



Серия «Математика»

2014. Т. 10. С. 62–75

Онлайн-доступ к журналу:

<http://isu.ru/izvestia>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

УДК 519.833.2

Применение метода ветвей и границ для поиска равновесия в потенциальной модели Курно *

И. М. Минарченко

Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН

Аннотация. Как известно, равновесия Нэша в потенциальной игре принадлежат множеству стационарных точек потенциальной функции (потенциала), притом только глобальный максимум потенциала в общем случае является равновесием. В работе рассмотрена модель количественной олигополии Курно с линейной обратной функцией спроса и S-образными функциями издержек участников, заданными полиномами третьей степени. S-образный вид функции предполагает смену вогнутого участка участком выпуклости. Функция издержек такого вида отражает смену возрастающего эффекта масштаба убывающим, что может трактоваться как переход от этапа ввода производственных мощностей к этапу их нормальной эксплуатации. В силу линейности обратной функции спроса модель в такой постановке является потенциальной игрой. Приведён вид потенциальной функции, которая также представляет собой полином третьей степени от переменных исходной модели. Невогнутость потенциала в общем случае ведёт к неединственности равновесия. Локальный поиск стационарных точек в сочетании с методикой мултистарта и последующей проверкой найденной точки на равновесность описан в других работах автора. Внимание данной статьи сосредоточено на реализации метода ветвей и границ для нахождения глобального максимума потенциала, заведомо являющегося точкой равновесия. Приведено описание метода и результаты численного эксперимента.

Ключевые слова: модель Курно, потенциальные игры, равновесие Нэша, метод ветвей и границ, d.c.-разложение.

Введение

Поиск равновесия по Нэшу в игре в нормальной форме в общем случае является трудной задачей. Однако существуют классы игр, для которых задача поиска равновесия существенно упрощается. К таковым, в частности, относится класс потенциальных игр, подробно описанный

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант 13-01-922-1

в [22]. Если игра является потенциальной, то существует некоторая функция, называемая потенциалом (потенциальной функцией), среди стационарных точек которой содержатся все равновесные ситуации игры. В общем случае не каждая стационарная точка потенциала обеспечивает равновесие, лишь глобальный максимум заведомо является равновесной точкой.

Ранее автором в [6] для нахождения стационарных точек потенциала предлагались в сочетании с мультистартом методы локального поиска, основанные на d.c.-разложении и построении вогнутых опорных функций-минорант. Каждая полученная точка подлежала проверке на равновесность путём решения n задач на поиск глобального максимума функции одной переменной, где n — количество участников игры. В настоящей работе для полноты исследования предлагается метод, гарантированно сходящийся к глобальному максимуму потенциала, основанный на схеме ветвей и границ и учитывающий специфику максимизируемой функции. Данный метод будет описан применительно к потенциальной модели олигополии Курно с функциями спроса и издержек определённого вида.

Модель Курно по-прежнему актуальна: она не только анализируется как математическая модель (см. [16; 19; 23; 24]), но и используется в различных приложениях (см. [8; 15; 21; 29; 30]). Многие основополагающие работы посвящены линейным или выпуклым моделям (см., например, [11; 2]). В [16] рассмотрен случай с гиперболической функцией спроса. При этом автору не известны работы, в которых рассматривается модель с нелинейными издержками вида, предлагаемого в данной статье.

Линейной функции издержек зачастую оказывается недостаточно для моделирования, и потому возникает необходимость замены её нелинейной функцией, отвечающей, конечно, основным требованиям: не убывает, определена на неотрицательной области и принимает неотрицательные значения. В данной работе в качестве функции издержек предлагается использовать такую функцию, в которой участок вогнутости сменяется выпуклым участком, иными словами, имеющую S-образный вид. Такой вид функции издержек моделирует смену возрастающего эффекта масштаба убывающим. Вогнутый участок можно трактовать как участок ввода производственных мощностей, а выпуклый — как этап их последующей эксплуатации. Обоснование подобного вида издержек можно найти в [3], а также они описываются в [11] и других книгах по микроэкономике.

Мы предлагаем в качестве S-образной функции использовать полином третьей степени как наиболее простую функцию подобного вида. Функция спроса, как и в классической постановке модели, принимается линейной. Линейный спрос в модели Курно также рассматривается,

например, в [8; 15; 16; 18; 26; 29]. В [17; 25; 27] линейная функция спроса рассматривается в условиях неопределённости в других моделях.

1. Постановка задачи

Рассмотрим модель Курно с n участниками, i -й участник предлагает на один и тот же рынок однородный продукт в количестве x_i , при этом

$$x_i \in X^i = [\check{x}_i, \hat{x}_i], \quad \hat{x}_i > \check{x}_i \geq 0.$$

Отметим, что возможен случай $\hat{x}_i = +\infty$ для каких-либо $i = 1, \dots, n$.

Ограничения на объём производства обусловлены физическим смыслом задачи (технологическими ограничениями участников). Такие ограничения вводятся, в том числе для модели Курно, в [8; 14; 19], а также во многих других работах как теоретического, так и прикладного характера. В [1; 24] ограничения на выпуск закладываются в функцию издержек таким образом, что при объёме выпуска, большем некоторого значения, предельные издержки равны или стремятся к бесконечности; нам такой подход видится излишне усложняющим задачу. Ограничения на выпуск могут быть также обусловлены поведением других участников, что отражается в играх с запрещёнными ситуациями [4]. В работах [12; 13], также посвящённым играм с запрещёнными ситуациями, результаты иллюстрируются на примере модели Курно. В рассматриваемой нами постановке ограничения на выпуск не зависят от стратегий, выбираемых остальными участниками.

Введём вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и множества $N = \{1, 2, \dots, n\}$ и $X = X^1 \times X^2 \times \dots \times X^n$. Цена на продукцию определяется линейной обратной функцией спроса, зависящей от суммарного объёма предложения,

$$p(x) = d - a \sum_{j \in N} x_j, \quad (1.1)$$

где $d > 0$, $a > 0$. Каждый участник исходит из максимума прибыли, т. е. оперируя собственным объёмом предложения, максимизирует функцию прибыли

$$F_i(x) = p(x)x_i - C_i(x_i), \quad (1.2)$$

где $C_i: X^i \rightarrow \mathbb{R}^+$ — неубывающая функция издержек, \mathbb{R}^+ — множество неотрицательных действительных чисел (множество всех действительных чисел будем обозначать \mathbb{R}).

Отметим, что математически возможен случай $p(x) < 0$ при некотором $x \in X$. Мы не будем вводить никаких дополнительных ограничений, запрещающих данную ситуацию, поскольку такое x заведомо не

будет являться равновесием. Это следует из того, что при отрицательной цене игроки будут уходить с рынка, зануляя объёмы производства; в случае $x_i = 0$ для всех $i \in N$ получим $p(x) = d > 0$.

В данной работе рассматриваются функции издержек в виде полиномов третьей степени

$$C_i(x_i) = \alpha_i x_i^3 + \beta_i x_i^2 + \gamma_i x_i + \delta_i, \quad i \in N. \quad (1.3)$$

Для обеспечения S-образного вида, а также свойств, указанных во введении, необходимы ограничения на коэффициенты [5]

$$\alpha_i > 0, \beta_i < 0, \gamma_i > 0, \delta_i \geq 0, \beta_i^2 \leq 3\alpha_i \gamma_i, \quad i \in N. \quad (1.4)$$

Условия (1.4) гарантируют вогнутость функции C_i на участке $[0, -\frac{\beta_i}{3\alpha_i}]$ и выпуклость — на $[-\frac{\beta_i}{3\alpha_i}, +\infty)$, а также отсутствие участков убывания.

Таким образом, с учётом (1.1), (1.2) и (1.3) имеем систему n задач

$$F_i(x) = \left(d - a \sum_{j \in N} x_j \right) x_i - \alpha_i x_i^3 - \beta_i x_i^2 - \gamma_i x_i \rightarrow \max_{x_i \in X^i}, \quad i \in N. \quad (1.5)$$

Отметим, что (1.5) может быть представлена как бескоалиционная игра в нормальной форме [7], в связи с этим систему задач (1.5) будем также называть игрой.

Определение 1 ([22]). *Игра (1.5) называется потенциальной, если существует функция $P: X \rightarrow \mathbb{R}$, такая, что для любых $x_i, \bar{x}_i \in X^i, x_{-i} \in \prod_{j \neq i} X^j$ и $i \in N$ выполняется*

$$F_i(\bar{x}_i, x_{-i}) - F_i(x_i, x_{-i}) = P(\bar{x}_i, x_{-i}) - P(x_i, x_{-i}).$$

Функция P , если она существует, называется потенциалом или потенциальной функцией.

В [28] показано, что модель Курно потенциальна в том и только в том случае, когда функция спроса в ней линейна, а значит, игра (1.5) является потенциальной, и потенциал восстанавливается по формуле [9; 22]

$$P(x) = \int_0^1 \sum_{i \in N} \frac{\partial F_i(tx)}{\partial x_i} \cdot x_i dt$$

следующим образом:

$$P(x) = \int_0^1 \left(\frac{\partial F_1(tx)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial F_2(tx)}{\partial x_2} x_2 + \dots + \frac{\partial F_n(tx)}{\partial x_n} x_n \right) dt =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \sum_{i \in N} \left(-3\alpha_i t^2 x_i^2 - 2(a + \beta_i) t x_i + d - \gamma_i - a t \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} x_j \right) x_i dt = \\
&= \left[\sum_{i \in N} \left(-\alpha_i x_i^3 t^3 - (a + \beta_i) x_i^2 t^2 - \frac{a}{2} t^2 x_i \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} x_j + (d - \gamma_i) x_i t \right) \right] \Big|_0^1 = \\
&= \sum_{i \in N} \left[-\alpha_i x_i^3 - (a + \beta_i) x_i^2 + \left(d - \gamma_i - \frac{a}{2} \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} x_j \right) x_i \right]. \quad (1.6)
\end{aligned}$$

Тогда в силу своей потенциальности (1.5) эквивалентна (в смысле совпадения множеств равновесных точек) игре

$$P(x_i, x_{-i}) \rightarrow \max_{x_i} \quad x_i \in X^i, \quad i \in N. \quad (1.7)$$

Если некоторая точка x^* является равновесной (по Нэшу) в (1.7), т. е. выполняется

$$P(x_i^*, x_{-i}^*) \geq P(x_i, x_{-i}^*), \quad \forall x_i \in X^i, \quad i \in N, \quad (1.8)$$

то, нетрудно заметить, x^* является стационарной точкой функции P [10]. Иными словами, равновесия следует искать среди стационарных точек потенциальной функции. Чтобы проверить, является ли найденная стационарная точка равновесием, достаточно решить n задач поиска глобального максимума функции одной переменной в соответствии с (1.8).

Из (1.8) следует, что глобальный максимум P гарантированно является равновесием, а точки минимума не могут являться равновесными. Поэтому задачу поиска стационарных точек мы запишем в виде задачи максимизации (используя (1.6)):

$$P(x) = \sum_{i \in N} \left[-\alpha_i x_i^3 - (a + \beta_i) x_i^2 + \left(d - \gamma_i - \frac{a}{2} \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} x_j \right) x_i \right] \rightarrow \max_{x \in X}. \quad (1.9)$$

В силу развитости теории методов оптимизации, задачу (1.9) решать легче, чем исходную. Функция P является полиномом 3-ей степени от n неизвестных, а множество X замкнутое и выпуклое.

Если $\hat{x}_i \neq +\infty$ для всех $i \in N$, то существование глобального максимума P на множестве X обеспечивает теорема Вейерштрасса. Если $\hat{x}_i = +\infty$ для некоторых $i \in N$, обратимся к виду функции P : в силу $\alpha_i > 0$ для всех $i \in N$, P убывает вдоль любого направления, состоящего из неотрицательных компонент, при длине шага, большей некоторого

значения. Значит, глобальный максимум будет достигаться по крайней мере на границе X . Из данных рассуждений следует, что в (1.5) всегда существует равновесная точка. Для корректной работы схемы ветвей и границ всё же потребуется ограничить множество X , приняв вместо $\hat{x}_i = +\infty$ некоторые достаточно большие положительные числа.

Имеет место следующее утверждение.

Утверждение 1. *n -мерный полином третьей степени имеет на \mathbb{R}^n не более одной точки локального максимума и не более одной точки локального минимума.*

Доказательство. Пусть $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — полином третьей степени от переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Предположим, он имеет две точки максимума \bar{x}' и \bar{x}'' . Нетрудно убедиться, что функция $g(\lambda) = G(\bar{x}' + \lambda(\bar{x}'' - \bar{x}'))$, $\lambda \in \mathbb{R}$, также является полиномом третьей степени.

Так как \bar{x}' и \bar{x}'' — точки максимума G , то $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ — точки максимума g , являющиеся также стационарными (в силу гладкости g). Отметим, что полином не может иметь не строгие точки максимума в силу того, что число корней его производной (также полинома) ограничено старшей степенью. Следовательно, $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ являются строгими максимумами g . Известно, что между двумя строгими максимумами непрерывной функции одной переменной найдётся минимум. Тогда существует точка $\lambda = \bar{\lambda} \in (0, 1)$, доставляющая g минимум, и являющаяся в силу гладкости g стационарной точкой. Таким образом, получили, что g имеет три стационарные точки. С другой стороны, производная g' представляет собой квадратичную функцию одной переменной, значит, g имеет не более двух стационарных точек. Пришли к противоречию. Относительно минимумов доказательство аналогичное.

Утверждение доказано.

Из утверждения следует, что функция P имеет не более одной точки локального максимума внутри множества X . На границе X также могут существовать точки максимума, что может привести к неединственности равновесия в модели.

2. Метод ветвей и границ

Предлагаемый в данной статье метод базируется на общей схеме ветвей и границ (см. [20], там же обоснована её сходимости к глобальному оптимуму целевой функции). В соответствии с ней для работы метода требуется процедура построения оценки сверху для функции P , а также процедура разбиения исходного множества на подмножества.

Оценивающую сверху вогнутую функцию будем строить, линеаризуя выпуклую часть d.c.-разложения¹, которое мы использовали в локальных методах в [6].

Разбиение исходного параллелепипеда осуществляется на две части по ребру максимальной длины плоскостью, перпендикулярной этому ребру и проходящей через точку максимума оценивающей сверху вогнутой функции, построенной на исходном параллелепипеде. Для сохранения сходимости метода, будем каждые 15 итераций производить разбиение по максимальному ребру пополам.

Отсечение очередного элемента разбиения осуществляется в том случае, если оценка сверху (максимальное значение оценивающей сверху функции) для P на данном элементе разбиения менее рекордного (максимального из известных на X) значения P .

Далее приведём описание построения оценивающих сверху функций. Перепишем P следующим образом:

$$P(x) = \sum_{i \in N} \left(-\beta_i - \frac{a}{2}\right) x_i^2 + \sum_{i \in N} \left(-\alpha_i x_i^3 + (d - \gamma_i) x_i\right) - \frac{a}{2} x^T (A - I) x,$$

где A — матрица размера $n \times n$ вида

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{pmatrix},$$

I — единичная матрица размера $n \times n$. Нетрудно убедиться, что $(A - I)$ неотрицательно определена. Действительно, для всех $x \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$x^T (A - I) x = \left(\sum_{i \in N} x_i \right)^2 \geq 0.$$

В таком случае P можно представить как сумму выпуклой функции φ и вогнутой ψ следующего вида:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{i \in U} \left(-\beta_i - \frac{a}{2}\right) x_i^2, \\ \psi(x) &= \sum_{i \in V} \left(-\beta_i - \frac{a}{2}\right) x_i^2 + \sum_{i \in N} \left(-\alpha_i x_i^3 + (d - \gamma_i) x_i\right) - \frac{a}{2} x^T (A - I) x, \\ U &= \left\{ i \in N \mid \beta_i + \frac{a}{2} < 0 \right\}, \\ V &= N \setminus U. \end{aligned} \tag{2.1}$$

¹ d.c. — (от англ.) «difference of two convex functions». d.c.-разложение означает представление функции в виде разности двух выпуклых функций.

Для построения оценивающей сверху вогнутой функции m^k на параллелепипеде $X_k \subset X$ теперь достаточно линейризовать функцию φ :

$$P(x) = \varphi(x) + \psi(x) \leq m^k(x) = l^k(x) + \psi(x) \quad \forall x \in X_k,$$

$$l^k(x) = \sum_{i \in U} \left(-\beta_i - \frac{a}{2} \right) \left((\tilde{x}_i^k + \hat{x}_i^k)x_i - \tilde{x}_i^k \hat{x}_i^k \right),$$

где $\tilde{x}_i^k, \hat{x}_i^k$ определяют границы множества X_k , т. е.

$$X_k = [\tilde{x}_1^k, \hat{x}_1^k] \times \dots \times [\tilde{x}_n^k, \hat{x}_n^k].$$

k здесь — это некоторое натуральное число, обозначающее номер элемента разбиения, обрабатываемого в данный момент.

Можно увеличить скорость сходимости, уменьшив ошибку аппроксимации P функцией m^k в зависимости от множества X_k . Рассмотрим следующие полиномы третьей степени, входящие в состав P :

$$\rho_i(x_i) = -\alpha_i x_i^3 - \left(\beta_i + \frac{a}{2} \right) x_i^2, \quad i \in U.$$

Вторая производная имеет вид

$$\rho_i''(x_i) = -6\alpha_i x_i - 2\left(\beta_i + \frac{a}{2} \right)$$

и обращается в ноль в точке

$$\tilde{x}_i = -\frac{\beta_i + \frac{a}{2}}{3\alpha_i}.$$

Причём

$$\begin{aligned} \rho_i''(x_i) &\geq 0, & x_i &\leq \tilde{x}_i, \\ \rho_i''(x_i) &\leq 0, & x_i &\geq \tilde{x}_i. \end{aligned}$$

Так как функция ρ_i вогнута при $x_i \geq \tilde{x}_i$, то в случае, если для некоторого $i \in U$ отрезок $[\tilde{x}_i^k, \hat{x}_i^k]$ лежит целиком правее \tilde{x}_i , то слагаемое $(-\beta_i - \frac{a}{2})x_i^2$ не требует линейризации и включается в вогнутую часть d.c.-разложения. Таким образом, мы получим следующее d.c.-разложение,

зависящее от множества X_k текущего элемента разбиения:

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \sum_{i \in U_0} \left(-\beta_i - \frac{a}{2}\right) x_i^2, \\ \psi(x) &= \sum_{i \in V \cup U_1} \left(-\beta_i - \frac{a}{2}\right) x_i^2 + \sum_{i \in N} (-\alpha_i x_i^3 + (d - \gamma_i) x_i) - \frac{a}{2} x^T (A - I) x, \\ U &= \left\{ i \in N \mid \beta_i + \frac{a}{2} < 0 \right\}, \\ V &= N \setminus U, \\ U_1 &= \left\{ i \in U \mid \check{x}_i^k \geq \tilde{x}_i \right\}, \\ U_0 &= U \setminus U_1.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Может оказаться так, что для некоторого X_k будет иметь место

$$U_0 = \emptyset.$$

Это значит, что P вогнута на X_k и оценивающая сверху функция m^k совпадает с ней. В таком случае множество X_k не подлежит разбиению в дальнейшем: запоминается только рекорд, полученный на данном множестве.

Именно разложение (2.2) использовалось в численном эксперименте, результаты которого представлены далее.

3. Численный эксперимент

Для тестирования метода использовались случайно сгенерированные задачи. Вычисления производились в системе GAMS на компьютере конфигурации Intel Core i7-3610QM 2.3 GHz, 8 Gb RAM, Windows 7 (x64). Вспомогательные задачи вогнутой оптимизации (максимизация вогнутой функции m^k на множестве X_k) решались встроенным в GAMS пакетом CONOPT. В качестве критерия останова использовалось стандартное условие схемы ветвей и границ: СТОП, если максимальная оценка сверху среди всех элементов разбиения превышает рекордное значение P не более чем на $\varepsilon \cdot P$, где ε — заранее определённое малое число, т. е. относительная погрешность не превышает ε . В представленных расчётах было установлено $\varepsilon = 10^{-3}$.

Результаты вычислений представлены в табл. 1. В наименованиях столбцов приняты следующие обозначения:

n — размерность задачи (количество участников);

P — количество решённых задач данной размерности;

Таблица 1
 Результаты численного эксперимента для
 метода ветвей и границ

n	P	I_a	W_a	T_a
2	300	13	4	0.91
3	300	26	8	1.46
4	200	55	10	2.98
5	60	96	29	5.25
6	20	300	99	16.27
7	5	901	265	55.86
8	5	1500	378	93.00
9	5	2983	723	161.83
10	5	5498	1684	340.876

I_a — среднее количество итераций, затраченных на решение одной задачи;

W_a — максимальное количество элементов разбиения, одновременно хранимых в памяти для одной задачи (в среднем по всем задачам данной размерности);

T_a — среднее время выполнения вычислений в секундах (не включает время на формирование модели в GAMS).

Выбор размерности задачи для численного эксперимента осуществлялся в соответствии с экономическим содержанием задачи. Такое число участников соответствует числу участников, конкурирующих на олигополистическом рынке.

Стоит заметить, что построение оценивающей сверху функции на основе d.c.-разложения (2.2) примерно в 10 раз увеличило скорость сходимости метода по количеству итераций, по сравнению с использованием разложения (2.1). Это объясняется тем, что (2.2) лучше учитывает специфику максимизируемой функции и расположение очередного элемента разбиения на множестве X .

В заключение отметим, что важным достоинством предлагаемой методики является возможность с помощью неё гарантированно находить равновесие Нэша в модели. Как уже отмечалось ранее, локальный поиск, вообще говоря, может сходиться к стационарным точкам, не являющимся равновесными.

Список литературы

1. Бредихин С. В. Ценовое согласование спроса и предложения при распределении мощности многопроцессорной системы / С. В. Бредихин, Е. М. Тиунова, А. Б. Хуторецкий // Сиб. журн. индустр. математики. – 2007. – Т. 10, № 3(31). – С. 20–28.
2. Микроэкономический анализ несовершенных рынков / В. П. Бусыгин, Е. В. Желободько, С. Г. Коковин, А. А. Цыплаков. – Новосибирск : НГУ, 1999. – 133 с.
3. Гальперин В. М. Микроэкономика : в 2 т. / В. М. Гальперин, С. М. Игнатъев, В. И. Моргунов. – СПб. : Экон. школа, 1994. – Т. 1. – 349 с.
4. Горелов М. А. Игры с запрещёнными ситуациями. Модели с жёсткими ограничениями / М. А. Горелов, А. Ф. Кононенко // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 1. – С. 118–129.
5. Минарченко И. М. О потенциальных и непотенциальных задачах поиска равновесия в модели Курно / И. М. Минарченко // Тр. XV Байк. междунар. школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». – Т. 6 : Мат. экономика. – Иркутск : РИО ИДСТУ СО РАН, 2011. – С. 197–202.
6. Минарченко И. М. Численный поиск равновесия в модели Курно с S-образными функциями издержек / И. М. Минарченко // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2014. – Т. 21, № 5. – С. 40–53.
7. Петросян Л. А. Теория игр : учеб. пособие для ун-тов / Л. А. Петросян, Н. А. Зенкевич, Е. А. Семина. – М. : Высш. шк. : Кн. дом «Университет», 1998. – 304 с.
8. Подковальников С. В. Несовершенные электроэнергетические рынки: моделирование и исследование развития генерирующих мощностей / С. В. Подковальников, О. В. Хамисов // Изв. Акад. наук. Энергетика. – 2011. – № 2. – С. 57–76.
9. Попов Л. Д. Введение в теорию, методы и экономические приложения задач о дополнителности : учеб. пособие / Л. Д. Попов. – Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2001. – 124 с.
10. Сухарев А. Г. Курс методов оптимизации : учеб. пособие / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. – 2-е изд. – М. : Физматлит, 2005. – 368 с.
11. Тарасевич Л. С. Микроэкономика : учебник / Л. С. Тарасевич, П. И. Гребенников, А. И. Леусский. – М. : Юрайт-Издат, 2006. – 374 с.
12. Токарев В. В. Гарантированные результаты в играх с запрещёнными ситуациями / В. В. Токарев // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 6. – С. 123–140.
13. Токарев В. В. Особенности равновесий в играх с запрещёнными ситуациями / В. В. Токарев // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 7. – С. 127–138.
14. Badri A. Security constrained optimal bidding strategy of GenCos in day ahead oligopolistic power markets: a Cournot-based model / A. Badri, M. Rashidinejad // Electrical Engineering. – 2013. – Vol. 95. – P. 63–72.
15. Bagwell K. The economics of trade agreements in the linear Cournot delocation model / K. Bagwell, R. W. Staiger // Journal of International Economics. – 2012. – Vol. 88. – P. 32–46.
16. Nonlinear Oligopolies / G.-I. Bischi, C. Chiarella, M. Kopel, F. Szidarovszky. – Berlin : Springer-Verl., 2014. – 334 p.
17. Botterud A. Optimal Investments in Power Generation under Centralized and Decentralized Decision Making / A. Botterud, M. D. Ilic, I. Wangensteen // Power Systems, IEEE Transactions on. – 2005. – Vol. 20, N 1. – P. 254–263.

18. Analyzing Oligopolistic Electricity Market Using Coevolutionary Computation / H. Chen, K. P. Wong, D. H. M. Nguyen, C. Y. Chung // *Power Systems, IEEE Transactions on.* – 2006. – Vol. 21, N 1. – P. 143–152.
19. Ewerhart C. Cournot games with biconcave demand / C. Ewerhart // *Games and Economic Behavior.* – 2014. – Vol. 85. – P. 37–47.
20. Horst R. Global Optimization: Deterministic Approaches / R. Horst, H. Tuy. – Berlin : Springer-Verl., 1996. – 730 p.
21. Metzler C. Nash-Cournot Equilibria in Power Markets on a Linearized DC Network with Arbitrage: Formulations and Properties / C. Metzler // *Networks and Spatial Economics.* – 2003. – Vol. 3, N 2. – P. 123–150.
22. Monderer D. Potential Games / D. Monderer, L. S. Shapley // *Games and Economic Behavior.* – 1996. – N 14. – P. 124–143.
23. Peters H. Game Theory: A Multi-Levelled Approach. – Berlin: Springer-Verl., 2008. – 366 p.
24. Puu T. Oligopoly: Old Ends — New Means / T. Puu. – Berlin : Springer-Verl., 2011. – 172 p.
25. Ryan J. K. Coordinating a Supply Chain With a Manufacturer-Owned Online Channel: A Dual Channel Model under Price Competition / J. K. Ryan, S. Daewon, Z. Xuying // *Engineering Management, IEEE Transactions on.* – 2013. – Vol. 60, N 2. – P. 247–259.
26. Welfare Effects of Expansions in Equilibrium Models of an Electricity Market with Fuel Network / S. M. Ryan, A. Downward, A. B. Philpott, G. Zakeri // *Power Systems, IEEE Transactions on.* – 2010. – Vol. 25, N 3. – P. 1337–1349.
27. Shan J. Impact of Demand Response on Thermal Generation Investment with High Wind Penetration / J. Shan, A. Botterud, S. M. Ryan // *Smart Grid, IEEE Transactions on.* – 2013. – Vol. 4, N 4. – P. 2374–2383.
28. Slade M. E. What Does an Oligopoly Maximize? / M. E. Slade // *The Journal of Industrial Economics.* – 1994. – Vol. 42, N 1. – P. 45–61.
29. Vallee T. Can They Beat the Cournot Equilibrium? Learning with Memory and Convergence to Equilibria in a Cournot Oligopoly / T. Vallee, M. Yildizoglu // *Computational Economics.* – 2013. – Vol. 41. – P. 493–516.
30. Wang R. Analysis of Nash-Cournot Equilibrium for Electricity Markets Considering Option Contracts / R. Wang, Y. Li, S. Zhang // *Journal of Shanghai University (Eng. Edition).* – 2008. – Vol. 12, N 6. – P. 542–547.

Минарченко Илья Михайлович, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 130 (e-mail: sla669@gmail.com)

I. M. Minarchenko
Use of Branch and Bound Method for Search of an Equilibrium in Potential Cournot Model

Abstract. It is known that Nash equilibria of potential game belong to the set of stationary points of the potential, moreover only the potential's global maximum is an equilibrium in general case. In the paper, we consider Cournot oligopoly model with linear inverse demand function and S-shape players' costs functions determined by cubical polynomials. S-shape form of a function means changing of function's concavity by its convexity. Costs function of such form reflects changing of increasing return of the scale by

decreasing return of the scale, what may be explained as a stage of introduction of a new capacities that is changed by a stage of its normal operation. Such a model is a potential game due to linearity of inverse demand function. The potential is constructed and it has a form of cubical polynomial. Nonconcavity of potential leads to non-uniqueness of equilibrium in general case. Author investigated in other papers the local search of stationary points with multi-start approach and with the following check of the point whether it is an equilibrium. That paper is concerned with an adaptation of branch and bound method for search of the potential's global maximum which is always an equilibrium point. In the paper, the method is described and numerical experiment results are given.

Keywords: Cournot model, potential games, Nash equilibrium, branch and bound method, d.c.-decomposition.

References

1. Bredikhin S. V., Tiunova E. M., Khutoretskiy A. B. Price Coordination of Demand and Supply with Capacity Distribution of Multiprocessor System (in Russian). *Sibirskiy Zhurn. Industr. Matem.*, 2007, vol. 10, no. 3(31), pp. 20–28.
2. Busygin V. P., Zhelobod'ko E. V., Kokovin S. G., Tsyplakov A. A. Microeconomic Analysis of Imperfect Markets (in Russian). Novosibirsk, NSU, 1999. 133 p.
3. Gal'perin V. M., Ignat'ev S. M., Morgunov V. I. Microeconomics (in Russian). *Ekonomicheskaya Shkola*, 1994, vol. 1. 349 p.
4. Gorelov M. A., Kononenko A. F. Games with Forbidden Situations. Models with Soft Constraints. *Autom. Remote Control*, 2010, vol. 71, no. 5, pp. 826–836.
5. Minarchenko I. M. On Potential and Non-potential Equilibrium Problems in Cournot Model (in Russian). *Tr. XV Baykalskoy mezhdunarodnoy shkoly-seminara «Metody optimizatsii i ikh prilozheniya»*, vol. 6 (Math. Econ.), Irkutsk, 2011, pp. 197–202.
6. Minarchenko I. M. Numerical Search of an Equilibrium in Cournot Model with S-shape Costs Functions (in Russian). *Diskretn. Analiz i Issled. Oper.*, 2014, vol. 21, no. 5, pp. 40–53.
7. Petrosyan L. A., Zenkevich N. A., Semina E. A. Game Theory (in Russian). Moscow, Vyshaya Shkola, 1998. 304 p.
8. Podkoval'nikov S. V., Khamisov O. V. Imperfect Electric Power Markets: Modelling and Investigation of Development of Capacities (in Russian). *Izvestiya Akademii Nauk. Energetika*, 2011, no. 2, pp. 57–76.
9. Popov L. D. Introduction to the Theory, Methods and Economical Applications of Complementarity Problems (in Russian). Ekaterinburg, Izd. Ural. Univ., 2001. 124 p.
10. Sukharev A. G., Timokhov A. V., Fedorov V. V. Course of Methods of Optimization (in Russian). Moscow, Fizmatlit, 2005. 368 p.
11. Tarasevich L. S., Grebennikov P. I., Leusskiy A. I. Microeconomics (in Russian). Moscow, Yurayt-Izdat, 2006. 374 p.
12. Tokarev V. V. Guaranteed Results in Games with Forbidden Situations. *Autom. Remote Control*, 2009, vol. 70, no. 6, pp. 1026–1042.
13. Tokarev V. V. Peculiarities of Equilibria in the Forbidden-Situation Games. *Autom. Remote Control*, 2009, vol. 70, no. 7, pp. 1206–1216.
14. Badri A., Rashidinejad M. Security Constrained Optimal Bidding Strategy of GenCos in Day Ahead Oligopolistic Power Markets: a Cournot-Based Model. *Electrical Engineering*, 2013, vol. 95. pp. 63–72.

15. Bagwell K., Staiger R. W. The economics of trade agreements in the linear Cournot delocation model. *Journal of International Economics*, 2012, vol. 88, pp. 32–46.
16. Bischi G.-I., Chiarella C., Kopel M., Szidarovszky F. *Nonlinear Oligopolies*. Berlin, Springer-Verl., 2010. 334 p.
17. Botterud A., Ilic M. D., Wangensteen I. Optimal Investments in Power Generation under Centralized and Decentralized Decision Making. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 2005, vol. 20, no. 1, pp. 254–263.
18. Chen H., Wong K. P., Nguyen D. H. M., Chung C. Y. Analyzing Oligopolistic Electricity Market Using Coevolutionary Computation. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 2006, vol. 21, no. 1, pp. 143–152.
19. Ewerhart C. Cournot games with biconcave demand. *Games and Economic Behavior*, 2014, vol. 85, pp. 37–47.
20. Horst R., Tuy H. *Global Optimization: Deterministic Approaches*. Berlin, Springer-Verl., 1996, P. 730.
21. Metzler C. Nash-Cournot Equilibria in Power Markets on a Linearized DC Network with Arbitrage: Formulations and Properties. *Networks and Spatial Economics*, 2003, vol. 3, no. 2, pp. 123–150.
22. Monderer D., Shapley L. S. Potential Games. *Games and Economic Behavior*, 1996, no. 14, pp. 124–143.
23. Peters H. *Game Theory: A Multi-Leveled Approach*. Berlin, Springer-Verl., 2008, 366 p.
24. Puu T. *Oligopoly: Old Ends — New Means*. Berlin, Springer-Verl., 2011. 172 p.
25. Ryan J. K., Daewon S., Xuying Z. Coordinating a Supply Chain With a Manufacturer-Owned Online Channel: A Dual Channel Model under Price Competition. *Engineering Management, IEEE Transactions on*, 2013, vol. 60, no. 2, pp. 247–259.
26. Ryan S. M., Downward A., Philpott A. B., Zakeri G. Welfare Effects of Expansions in Equilibrium Models of an Electricity Market with Fuel Network. *Power Systems, IEEE Transactions on*, 2010, vol. 25, no. 3, pp. 1337–1349.
27. Shan J., Botterud A., Ryan S. M. Impact of Demand Response on Thermal Generation Investment with High Wind Penetration. *Smart Grid, IEEE Transactions on*, 2013, vol. 4, no. 4, pp. 2374–2383.
28. Slade M. E. What Does an Oligopoly Maximize? *The Journal of Industrial Economics*, 1994, vol. 42, no. 1, pp. 45–61.
29. Vallee T., Yildizoglu M. Can They Beat the Cournot Equilibrium? Learning with Memory and Convergence to Equilibria in a Cournot Oligopoly. *Computational Economics*, 2013, vol. 41, pp. 493–516.
30. Wang R., Li Y., Zhang S. Analysis of Nash-Cournot Equilibrium for Electricity Markets Considering Option Contracts. *Journal of Shanghai University (Eng. Edition)*, 2008, vol. 12, no. 6, pp. 542–547.

Minarchenko Ilya Mikhailovich, Melentiev Energy Systems Institute
SB RAS, 130, Lermontov st., Irkutsk, 664033 (e-mail: sla669@gmail.com)