Серия «Математика»
2016. Т. 17. С. 23—36

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 510.67:512.577
MSC 03C07, 03C60, 03G15, 20N02, 08A60

Об алгебрах распределений бинарных формул теорий унаров *

Д. Ю. Емельянов
Новосибирский государственный университет

Аннотация. Алгебры распределений бинарных изолирующих и полуизолирующих формул являются производными структурами для данной теории. Эти алгебры отражают бинарные связи между реализациями 1-типов, определяемые формулами исходной теории. Тем самым возникает два вида взаимосвязанных классификационных вопросов: 1) по данному классу теорий определить, какие алгебры соответствуют теориям из этого класса, и классифицировать эти алгебры; 2) классифицировать теории из класса в зависимости от определяемых этими теориями алгебр изолирующих и полуизолирующих формул. При этом описание конечной алгебры бинарных изолирующих формул однозначно влечет и описание алгебры бинарных полуизолирующих формул.

В статье дано описание алгебр распределений бинарных изолирующих формул теорий унаров с одноместными предикатами, основанное на таблицах умножения для этих алгебр. Доказано, что любая теория унара с одноместными предикатами определяет на множестве реализаций 1-типа алгебру распределений бинарных изолирующих формул, которая задается алгеброй, изоморфной ровно одной из следующих алгебр: 1) аддитивная группа целых чисел; 2) циклическая группа; 3) циклическая алгебра с заданным числом компонент связности; 4) алгебра свободного унара с заданным числом прообразов для каждого элемента; 5) аддитивный моноид натуральных чисел; 6) алгебра нижних конусов. В частности, если одноместная функция унара является подстановкой, то алгебра распределений бинарных изолирующих формул задается алгеброй, изоморфной ровно одной из следующих алгебр: аддитивная группа целых чисел, циклическая группа, циклическая алгебра с заданным числом компонент связности. Указанные алгебры по своей структуре позволяют классифицировать исходные теории подстановок. Конечные алгебры исчерпываются следующим списком: циклические группы, циклические алгебры с заданным числом компонент связности, алгебры нижних конусов.

Ключевые слова: алгебра распределений бинарных формул, унар, элементарная теория, одноместный предикат.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ

В настоящей работе продолжается изучение алгебр распределений бинарных изолирующих формул [2; 8; 11]: описываются такие алгебры для теорий унаров, а также их некоторые обобщения для полуизолирующих формул.

Напомним, что *унаром* называется алгебраическая система $\langle A; f\rangle$ с одной одноместной операцией f. Теории унаров изучались в ряде работ, включая [1; 3; 7; 9]. Мы будем рассматривать унары, обогащенные одноместными предикатами.

1. Предварительные сведения

Приведем необходимые сведения и результаты из [2; 4; 5; 6; 10; 11; 12].

Пусть T — полная теория, $\mathcal{M} \models T$. Рассмотрим типы $p(x), q(y) \in S(\emptyset)$, реализуемые в $\mathcal{M}$, а также всевозможные (p,q)-*устойчивые*, или (p,q)-*полуизолирующие*, формулы $\varphi(x,y)$ теории T, т. е. формулы, для которых найдутся элементы $a \in M$ такие, что $\models p(a)$ и $\varphi(a,y) \vdash q(y)$. Напомним, что если $\models p(a)$ и $\models \varphi(a,b)$ для (p,q)-полуизолирующей формулы $\varphi(x,y)$, то говорят, что a *полуизолирует* b. Определим для каждой такой формулы $\varphi(x,y)$ двухместное отношение $R_{p,\varphi,q} \rightleftharpoons \{(a,b) \mid \mathcal{M} \models p(a) \wedge \varphi(a,b)\}$. При условии $(a,b) \in R_{p,\varphi,q}$ пара (a,b) называется (p,φ,q)-*дугой*. Если $\varphi(a,y)$ — главная формула (над a), то (p,φ,q)-дуга (a,b) также называется *главной*.

Если $\varphi(x,y)$ является $(p \leftrightarrow q)$-*формулой*, т. е. одновременно (p,q)- и (q,p)-устойчивой, то множество $[a,b] \rightleftharpoons \{(a,b),(b,a)\}$ называется (p,φ,q)-*ребром*. Если (p,φ,q)-ребро $[a,b]$ состоит из главных (p,φ,q)- и (q,φ^{-1},p)-дуг, где $\varphi^{-1}(x,y)$ обозначает $\varphi(y,x)$, то $[a,b]$ называется *главным* (p,φ,q)-ребром.

Будем называть (p,φ,q)-дуги и (p,φ,q)-рёбра *дугами* и *рёбрами* соответственно, если из контекста ясно, о какой формуле идёт речь, или речь идёт о некоторой формуле $\varphi(x,y)$. Дуги (a,b), у которых пары (b,a) не являются дугами ни по каким (q,p)-формулам, будем называть *необращаемыми*.

Для типов $p(x), q(y) \in S(\emptyset)$ обозначим через $\mathrm{PF}(p,q)$ множество

$$\{\varphi(x,y) \mid \varphi(a,y) \text{ — главная формула},$$

$$\varphi(a,y) \vdash q(y), \text{ где } \models p(a)\}.$$

Пусть $\mathrm{PE}(p,q)$ — множество пар $(\varphi(x,y),\psi(x,y))$ формул из $\mathrm{PF}(p,q)$ таких, что для любой (некоторой) реализации a типа p совпадают множества решений формул $\varphi(a,y)$ и $\psi(a,y)$.

(проект НШ-6848.2016.1) и Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант №0830/ГФ4).

Очевидно, что $\mathrm{PE}(p,q)$ является отношением эквивалентности на множестве $\mathrm{PF}(p,q)$. Заметим, что каждому $\mathrm{PE}(p,q)$-классу E соответствует либо главное ребро, либо необращаемая главная дуга, связывающая реализации типов p и q посредством любой (некоторой) формулы из E. Таким образом, фактор-множество $\mathrm{PF}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ представляется в виде дизъюнктного объединения множеств $\mathrm{PFS}(p,q)$ и $\mathrm{PFN}(p,q)$, где $\mathrm{PFS}(p,q)$ состоит из $\mathrm{PE}(p,q)$-классов, соответствующих главным рёбрам, а $\mathrm{PFN}(p,q)$ состоит из $\mathrm{PE}(p,q)$-классов, соответствующих необращаемым главным дугам.

Множества $\mathrm{PF}(p,p)$, $\mathrm{PE}(p,p)$, $\mathrm{PFS}(p,p)$ и $\mathrm{PFN}(p,p)$ обозначаются соответственно через $\mathrm{PF}(p)$, $\mathrm{PE}(p)$, $\mathrm{PFS}(p)$ и $\mathrm{PFN}(p)$.

Зафиксируем полную теорию T, не имеющую конечных моделей. Пусть $U = U^- \dot\cup \{0\} \dot\cup U^+$ — некоторый алфавит мощности $\geq |S(T)|$, состоящий из *отрицательных элементов* $u^- \in U^-$, *положительных элементов* $u^+ \in U^+$ и нуля 0. Как обычно, будем писать $u < 0$ для любого элемента $u \in U^-$ и $u > 0$ для любого элемента $u \in U^+$. Множество $U^- \cup \{0\}$ обозначается через $U^{\leq 0}$, а $U^+ \cup \{0\}$ — через $U^{\geq 0}$. Элементы множества U будем называть *метками.*

Рассмотрим инъективные *меточные функции*

$$\nu(p,q)\colon \mathrm{PF}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q) \to U,$$

$p(x), q(y) \in S(\emptyset)$, при которых классам из $\mathrm{PFN}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ соответствуют отрицательные элементы, а классам из $\mathrm{PFS}(p,q)/\mathrm{PE}(p,q)$ — элементы неотрицательные так, что значение 0 определяется лишь для $p = q$ и задаётся по формуле $(x \approx y)$, $\nu(p) \rightleftharpoons \nu(p,p)$. При этом будем считать, что $\rho_{\nu(p)} \cap \rho_{\nu(q)} = \{0\}$ для $p \neq q$ (где, как обычно, через ρ_f обозначается область значений функции f) и $\rho_{\nu(p,q)} \cap \rho_{\nu(p',q')} = \emptyset$, если $p \neq q$ и $(p,q) \neq (p',q')$. Любые меточные функции с указанными свойствами, а также семейства таких функций будем называть *правильными* и далее рассматривать только правильные меточные функции и их правильные семейства.

Через $\theta_{p,u,q}(x,y)$ будут обозначаться формулы из $\mathrm{PF}(p,q)$, представляющие метку $u \in \rho_{\nu(p,q)}$. Если тип p фиксирован и $p = q$, то формула $\theta_{p,u,q}(x,y)$ обозначается через $\theta_u(x,y)$.

Отметим, что если $\theta_{p,u,q}(x,y)$ и $\theta_{q,v,p}(x,y)$ — формулы, свидетельствующие о том, что для реализаций a и b типов p и q соответственно пары (a,b) и (b,a) являются главными дугами, то формула $\theta_{p,u,q}(x,y) \wedge \theta_{q,v,p}(y,x)$ свидетельствует о том, что $[a,b]$ является главным ребром. При этом *обратимой* метке u однозначно соответствует (неотрицательная) метка v и наоборот. Метки u и v будем называть *взаимно обратными* и обозначать через v^{-1} и u^{-1} соответственно.

Для типов $p_1, p_2, \ldots, p_{k+1} \in S^1(\emptyset)$ и множеств меток $X_1, \ldots, X_k \subseteq U$ обозначим через

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

множество, состоящее из всех меток $u \in U$, соответствующих формулам $\theta_{p_1,u,p_{k+1}}(x, y)$, которые для реализаций a типа p_1 и некоторых $u_1 \in X_1 \cap \rho_{\nu(p_1,p_2)}, \ldots, u_k \in X_k \cap \rho_{\nu(p_k,p_{k+1})}$ удовлетворяют условию

$$\theta_{p_1,u,p_{k+1}}(a, y) \vdash \theta_{p_1,u_1,p_2,u_2,\ldots,p_k,u_k,p_{k+1}}(a, y),$$

где

$$\theta_{p_1,u_1,p_2,u_2,\ldots,p_k,u_k,p_{k+1}}(x, y) \rightleftharpoons$$
$$\rightleftharpoons \exists x_2, x_3, \ldots, x_k(\theta_{p_1,u_1,p_2}(x, x_2) \wedge \theta_{p_2,u_2,p_3}(x_2, x_3) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge \theta_{p_{k-1},u_{k-1},p_k}(x_{k-1}, x_k) \wedge \theta_{p_k,u_k,p_{k+1}}(x_k, y)).$$

Тем самым, на булеане $\mathcal{P}(U)$ множества U образуется *алгебра распределений бинарных изолирующих формул* с k-местными операциями

$$P(p_1, \cdot, p_2, \cdot, \ldots, p_k, \cdot, p_{k+1}),$$

где $p_1, \ldots, p_{k+1} \in S^1(\emptyset)$. Эта алгебра имеет естественное обеднение на любое семейство $R \subseteq S^1(\emptyset)$.

Очевидно, что биективно заменяя множество меток, мы получаем изоморфную алгебру. В частности, имеется *каноническая алгебра*, у которой метки представлены элементами

$$\bigcup_{p,q} \mathrm{PF}(p, q)/\mathrm{PE}(p, q).$$

Тем не менее, мы будем использовать абстрактное множество меток U, отражающее знаки меток и проясняющее алгебраические свойства операций на $\mathcal{P}(U)$.

Заметим, что если хотя бы одно из множеств X_i не пересекается с $\rho_{\nu(p_i,p_{i+1})}$ и, в частности, если оно пусто, справедливо равенство

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1}) = \emptyset.$$

Отметим также, что если $X_i \not\subseteq \rho_{\nu(p_i,p_{i+1})}$ для некоторого i, то

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1}) =$$

$$= P(p_1, X_1 \cap \rho_{\nu(p_1,p_2)}, p_2, X_2 \cap \rho_{\nu(p_2,p_3)}, \ldots, p_k, X_k \cap \rho_{\nu(p_k,p_{k+1})}, p_{k+1}).$$

На основании последнего равенства в дальнейшем при рассмотрении значений

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

будем предполагать, что $X_i \subseteq \rho_{\nu(p_i,p_{i+1})}$, $i = 1, \ldots, k$.

Если каждое множество X_i состоит лишь из одного элемента u_i, то в записи

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

вместо множеств X_i будем использовать элементы u_i и писать

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1}).$$

По определению справедливо следующее равенство:

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1}) =$$

$$= \cup\{P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1}) \mid u_1 \in X_1, \ldots, u_k \in X_k\}.$$

Таким образом, задание множества

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

сводится к заданию множеств $P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1})$. Отметим также, что для любого множества $X \subseteq \rho_{\nu(p,q)}$ имеет место $P(p, X, q) = X$.

Заметим, что если $u_i = 0$, то $p_i = p_{i+1}$ для непустых множеств

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_i, 0, p_{i+1}, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1})$$

и при этом выполняются следующие соотношения:

$$P(p_1, 0, p_1) = \{0\},$$

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_i, 0, p_{i+1}, u_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1}) =$$
$$= P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_i, u_{i+1}, p_{i+2}, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1}).$$

Если все типы p_i совпадают с типом p, то вместо записей

$$P(p_1, X_1, p_2, X_2, \ldots, p_k, X_k, p_{k+1})$$

и

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, p_k, u_k, p_{k+1})$$

будем писать $P_p(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ и $P_p(u_1, u_2, \ldots, u_k)$ соответственно, а также $\lfloor X_1, X_2, \ldots, X_k \rfloor_p$ и $\lfloor u_1, u_2, \ldots, u_k \rfloor_p$. Будем также опускать индексы $\cdot_p$, если из контекста ясно, о каком типе p идет речь. При этом вместо формул $\theta_{p,u_1,p,u_2,\ldots,p,u_k,p}(x, y)$ будем писать $\theta_{u_1,u_2,\ldots,u_k}(x, y)$.

При наличии модели $\mathcal{M}_p$ группоид $\mathfrak{P}_{\nu(p)} \rightleftharpoons \langle \mathcal{P}(\rho_{\nu(p)}) \setminus \{\emptyset\}; \lfloor \cdot, \cdot \rfloor \rangle$, будучи *полуассоциативной* (*слева*) алгеброй, позволяет представить всевозможные операции $\lfloor \cdot, \cdot, \ldots, \cdot \rfloor$ термами сигнатуры $\lfloor \cdot, \cdot \rfloor$. В дальнейшем операцию $\lfloor \cdot, \cdot \rfloor$ будем также обозначать через $\cdot$ и использовать запись uv вместо $u \cdot v$. При этом в случае отсутствия полуассоциативности справа будем в записи $u_1 u_2 \ldots u_k$ предполагать следующую расстановку скобок: $(((u_1 \cdot u_2) \cdot \ldots) \cdot u_k)$.

Поскольку по выбору метки 0 для формулы $(x \approx y)$ справедливы равенства $X \cdot \{0\} = X$ и $\{0\} \cdot X = X$ для любого $X \subseteq \rho_{\nu(p)}$, группоид $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ имеет единичный элемент $\{0\}$ и, при выполнении свойства полуассоциативности справа, является моноидом. В этой системе для любых множеств $Y, Z \in \mathcal{P}(\rho_{\nu(p)}) \setminus \{\emptyset\}$ справедливо соотношение

$$Y \cdot Z = \bigcup \{yz \mid y \in Y, z \in Z\}. \tag{1.1}$$

Для семейства 1-типов $R \subset S(T)$ обозначим через I_R (в модели $\mathcal{M}$) множество

$$\{(a, b) \mid \mathrm{tp}(a), \mathrm{tp}(b) \in R \text{ и } a \text{ изолирует } b\},$$

а через SI_R (в модели $\mathcal{M}$) множество

$$\{(a, b) \mid \mathrm{tp}(a), \mathrm{tp}(b) \in R \text{ и } a \text{ полуизолирует } b\}.$$

Очевидно, что $I_R \subseteq \mathrm{SI}_R$ и на любом множестве реализаций типов из R отношения I_R и SI_R рефлексивны. Известно, что отношение полуизолированности на множестве кортежей произвольной модели транзитивно и, в частности, транзитивно любое отношение SI_R. Что касается отношения I_R, оно может быть как транзитивным, так и нетранзитивным:

Предложение 1. [2; 11] *Пусть $p(x)$ — полный тип полной теории T, имеющей модель $\mathcal{M}_p$, $\nu(p)$ — правильная меточная функция. Следующие условия эквивалентны:*

(1) *отношение I_p (на множестве реализаций типа p в любой модели $\mathcal{M} \models T$) транзитивно;*

(2) *для любых меток $u_1, u_2 \in \rho_{\nu(p)}$ множество $P_p(u_1, u_2)$ конечно.*

Предложение 2. [2; 11] *Если $p, q \in R$ — главные типы, то $\rho_{\nu(p,q)} \cup \rho_{\nu(q,p)} \subseteq U^{\geq 0}$.*

Расширяя множество меток U положительными и отрицательными метками для полуизолирующих формул, а также *нейтральными* метками $u' \in U'$ (совмещающими необратимые дуги и главные ребра в множество решений полуизолирующих формул), получаем $\mathfrak{SI}_{\mathcal{R}}$-системы $\mathfrak{SI}$ для полуизолирующих формул, а также si-ранги, булевы операции на метках этих формул, отношения доминирования меток, соответствующие отношению $\vdash$, и $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-системы, включающие все указанные атрибуты [2; 13].

Предложение 3. [2; 14] *Для любой теории T, непустого семейства $R \subseteq S^1(\emptyset)$ изолированных типов и правильного семейства $\nu(R)$ меточных функций для полуизолирующих формул* $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$*-система* $\mathfrak{M}_{\nu(R)}$ *состоит из положительных меток и нуля, и каждая метка u имеет дополнение $\bar{u}$ такое, что $u \wedge \bar{u} = \emptyset$ и $u \vee \bar{u}$ является максимальным элементом. Если $R = \{p\}$, то моноид $\mathfrak{SI}_{\nu(p)} = \langle M_{\nu(R)}, \cdot\rangle$ порождается булевой алгеброй, для которой $u \vee \bar{u}$ соответствует изолирующим формулам типа p.*

Следствие 1. [2; 14] *Для любой ω-категоричной теории T, непустого семейства $R \subseteq S^1(\emptyset)$ и правильного семейства $\nu(R)$ меточных функций для полуизолирующих формул* $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$*-система* $\mathfrak{M}_{\nu(R)}$ *конечна, состоит из положительных меток и нуля, и каждая метка u имеет дополнение $\bar{u}$.*

Теорема 1. [2; 14] *Для любой* $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$*-системы* $\mathfrak{M}$*, у которой каждая метка положительная или нулевая и при этом имеет дополнение, существует теория T, непустое семейство $R \subseteq S^1(\emptyset)$ изолированных типов и правильное семейство $\nu(R)$ меточных функций для полуизолирующих формул такие, что $\mathfrak{M}_{\nu(R)} = \mathfrak{M}$.*

Следствие 2. [2; 14] *Для любой конечной* $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$*-системы* $\mathfrak{M}$*, у которой любая метка положительна или нулевая и имеет дополнение, существует ω-категоричная теория T, непустое семейство $R \subseteq S^1(\emptyset)$ и правильное семейство $\nu(R)$ меточных функций для полуизолирующих формул такие, что $\mathfrak{M}_{\nu(R)} = \mathfrak{M}$.*

Замечание 1. Отметим, что если $u_1, \ldots, u_n$ — все метки, связывающие реализации 1-типов p и q главными дугами, то для любой метки $u = u_{i_1} \vee \ldots \vee u_{i_k}$ её дополнением является метка $\bar{u} = u_{j_1} \vee \ldots \vee u_{j_l}$, где $\{i_1, \ldots, i_k\}, \{j_1, \ldots j_l\}$ — разбиение множества $\{1, \ldots, n\}$. Поэтому в следствиях 1 и 2 о наличии дополнений можно не упоминать.

Кроме того, поскольку в любой конечной $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-системе $\mathfrak{M}$ все метки сводятся к меткам изолирующих формул, эта система однозначно определяется своей подалгеброй распределений изолирующих формул.

2. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул теорий унаров с одноместными предикатами

Определение 1. Для произвольного значения $\lambda \in (\omega \setminus \{0, 1\}) \cup \{\infty\}$ обозначим через $\mathfrak{A}_{n,\lambda}$ алгебру $\langle A_{n,\lambda}; *\rangle$ с носителем $A_{n,\lambda} = \{0, 1, 2 \ldots, n-1, \neg\}$, задаваемую следующей таблицей:

$*$	$\mathbb{Z}_n$	$\neg$
$\mathbb{Z}_n$	$\langle \mathbb{Z}_n; +\rangle$	$\neg$
$\neg$	$\neg$	$\{0, 1, 2 \dots, n-1\}$ при $\lambda = 2$, $\{0, 1, 2 \dots, n-1, \neg\}$ при $\lambda \geq 3$

При наличии на множестве реализаций главного типа $p(x) \in S(\varnothing)$ унара $\langle X; f\rangle$, где f — подстановка с λ компонентами связности, $\lambda \in (\omega \setminus \{0,1\}) \cup \{\infty\}$, каждый элемент $k \in \mathbb{Z}_n$ символизирует взятие для каждой реализации a типа $p(x)$ ее значения $f^k(a)$, $\neg(a)$ — множество всех реализаций типа $p(x)$, не принадлежащих компоненте связности, содержащей элемент a.

Таким образом, каждый элемент $k \in \mathbb{Z}_n$ символизирует формулу

$$\theta_k(x, y) \rightleftharpoons (y \approx f^k(x)),$$

$$\theta_\neg(x, y) \rightleftharpoons \varphi(x) \wedge \bigwedge_{k\in\mathbb{Z}_n} \neg\theta_k(x, y),$$

где $\varphi(x)$ — главная формула типа $p(x)$.

Алгебра $\mathfrak{A}_{n,\lambda}$ называется *циклической алгеброй с λ компонентами.*

Определение 2. Для произвольного значения $\lambda \in (\omega \setminus \{0,1\}) \cup \{\infty\}$ обозначим через $\mathfrak{A}_{\mathrm{fr},\lambda}$ алгебру $\langle A_{\mathrm{fr},\lambda}; *\rangle$ с носителем $A_{\mathrm{fr},\lambda} = \omega^2$, задаваемую следующей таблицей:

$*$	$(0, m')$	$(k', 0)$	(k', m')
$(0, m)$	$(0, m + m')$	$(k' - m, 0)$ при $k' \geq m$, $(0, m - k')$ при $k' < m$	$(k' - m, m')$ при $k' \geq m$, $(0, m - k' + m')$ при $k' < m$
$(k, 0)$	$(k - i, m' - i)$, $0 \leq i \leq \min(k, m')$	$(k + k', 0)$	$(k + k', m')$
(k, m)	$(k, m + m')$	$(k' - m + k, 0)$ при $k' \geq m$, $(k, m - k')$ при $k' < m$	при $\lambda = 2$: $(k, m - k' + m')$ при $k' < m$, $(k + k' - m, m')$ при $k' > m$; $k' = m$: $(k - m', 0)$ при $k \geq m'$, $(0, m' - k)$ при $k < m'$; при $\lambda \geq 3$: $(k - i, m' - i)$, $0 \leq i \leq \min(k, m')$

По определению алгебры $\mathfrak{A}_{\mathrm{fr},\lambda}$, каждое из ограничений $\mathfrak{A}_{\mathrm{fr},\lambda} \upharpoonright (\{0\} \times \omega)$, $\mathfrak{A}_{\mathrm{fr},\lambda} \upharpoonright (\omega \times \{0\})$ изоморфно алгебре $\langle \omega; + \rangle$.

При наличии на множестве реализаций типа $p(x) \in S(\varnothing)$ λ-*свободного* унара $\langle X; f \rangle$, где $\lambda \in (\omega \setminus \{0,1\}) \cup \{\infty\}$, т. е. унара, у которого нет циклов и каждый элемент имеет λ прообразов, в алгебре $\langle A_f; * \rangle$ каждая пара (k,m) символизирует взятие для каждой реализации a типа $p(x)$ ее образа b_k относительно f^k, а затем всех таких прообразов элемента b_k относительно f^m, которые нельзя получить взятием образов b_{k-i} относительно $f^{(k-i)}$, а затем прообразов элементов b_{k-i} относительно $f^{(m-i)}$, $0 \le i < \min\{k,m\}$.

Таким образом, каждая пара $(k,0)$ символизирует формулу

$$\theta_{k,0}(x,y) \rightleftharpoons (y \approx f^k(x)),$$

$(0,m)$ —

$$\theta_{0,m}(x,y) \rightleftharpoons (x \approx f^m(y)),$$

(k,m), при $k > 0$ и $m > 0$, —

$$\theta_{k,m}(x,y) \rightleftharpoons \exists z \left((z \approx f^k(x)) \wedge (z \approx f^m(y)) \wedge \bigwedge_{0 \le i < \min\{k,m\}} \neg\theta_{k-i,m-i}(x,y) \right).$$

Пример 1. [2] Обозначим через Ω множество непустых конечных последовательностей $\bar{\alpha} = \langle \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ таких, что $\alpha_i \in \omega$, $i \le n$, $l(\bar{\alpha}) = \alpha_0 + 2$.

Пусть T_0 — теория сигнатуры $\langle P^{(1)}_{\bar{\alpha}}, Q^{(2)} \rangle_{\bar{\alpha} \in \Omega}$ со следующими аксиомами:

1) если $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}' \,\hat{}\, m \in \Omega$, то

$$\vdash \big(P_{\bar{\alpha}' \,\hat{}\, (m+1)}(x) \to P_{\bar{\alpha}' \,\hat{}\, m}(x)\big) \wedge \exists^{\ge\omega} x \ \big(P_{\bar{\alpha}' \,\hat{}\, m}(x) \wedge \neg P_{\bar{\alpha}' \,\hat{}\, (m+1)}(x)\big)\,;$$

2) если $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}'_1 \,\hat{}\, 0$, $\bar{\alpha}_2 = \bar{\alpha}'_2 \,\hat{}\, 0$ — кортежи из Ω и $\bar{\alpha}'_1 \ne \bar{\alpha}'_2$, то $\vdash \neg\exists x \ (P_{\bar{\alpha}_1}(x) \wedge P_{\bar{\alpha}_2}(x))$;

3) отношение Q образует график свободного (без циклов) унара с бесконечным числом прообразов у каждого элемента;

4) $\vdash \forall x,y ((P_{\langle 0,m \rangle}(x) \wedge \neg P_{\langle 0,m+1 \rangle}(x) \wedge Q(x,y)) \to (P_{\langle 0,m \rangle}(y) \wedge \neg P_{\langle 0,m+1 \rangle}(y)))$, $m \in \omega$;

5) если $\models P_{\langle 0,m \rangle}(a) \wedge \neg P_{\langle 0,m+1 \rangle}(a)$, то множество реализаций формулы $Q(x,a)$ состоит из бесконечного числа реализаций формулы $P_{\langle 0,m \rangle}(x) \wedge \neg P_{\langle 0,m+1 \rangle}(x)$, а также бесконечного числа реализаций формул $P_{\langle 1,k,m \rangle}(x) \wedge \neg P_{\langle 1,k,m+1 \rangle}(x)$ для каждого $k \in \omega$;

6) если $\bar{\alpha} = k \,\hat{}\, \bar{\alpha}' \,\hat{}\, l \,\hat{}\, m$ — кортеж из Ω, $k \ge 1$, то

$$\vdash \forall x, y \ \Big(\big(P_{k \,\hat{}\, \bar{\alpha}' \,\hat{}\, l \,\hat{}\, m}(x) \wedge \neg P_{k \,\hat{}\, \bar{\alpha}' \,\hat{}\, l \,\hat{}\, (m+1)}(x) \wedge Q(x,y)\big) \to$$

$$\to \left(P_{(k-1)\,\hat{}\,\bar{\alpha}'\,\hat{}\,m}(y) \wedge \neg P_{(k-1)\,\hat{}\,\bar{\alpha}'\,\hat{}\,(m+1)}(y)\right)\Bigg), \quad m \in \omega;$$

7) если $k \neq 0$ и $\models P_{k\,\hat{}\,\bar{\alpha}\,\hat{}\,m}(a) \wedge \neg P_{k\,\hat{}\,\bar{\alpha}\,\hat{}\,(m+1)}(a)$, то множество реализаций формулы $Q(x,a)$ состоит из бесконечного числа реализаций формул $P_{(k+1)\,\hat{}\,\bar{\alpha}\,\hat{}\,l\,\hat{}\,m}(x) \wedge \neg P_{(k+1)\,\hat{}\,\bar{\alpha}\,\hat{}\,l\,\hat{}\,(m+1)}(x)$ для каждого $l \in \omega$;

8) носитель некоторой модели теории T_0 состоит из элементов отношений $P_{\bar{\alpha}}$, $\bar{\alpha} \in \Omega$.

Построение насыщенной модели, удовлетворяющей аксиомам 1–7, позволяет проверить полноту теории T_0.

В силу того, что отношение Q образует график свободного унара с бесконечным числом прообразов у каждого элемента и при этом для реализаций a типа $p_\infty(x) = \{\neg P_{\bar{\alpha}}(x) \mid \bar{\alpha} \in \Omega\}$, список попарно неэквивалентных изолирующих формул $\varphi(a,y)$, где $\varphi(a,y) \vdash p_\infty(y)$, исчерпывается формулами $Q^k(a,y)$, $k \in \omega$, алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p_\infty)}$ изоморфна алгебре $\langle \omega^*; + \rangle$.

Определение 3. Для произвольных значений $n \in \omega$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in (\omega \setminus \{0,1\}) \cup \{\infty\}$ обозначим через $\mathfrak{B}_{n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}$ алгебру $\langle B_{n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}; *\rangle$ с носителем $B_{n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n} = \mathcal{P}(\{0,1,2\ldots,n\}) \setminus \{\emptyset\}$, задаваемую следующей таблицей:

$\cdot$	0	1	2	3	$\ldots$	n
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\ldots$	n
1	$\{1\}$	$\{0\}$ при $\lambda_1 = 2$, $\{0,1\}$ при $\lambda_1 > 2$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\ldots$	$\{n\}$
2	$\{2\}$	$\{2\}$	$\{0,1\}$ при $\lambda_2 = 2$, $\{0,1,2\}$ при $\lambda_2 > 2$	$\{3\}$	$\ldots$	$\{n\}$
3	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{3\}$	$\{0,1,2\}$ при $\lambda_3 = 2$, $\{0,1,2,3\}$ при $\lambda_3 > 2$	$\ldots$	$\{n\}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
n	$\{n\}$	$\{n\}$	$\{n\}$	$\{n\}$	$\ldots$	$\{0,1,\ldots,n-1\}$ при $\lambda_n = 2$, $\{0,1,\ldots,n\}$ при $\lambda_n > 2$

Очевидно, что $\mathfrak{B}_{n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n} \subset \mathfrak{B}_{n+1,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n,\lambda_{n+1}}$.

Положим $\mathfrak{B}_{\omega,(\lambda_i)_{i\in\omega}} \rightleftharpoons \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathfrak{B}_{n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}$.

При рассмотрении унаров, у которых однотипные элементы a и b связаны соотношением $f^n(a) = f^n(b)$ с минимальным положительным

n и при наличии λ_i прообразов у элементов $f^i(a)$, алгебра бинарных изолирующих формул для типа $\mathrm{tp}(a)$ представляется одной из алгебр $\mathfrak{B}_{n,\lambda_1,\ldots,\lambda_n}$, $\mathfrak{B}_{\omega,(\lambda_i)_{i\in\omega}}$. Указанные алгебры называются *алгебрами нижних конусов.*

Теорема 2. *Если T — теория унара f с одноместными предикатами, $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ — алгебра распределений бинарных изолирующих формул для типа $p \in S^1(\varnothing)$, то алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ задается ровно одной из следующих алгебр: группой $\mathbb{Z}$, группой $\mathbb{Z}_n$, алгеброй $\mathfrak{A}_{n,\lambda}$, алгеброй $\mathfrak{A}_{\mathrm{fr},\lambda}$, алгеброй $\langle\omega^*;+\rangle$, $\mathfrak{B}_{n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}$, $\mathfrak{B}_{\omega,(\lambda_i)_{i\in\omega}}$.*

Доказательство. Выберем некоторую реализацию a типа p. Рассмотрим варианты переходов по изолирующим формулам $\varphi(a,y)$, где $\varphi(a,y) \vdash p(y)$. Напомним, что в теории T каждая формула эквивалентна булевой комбинации формул с одной свободной переменной, а также формул вида $(f^k(x) \approx f^m(y))$, $k,m \in \omega$. Тогда изолирующие формулы $\varphi(a,y)$ сводятся к формулам вида $(f^k(a) \approx f^m(y))^\delta \wedge \psi(y)$, где $\delta \in \{0,1\}$.

Рассмотрим формулы с $(y \approx f^k(a)) \vdash p(y)$ где $k > 0$. Если таких формул нет, то алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ будет:

1) одноэлементной, т. е. изоморфной одноэлементной группе $\mathbb{Z}_1$ при условии, что тип p имеет единственную реализацию или является неглавным и никакие две различные реализации a и b типа p не связаны соотношением $f^m(a) = f^m(b) \wedge \psi(b)$, $m > 0$, где $f^m(a) = f^m(y) \wedge \psi(y) \vdash p(y)$ для некоторой формулы $\psi(x)$;

2) двухэлементной и изоморфной алгебре $\mathfrak{A}_{1,\lambda}$ при условии, что тип p является главным, имеет $\lambda \geq 2$ реализаций и никакие реализации a и b не связаны указанным выше соотношением $f^m(a) = f^m(b) \wedge \psi(b)$;

3) одной из алгебр $\mathfrak{B}_{n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n}$, $\mathfrak{B}_{\omega,(\lambda_i)_{i\in\omega}}$, если имеются реализации a и b, связанные указанным выше соотношением $f^m(a) = f^m(b) \wedge \psi(b)$.

Предположим, что имеются формулы $(y \approx f^k(a))$ с условием $(y \approx f^k(a)) \vdash p(y)$, $k > 0$. Выберем такую формулу с минимальным k. Обозначим f^k через g. Возможны два случая:

1) $g^m(a) = a$, $m > 0$;

2) $g^m(a) \neq a$, $m \in \omega \setminus \{0\}$.

В первом случае имеется цикл некоторой положительной длины n и если такой цикл единственный или p — неглавный тип, то алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ будет изоморфна группе $\mathbb{Z}_n$. А если тип p является главным и $\lambda \geq 2$, где λ — число g-циклов, то алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ будет изоморфна алгебре $\mathfrak{A}_{n,\lambda}$.

Во втором случае g-циклов нет и возможны следующие варианты:

а) $(g(x) \approx a) \vdash p(x)$ и $|g^{-1}(a)| = 1$;

б) $(g(x) \approx a) \vdash p(x)$ и $|g^{-1}(a)| = \lambda \geq 2$;

в) $(g(x) \approx a) \nvdash p(x)$.

В случае а) алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ изоморфна группе $\mathbb{Z}$, в случае б) — алгебре $\mathfrak{A}_{\mathrm{fr},\lambda}$, в случае в) — алгебре $\langle\omega^*;+\rangle$. □

Непосредственно из теоремы 2 вытекает

Следствие 3. *Если T — теория одноместных предикатов с подстановкой σ, $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ — алгебра распределений бинарных изолирующих формул для типа $p \in S^1(\varnothing)$, то алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ задается ровно одной из следующих алгебр: группой $\mathbb{Z}$, группой $\mathbb{Z}_n$, алгеброй $\mathfrak{A}_{n,\lambda}$. Алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ задается группой $\mathbb{Z}$ тогда и только тогда, когда σ не имеет циклов. Алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ задается группой $\mathbb{Z}_n$ тогда и только тогда, когда σ имеет единственный цикл длины n на множестве реализаций типа p (возможно после замены подстановки σ на некоторую ее степень σ^k) или при наличии такого цикла тип p является неглавным.*

Отметим, что из теоремы 2 и утверждений, приведенных в предыдущем разделе, вытекает описание алгебры распределений бинарных полуизолирующих формул для конечных алгебр бинарных изолирующих формул. При этом конечные алгебры исчерпываются следующим списком: циклические группы, циклические алгебры с заданным числом компонент связности, алгебры нижних конусов.

Список литературы

1. Ряскин А. Н. Число моделей полных теорий унаров / А. Н. Ряскин // Теория моделей и её применения. – Новосибирск : Наука. Сиб. отд-ние, 1988. – С. 162–182.
2. Судоплатов С. В. Классификация счетных моделей полных теорий. Ч. 1 / С. В. Судоплатов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014.
3. Шишмарев Ю. Е. О категоричных теориях одной функции / Ю. Е. Шишмарев // Мат. заметки. – 1972. – Т. 11, № 1. – С. 89–98.
4. Baizhanov B. S. Orthogonality of one types in weakly o-minimal theories / B. S. Baizhanov // Algebra and Model Theory 2. Collection of papers / eds.: A. G. Pinus, K. N. Ponomaryov. – Novosibirsk : NSTU, 1999. – P. 5–28.
5. Baizhanov B. S. On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories / B. S. Baizhanov, B. Sh. Kulpeshov // Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference / eds.: S. Goncharov, R. Downey, H. Ono. – Singapore, World Scientific : 2006. – P. 31–40.
6. Baizhanov B. S. Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation / B. S. Baizhanov, S. V. Sudoplatov, V. V. Verbovskiy // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2012. – Vol. 9. – P. 161–184.
7. Ivanov A. A. Complete theories of unars / A. A. Ivanov // Algebra and Logic. – 1984. – Vol. 23, N 1. – P. 36–55.
8. Kulpeshov B. Sh. On algebras of distributions for binary formulas of countably categorical weakly o-minimal theories / B. Sh. Kulpeshov, S. V. Sudoplatov, D. Yu. Yemelyanov // Book of Abstracts. 15th Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, CLMPS 2015, Congress of the Division of Logic, Methodology and Philosophy of Science (DLMPS), Logic Colloquium 2015, LC 2015, Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL), Helsinki 3–8 August 2015. University of Helsinki, 2015. – P. 663.
9. Marcus L. The number of countable models of a theory of one unary function / L. Marcus // Fundamenta Mathematicae. – 1980. – Vol. CVIII, issue 3. – P. 171—181.

10. Pillay A. Countable models of stable theories / A. Pillay // Proc. Amer. Math. Soc. – 1983. – Vol. 89, N 4. – P. 666–672.
11. Shulepov I. V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory / I. V. Shulepov, S. V. Sudoplatov // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2014. – Vol. 11. – P. 380–407.
12. Sudoplatov S. V. Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories / S. V. Sudoplatov // J. Math. Sciences. – 2010. – Vol. 169, N 5. – P. 680–695.
13. Sudoplatov S. V. Algebras of distributions for semi-isolating formulas of a complete theory / S. V. Sudoplatov // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2014. – Vol. 11. – P. 408–433.
14. Sudoplatov S. V. Algebras of distributions for binary semi-isolating formulas for families of isolated types and for countably categorical theories / S. V. Sudoplatov // International Mathematical Forum. – 2014. – Vol. 9, N 21. – P. 1029–1033.

Емельянов Дмитрий Юрьевич, магистрант, Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1, тел. (383)3634020 (e-mail: dima-pavlyk@mail.ru)

D. Yu. Emelyanov

On Algebras of Distributions of Binary Formulas for Theories of Unars

Abstract. Algebras of distributions of binary isolating and semi-isolating formulas are derived structures for a given theory. These algebras reflect binary links between realizations of 1-types defined by formulas of the initial theory. Thus these are two sorts of interrelated classification problems: 1) to define, for a given class of theories, what algebras correspond to theories in this class and to classify these algebras; 2) to classify theories in the class in the dependence of algebras of isolating and semi-isolating algebras that defined by these theories. For the finite algebras of binary isolating formulas that description implies the description for the algebra of binary semi-isolating formulas.

In the paper, we give the description for algebras of distributions of binary isolating formulas for theories of unars with unary predicates, which is based on multiplication tables for these algebras. It is proved that any theory of unar with unary predicates defines, on a set of realizations of 1-type, an algebra of of distributions of binary isolating formulas, which is obtained by an algebra isomorphic to exactly one of the following algebras: 1) the additive group of integer numbers, 2) a cyclic group, 3) a cyclic algebra with given number of connected components, 4) an algebra of free unar with given number of preimages for each element; 5) the additive monoid of natural numbers; 6) an algebra of low cones. In particular, if the unary function, in the unar, is a substitution, then the algebra of distributions of binary isolating formulas is defined by an algebra isomorphic to exactly one of the following algebras: the additive additive group of integer numbers, a cyclic group, a cyclic algebra with given number of connected components. The structures of these algebras allow to classify initial theories of substitutions. Finite algebras are exhausted by the following list: cyclic groups, cyclic algebras with given number of connected components, algebras of low cones.

Keywords: algebra of distributions of binary formulas, unar, elementary theory, unary predicate.

References

1. Ryaskin A. N. The number of models of complete theories of unars. *Model Theory and Its Applications, Tr. Inst. Mat. SO AN SSSR*, 1988, vol. 8, pp. 162-182.
2. *Sudoplatov S.V.* Classification of Countable Models of Complete Theories, Part 1. Novosibirsk, NSTU, 2014.
3. Shishmarev Yu.E. On categorical theories of one function. *Mat. Zametki*, 1972, vol. 11, no 1, pp. 89-98.
4. Baizhanov B.S. Orthogonality of one types in weakly *o*-minimal theories. *Algebra and Model Theory 2. Collection of papers by eds.: A. G. Pinus, K. N. Ponomaryov.* Novosibirsk, NSTU, 1999, pp. 5–28.
5. Baizhanov B.S. Kulpeshov B.Sh. On behaviour of 2-formulas in weakly *o*-minimal theories. *Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference by eds.: S. Goncharov, R. Downey, H. Ono.* Singapore, World Scientific, 2006, pp. 31-40.
6. Baizhanov B.S., Sudoplatov S.V., Verbovskiy V.V. Conditions for non-symmetric relations of semi-isolation. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2012, vol. 9, pp. 161-184.
7. Ivanov A.A. Complete theories of unars. *Algebra and Logic*, 1984, vol. 23, no 1, pp. 36-55.
8. Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V., Yemelyanov D.Yu. On algebras of distributions for binary formulas of countably categorical weakly o-minimal theories. *Book of Abstracts. 15th Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, CLMPS 2015, Congress of the Division of Logic, Methodology and Philosophy of Science (DLMPS), Logic Colloquium 2015, LC 2015, Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic (ASL), Helsinki 3–8 August 2015*, University of Helsinki, 2015. p. 663.
9. Marcus L. The number of countable models of a theory of one unary function. *Fundamenta Mathematicae*, 1980, vol. CVIII, issue 3, pp. 171–181.
10. Pillay A. Countable models of stable theories. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1983, vol. 89, no 4, pp. 666-672.
11. Shulepov I.V., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2014, vol. 11, pp. 380-407.
12. Sudoplatov S.V. Hypergraphs of prime models and distributions of countable models of small theories. *J. Math. Sciences*, 2010, vol. 169, no 5, pp. 680-695.
13. Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for semi-isolating formulas of a complete theory. *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2014, vol. 11, pp. 408-433.
14. Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for binary semi-isolating formulas for families of isolated types and for countably categorical theories. *International Mathematical Forum*, 2014, vol. 9, no 21, pp. 1029-1033.

Emelyanov Dmitry Yuryevich, Master student, Novosibirsk State University, 1, Pirogova st., Novosibirsk, 630090, tel.: (383)3634020
(e-mail: dima-pavlyk@mail.ru)