмотреть 4 возможных класса эквивалентности вида (011__111111), где на месте «_» может быть 0 или 1. Из этих классов по утверждению 5 исключится класс эквивалентности (01110111111). В итоге имеем 3 возможных класса эквивалентности.

Случай 2.a. Ультрафункции принадлежат клонам $\mathbb{T}_0^-$, $\mathbb{T}_1^-$ и не принадлежат клонам $\mathbb{P}_2$, $\mathbb{K}_5$. Применим утверждение 11 предложения 1, согласно которому рассматриваемые ультрафункции не принадлежат клонам $\mathbb{L}^-$, $\mathbb{K}_3$, $\mathbb{K}_4$. Тем самым исключим из дальнейшего рассмотрения классы эквивалентности, в которых ультрафункции должны принадлежать хотя бы одному из этих клонов. Таких классов эквивалентности $2^4 \cdot (2^3 - 1) = 112$. Остается рассмотреть 16 возможных классов эквивалентности вида (100_1___111), где на месте «_» может быть 0 или 1. Разберем 2 случая: 2.a.1) ультрафункции принадлежат клону $\mathbb{S}^-$; 2.a.2) ультрафункции не принадлежат клону $\mathbb{S}^-$. Для каждого случая возможно 8 классов эквивалентности. В первом случае при принадлежности ультрафункций клону $\mathbb{M}^-$, применим утверждение 10 предложения 1, а при непринадлежности клону $\mathbb{M}^-$ — утверждение 9. Согласно утверждению 10 ультрафункции первого случая принадлежат клонам $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$, а согласно утверждению 9 — не принадлежат этим клонам. Тем самым при принадлежности клону $\mathbb{M}^-$ исключим классы эквивалентности, в которых ультрафункции должны не принадлежать хотя бы одному из клонов $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$, а при непринадлежности клону $\mathbb{M}^-$ – классы эквивалентности, в которых ультрафункции должны принадлежать хотя бы одному из клонов $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$. В том и другом варианте исключатся по 3 класса эквивалентности, а останется по 1 классу для каждого варианта. В случае 2.a.2 применим утверждение 4 предложения, согласно которому рассматриваемые ультрафункции не принадлежат хотя бы одному из клонов $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$. Тем самым исключим из рассмотрения классы эквивалентности, в которых ультрафункции должны одновременно принадлежать этим клонам. Таких классов два. Следовательно останется 6 классов. В итоге для случая 2.a имеем 8 классов эквивалентности.

Случай 2.b. Ультрафункции принадлежат клону $\mathbb{T}_0^-$ и не принадлежат клонам $\mathbb{P}_2$, $\mathbb{T}_1^-$, $\mathbb{K}_5$. Применим утверждения 2, 3 и 11 предложения 1, согласно которым рассматриваемые ультрафункции не принадлежат клонам $\mathbb{S}^-$, $\mathbb{L}^-$, $\mathbb{M}^-$, $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_3$, $\mathbb{K}_4$. Тем самым исключим из дальнейшего рассмотрения классы эквивалентности, в которых ультрафункции должны принадлежать хотя бы одному из этих клонов. Таких классов эквивалентности $2 \cdot (2^6 - 1) = 126$. В итоге для данного случая имеем 2 класса эквивалентности.

Случай 2.c. Ультрафункции принадлежат клону $\mathbb{T}_1^-$ и не принадлежат клонам $\mathbb{P}_2$, $\mathbb{T}_0^-$, $\mathbb{K}_5$. Применим утверждения 1, 3 и 11 предложения 1, согласно которым рассматриваемые ультрафункции не принадлежат клонам $\mathbb{S}^-$, $\mathbb{L}^-$, $\mathbb{M}^-$, $\mathbb{K}_2$, $\mathbb{K}_3$, $\mathbb{K}_4$. Тем самым исключим из дальнейшего рассмотрения классы эквивалентности, в которых ультрафункции должны принадлежать хотя бы одному из этих клонов. Таких классов эквивалентности $2 \cdot (2^6 - 1) = 126$. И остается два класса эквивалентности.

Случай 2.d. Ультрафункции не принадлежат клонам $\mathbb{P}_2$, $\mathbb{T}_0^-$, $\mathbb{T}_1^-$, $\mathbb{K}_5$. Применим утверждения 1, 2 и 11 предложения 1, согласно которым рассматриваемые ультрафункции не принадлежат клонам $\mathbb{L}^-$, $\mathbb{M}^-$, $\mathbb{K}_1$, $\mathbb{K}_2$, $\mathbb{K}_3$, $\mathbb{K}_4$. Тем самым исключим из дальнейшего рассмотрения классы эквивалентности, в которых ультрафункции должны принадлежать хотя бы одному из этих клонов. И в этом случае останется 2 класса эквивалентности.

Рассмотрение всех случаев показало, что число классов эквивалентности ограничено сверху числом 45. □

Таблица 1 показывает, что число классов эквивалентности не меньше 45. В этой таблице представлены 45 различных классов эквивалентности и представители этих классов. Ультрафункции заданы векторами своих значений на элементах множества E^n. Элементы множества E^n рассматриваем как двоичное представление натуральных чисел 0,1,...,$2^n - 1$ и упорядочиваем их в соответствии с естественным порядком натуральных чисел.

Из теоремы 1 и табл. 1 вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Множество P_2^- разбивается на 45 классов эквивалентности относительно принадлежности максимальным клонам.*

4. Типы базисов

Для того чтобы система ультрафункций была базисом, необходимо соблюдать условия полноты и минимальности. Согласно критерию полноты, система ультрафункций полна тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из 11 максимальных клонов [3]. Минимальность означает, что при удалении из системы любой ультрафункции система становится неполной.

В результате компьютерного перебора в P_2^- найдено 895 типов базисов. В зависимости от мощности базиса все типы распределены следующим образом: 1 тип мощности 1 (этот тип базисов образован функцией, не принадлежащей ни одному из максимальных клонов, такая функция лежит в 45 классе эквивалентности); 180 типов мощности 2; 686 типов мощности 3; 28 типов мощности 4. Базисов большей мощности нет.

Для примера приведем типы базисов мощности 4:

(2,3,13,41), (2,3,17,41), (2,13,17,25), (2,13,17,27), (2,13,17,28),
(2,13,17,29), (2,13,25,41), (2,17,25,41), (3,13,21,41), (3,13,22,41),
(3,17,21,41), (3,17,22,41), (4,13,17,25), (4,13,17,27), (4,13,17,28),
(4,13,17,29), (10,13,17,25), (10,13,17,27), (10,13,17,28), (10,13,17,29),

(11,13,17,25), (11,13,17,27), (11,13,17,28), (11,13,17,29), (12,13,17,25), (12,13,17,27), (12,13,17,28), (12,13,17,29).

Базисы представлены указанными в таблице 1 порядковыми номерами классов ультрафункций.

В [2] показано, что множество всех гиперфункций ранга 2 разбивается на 118 классов эквивалентности относительно принадлежности максимальным клонам и показано, что базисы имеют мощности от 1 до 7, для мощности 1 существует только один тип базиса, для мощности 2 существует 581 типов базисов, для мощности 3 — 19299, для мощности 4 — 58974, для мощности 5 — 27857, для мощности 6 — 2316 и для мощности 7 — 35 различных типов базисов.

Таблица 1

Классы эквивалентности и соответствующие им ультрафункции

№	$\phi(f)$	функция	№	$\phi(f)$	функция
1	(00000000000)	(01)	24	(01111111111)	(1000)
2	(00000111111)	(01101001)	25	(10001000111)	$(0--1)$
3	(00001000111)	(00010111)	26	(10001111111)	$(001--011)$
4	(00001111111)	(01110001)	27	(10011001111)	$(0-11)$
5	(00011001011)	(0111)	28	(10011010111)	$(00-1)$
6	(00011001111)	(00011111)	29	(10011011111)	$(0001-1-1)$
7	(00011010101)	(0001)	30	(10011101111)	$(00111-11)$
8	(00011010111)	(00000111)	31	(10011110111)	$(000010-1)$
9	(00011011111)	(0001000100111111)	32	(10011111111)	$(000111-1)$
10	(00011101111)	(00101111)	33	(10111010100)	$(0-)$
11	(00011110111)	(00001001)	34	(10111110100)	$(00-0)$
12	(00011111111)	(00011001)	35	(10111110111)	$(010-)$
13	(00110010000)	(0)	36	(10111111111)	$(0-1-)$
14	(00110111111)	(0110)	37	(11011001010)	(-1)
15	(00111110111)	(0010)	38	(11011101010)	$(1-11)$
16	(00111111111)	(00011000)	39	(11011101111)	$(10111-11)$
17	(01010001000)	(1)	40	(11011111111)	$(10-1)$
18	(01010111111)	(1001)	41	(11100000000)	$(-)$
19	(01011101111)	(1011)	42	(11101111111)	$(1--0)$
20	(01011111111)	(10100001)	43	(11111101010)	$(1-)$
21	(01100111110)	(10)	44	(11111110100)	(-0)
22	(01100111111)	(10010110)	45	(11111111111)	$(10-0)$
23	(01101111111)	(11101000)			

Список литературы

1. Замарацкая С. В. О максимальных клонах ультрафункций ранга 2 / С. В. Замарацкая, В. И. Пантелеев // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2016. – Т. 15. – С. 26–37.
2. Казимиров А. С. Классификация и перечисление базисов клона всех гиперфункций ранга 2 / А. С. Казимиров, В. И. Пантелеев, Л. В. Токарева // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2014. – Т. 7. – С. 61–78.
3. Пантелеев В. И. Критерий полноты для доопределяемых булевых функций / В. И. Пантелеев // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. – 2009. – №2(68). – С. 60–79.
4. Яблонский С. В. О суперпозициях функций алгебры логики / С. В. Яблонский // Мат. сб. – 1952. – Т. 30, № 2(72), С. 329–348.
5. Classification and basis enumerations in many-valued logics / M. Miyakawa, I. Stojmenović, D. Lau, I. Rosenberg // Proc. 17th International Symposium on Multi-Valued logic. – Boston, 1987. – P. 151–160.
6. Classification and basis enumerations of the algebras for partial functions / M. Miyakawa, I. Stojmenović, D. Lau, I. Rosenberg // Proc. 19th International Symposium on Multi-Valued logic. – Rostock, 1989. – P. 8–13.
7. Krnić L. Types of bases in the algebra of logic / L. Krnić // Glasnik matematickofizicki i astronomski. Ser 2. – 1965. – Vol. 20. – P. 23–32.
8. Lau D. Classification and enumerations of bases in $P_k(2)$/ D. Lau, M. Miyakawa // Asian-European Journal of Mathematics. – 2008. – Vol. 01, N 02. – P. 255–282.
9. Miyakawa M. Classification of three-valued logical functions preserving 0 / M. Miyakawa, I. Rosenberg, I. Stojmenović // Discrete Applied Mathematics. – 1990. - Vol. 28. – P. 231–249.

Замарацкая Светлана Вячеславовна, программист, Медицинский информационно-аналитический центр Иркутской области, 664011, Иркутск, ул. Каландаришвили, 2, (e-mail: `svetlana.v.zam@gmail.com`)

Пантелеев Владимир Иннокентьевич, доктор физико-математических наук, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952) 521298
(e-mail: `vl.panteleyev@gmail.com`)

S. V. Zamaratskaya, V. I. Panteleev

Classification and Types of Bases of All Ultrafunctions on Two-Element Set.

Abstract. This paper studies properties of ultrafunctions with respect of their inclusion in maximal clones.

The number of maximal clones for all ultrafunctions of rank 2 is equal to 11 [V. Panteleev, 2009].

All ultrafunctions are divided into 45 equivalence classes.

Based on this classification all kinds of bases are discribed. Two bases are of different kinds if there is a function in one basis with no equivalent function in the other one. We show that bases of hyperfunctions can have cardinality from 1 to 4: there is only one kind of basis with cardinality 1, 180 with cardinality 2, 686 with cardinality 3, 28 with cardinality 4.

Keywords: ultrafunction, clone, base, maximal clone.

References

1. Zamaratskaya S.V., Panteleev V.I. Maximal clones rank 2 ultrafunctions (in Russia). *The bulletin of Irkutsk State University. Mathematics*, 2016, vol. 15, pp. 26-37.
2. Kazimirov A.S., Panteleev V.I., Tokareva L.V. Classification and Enumeration of Bases in Clone of All Hyperfunctions on Two-Elements Set (in Russia). *The bulletin of Irkutsk State University. Mathematics*, 2014, vol. 10, pp. 61-78.
3. Panteleev V.I. The Completeness Criterion for Certain Boolean Functions (in Russia). *Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, 2009, vol. 2, no 68, pp. 60-79.
4. Yablonskij S.V. On the Superpositions of Logic Functions (in Russian). *Mat. Sbornik*, 1952, vol. 30, no 2(72), pp. 329-348.
5. Miyakawa M., Stojmenović I., Lau D., Rosenberg I. Classification and basis enumerations in many-valued logics // Proc. 17th International Symposium on Multi-Valued logic. Boston, 1987, pp. 151-160.
6. Miyakawa M., Stojmenović I., Lau D., Rosenberg I. Classification and basis enumerations of the algebras for partial functions. *Proc. 19th International Symposium on Multi-Valued logic.* Rostock, 1989, pp. 8-13.
7. Krnić L. Types of bases in the algebra of logic/ *Glasnik matematicko-fizicki i astronomski. Ser. 2*, 1965, vol. 20, p. 23-32.
8. Lau D., Miyakawa M. Classification and enumerations of bases in $P_k(2)$/ *Asian-European Journal of Mathematics*, 2008, vol. 01, no 02, pp. 255-282.
9. Miyakawa M., Rosenberg I., Stojmenović I. Classification of three-valued logical functions preserving 0. *Discrete Applied Mathematics*, 1990, vol. 28, pp. 231-249.

Zamaratskaya Svetlana Vyacheslavovna, Programmer, Medical Information-Analytic Center of Irkutsk Region, 2, Kalandarishvili, Irkutsk, 664011 (e-mail: svetlana.v.zam@gmail.com)

Panteleyev Vladimir Innokent'evich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, tel.: (3952)521298 (e-mail: vl.panteleyev@gmail.com)