Серия «Математика»
2016. Т. 15. С. 78—91

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.97
MSC 49J15

Задачи оптимального управления для билинейной системы специальной структуры

В. А. Срочко
Иркутский государственный университет

Е. В. Аксенюшкина
Байкальский государственный университет

Аннотация. Рассматриваются три задачи оптимального управления (линейный терминальный, билинейный и квадратичный функционалы) относительно специальной билинейной системы с матрицей ранга 1. Для терминальной задачи получены два варианта условий на исходные данные системы и функционала, при которых принцип максимума приобретает свойство достаточного признака оптимальности, т. е. задача переходит в разряд выпуклых. При этом ее решение проводится элементарно: оптимальное управление находится в процессе интегрирования сопряженной или фазовой систем (одна задача Коши).

Далее рассматривается задача оптимизации билинейного функционала, для которого получены достаточные условия оптимальности граничных управлений без точек переключения. Эти условия представляются как неравенства для функций одной переменной (времени) на заданном промежутке. Каждый подсчет значений этих функций связан с решением терминальной задачи, т. е. имеет реализуемый характер.

В заключение выделяется задача оптимизации квадратичного по фазовым переменным функционала, которая с помощью специального варианта формулы приращения сводится к билинейному случаю.

Ключевые слова: билинейная система, задачи оптимального управления, принцип максимума, достаточные условия оптимальности.

1. Задача оптимизации терминального функционала

Переменные: $t \in [0, t_1]$, $u(t) \in R$, $x(t) \in R^n$.

Множество допустимых управлений

$$V = \{\, u(\cdot) \in PC[0,t_1] : \, u(t) \in [0,1], \, t \in [0,t_1]\}.$$

Билинейная система

$$\dot{x} = (A + ubc^T)x, \quad x(0) = x^0, \;\; x^0 \neq 0. \tag{1.1}$$

Здесь $A \in R^{n \times n}$, $b, c \in R^n$, bc^T - матрица ранга 1 с элементами $b_i c_j$, $i, j = \overline{1, n}$.

Представим систему (1.1) в эквивалентной форме

$$\dot{x} = Ax + ub\langle c, x\rangle, \quad x(0) = x^0, \tag{1.2}$$

где $\langle , \rangle$ - знак скалярного произведения.

Поставим задачу на максимум линейного терминального функционала (задача (P))

$$\Phi(u) = \langle d, x(t_1)\rangle \to max$$

с целевым вектором $d \in R^n$.

Билинейные системы вида (1.1) имеют существенное прикладное значение. Они описывают математические модели целого ряда процессов в биологии, экономике, медицине, энергетике и являются объектом исследования в теории автоматического управления [4]. В частности, такие системы моделируют процесс лечения злокачественных опухолей (химиотерапия) путем задержки развития раковых клеток в определенной стадии [6; 7]. Некоторые результаты применительно к системе (1.1) (условия положительности решений, свойства множества достижимости, оценка числа переключений экстремальных управлений, численные расчеты) получены в [4; 5].

В данной статье ряд задач, связанных с системой (1.1), исследуется с позиций достаточных условий оптимальности. Для задачи (P) получены два варианта условий на исходные данные (A, b, c, d, x^0), при которых принцип максимума становится достаточным признаком оптимальности, т. е. задача (P) переходит в разряд выпуклых. При этом ее решение проводится элементарно: оптимальное управление находится в процессе интегрирования сопряженной или фазовой системы (одна задача Коши). Далее рассматривается задача оптимизации билинейного функционала, для которого получены достаточные условия оптимальности простейших управлений $u = 0$, $u = 1$. Эти условия представляются как неравенства $\varphi_0(t) \leq 0$, $\varphi_1(t) \geq 0$ для функций одной переменной t на промежутке $[0, t_1]$. Каждый подсчет значений $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ предполагает решение задачи (P) при $t_1 = t$, что обеспечивает конструктивный (реализуемый) характер результата. В заключение рассматривается задача оптимизации квадратичного по фазовым переменным функционала, которая с помощью специального варианта формулы приращения сводится к билинейному случаю. Это значит, что квадратичные задачи для билинейной системы (1.1) не имеют самостоятельного значения, и исследования должны ориентироваться на билинейный функционал.

2. Принцип максимума и достаточные условия оптимальности

Образуем функцию Понтрягина относительно системы (1.1)

$$H(\psi, x, u) = \langle \psi, (A + ubc^T)x \rangle.$$

Сопряженная система имеет вид

$$\dot{\psi} = -(A^T + ucb^T)\psi, \quad \psi(t_1) = d. \tag{2.1}$$

Применительно к системе (1.2) получаем

$$H(\psi, x, u) = \langle \psi, Ax \rangle + u\langle b, \psi \rangle \langle c, x \rangle, \tag{2.2}$$

$$\dot{\psi} = -A^T\psi - uc\langle b, \psi \rangle, \quad \psi(t_1) = d.$$

H - максимизирующее управление представляется выражением

$$w_*(\psi, x) = arg \max_{u \in [0,1]} H(\psi, x, u) = \begin{cases} 0, & \langle b, \psi \rangle \langle c, x \rangle < 0, \\ 1, & \langle b, \psi \rangle \langle c, x \rangle > 0. \end{cases}$$

В результате принцип максимума (ПМ) для задачи (P) состоит в следующем. Пусть $u(t),\ t \in [0, t_1]$ — допустимое управление, $x(t, u)$, $\psi(t, u)$ - соответствующие ему фазовая и сопряженная траектории. Для оптимальности управления $u(t)$ в задаче (P) необходимо, чтобы

$$u(t) = w_*(\psi(t, u), x(t, u)), \quad t \in [0, t_1].$$

Отметим, что (P) — невыпуклая задача, т. е. ПМ не является, вообще говоря, достаточным условием оптимальности (билинейная система). Сформулируем два достаточных условия в терминологии ПМ [3].

Условие 1. Если

$$u(t) = w_*(\psi(t, u), x(t, v)), \quad t \in T, \ \ v \in V,$$

то $u(t)$ - оптимальное управление в задаче (P).

Условие 2. Если

$$u(t) = w_*(\psi(t, v), x(t, u)), \quad t \in T, \ \ v \in V,$$

то $u(t)$ - оптимальное управление в задаче (P).

Таким образом, достаточные условия в отличие от ПМ означают, что управление $u(t)$ является H-максимизирующим относительно всех фазовых или сопряженных траекторий.

Выясним условия на параметры задачи (P), при которых ПМ становится достаточным для оптимальности, т. е.

$$\text{ПМ} \Rightarrow \text{условие 1 или ПМ} \Rightarrow \text{условие 2.}$$

3. Условия знакопостоянства фазовых и сопряженных траекторий

Введем матрицу коэффициентов фазовой системы (1.1)

$$F(u) = A + ubc^T$$

с элементами $f_{ij}(u) = a_{ij} + ub_ic_j,\ i,j = \overline{1,n}$. Тогда фазовая система представляется в виде

$$\dot{x} = F(u)x, \quad x(0) = x^0.$$

Лемма 1. *Пусть внедиагональные элементы матрицы $F(u)$ неотрицательны:*

$$f_{ij}(u) \geq 0, \quad i \neq j, \quad u \in [0,1].$$

Тогда все решения фазовой системы сохраняют знак начального состояния:

$$x^0 > 0 \Rightarrow x(t,u) > 0, \quad t \in (0,t_1], \quad u \in V;$$

$$x^0 < 0 \Rightarrow x(t,u) < 0, \quad t \in (0,t_1], \quad u \in V.$$

Доказательство. Рассмотрим случай $x^0 > 0$. Пусть $u \in V$, $x(t,u)$ — соответствующая фазовая траектория. Поскольку $x(0,u) = x^0 > 0$, то $x(t,u) > 0$ для малых $t > 0$. Пусть $\tau > 0$ — первый момент обращения в нуль какой-либо координаты вектор-функции $x(t,u)$, т. е.

$$x_i(t,u) > 0, \quad t \in [0,\tau), \quad i = \overline{1,n},$$

$$\exists\, k \in \{1,...,n\} :\ x_k(\tau,u) = 0.$$

Если $\tau > t_1$, то утверждение леммы выполнено.

Предположим, что $\tau \leq t_1$. Выделим k-ое уравнение фазовой системы при $u \in V$, $t \in [0,\tau]$

$$\dot{x}_k(t,u) = \sum_{j=1}^{n} f_{kj}(u(t))x_j(t,u) = f_{kk}(u(t))x_k(t,u) +$$

$$+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} f_{kj}(u(t))x_j(t,u).$$

Обозначим

$$\alpha_k(t) = f_{kk}(u(t)), \quad \beta_k(t) = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} f_{kj}(u(t),t)x_j(t,u).$$

Согласно условию леммы и определению момента τ имеем $\beta_k(t) \geq 0$, $t \in [0,\tau]$.

При этом получаем уравнение

$$\dot{x}_k(t,u) = \alpha_k(t)x_k(t,u) + \beta_k(t), \quad x_k(0,u) = x_k^0.$$

По формуле Коши

$$x_k(\tau,u) = exp\,\left(\int_0^\tau \alpha_k(t)dt\right)\,[x_k^0+$$

$$+\int_0^\tau exp\,\left(-\int_0^t \alpha_k(s)ds\right)\beta_k(t)dt].$$

Поскольку $x_k^0 > 0$, $\beta_k(t) \geq 0$, $t \in [0,\tau]$, то $x_k(\tau,u) > 0$. Это противоречит определению $\tau:\ x_k(\tau,u) = 0$.

$\square$

Следствие 1.

$$f_{ij}(u) \geq 0,\ \ u \in [0,1] \Leftrightarrow a_{ij} + min\{0, b_i c_j\} \geq 0, \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{1,n}.$$

Доказательство. Представим условие леммы 1 в экстремальном форме

$$\min_{u\in[0,1]} f_{ij}(u) \geq 0, \quad f_{ij} = a_{ij} + ub_ic_j, \quad i \neq j.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$ub_ic_j \to min, \quad u \in [0,1].$$

Ее решение

$$u_{ij} = \begin{cases} 0,\ b_ic_j \geq 0, \\ 1,\ b_ic_j < 0. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\min_{u\in[0,1]} ub_ic_j = \begin{cases} \ \ 0, & b_ic_j \geq 0 \\ b_ic_j, & b_ic_j < 0 \end{cases} = min\{0, b_ic_j\}.$$

$\square$

Перейдем к рассмотрению сопряженной системы, которую представим в форме

$$\dot{\psi} = -F^T(u)\psi, \quad \psi(t_1) = d. \tag{3.1}$$

Лемма 2. *Пусть внедиагональные элементы матрицы $F(u)$ неотрицательны:*

$$f_{ij}(u) \geq 0, \quad i \neq j, \quad i,j = \overline{1,n}, \quad u \in [0,1].$$

Тогда все траектории сопряженной системы сохраняют знак начального состояния:

$$\psi(t_1) > 0 \Rightarrow \psi(t,u) > 0, \quad t \in [0,t_1), \quad u \in V;$$

$$\psi(t_1) < 0 \Rightarrow \psi(t,u) < 0, \quad t \in [0,t_1), \quad u \in V.$$

Доказательство. Рассмотрим первый случай: $\psi(t_1) > 0$. Пусть $u(t)$ - допустимое управление с траекторией $\psi(t,u)$. Тогда $\psi(t,u) > 0$, $t \in (t_1 - \epsilon, t_1)$ для малых $\epsilon > 0$. Пусть $\tau < t_1$ - первый момент обращения в нуль какой-либо координаты вектор-функции $\psi(t,u)$, т.е.

$$\psi_i(t,u) > 0, \quad t \in (\tau, t_1], \quad i = \overline{1,n},$$

$$\exists\, k \in \{1,...,n\} : \ \psi_k(\tau,u) = 0.$$

Если $\tau < 0$, то утверждение леммы выполнено.

Предположим, что $\tau \geq 0$. Выделим k-ое уравнение сопряженной системы (3.1) при $u \in V$, $t \in [\tau, t_1]$

$$\dot{\psi}_k(t,u) = -\sum_{j=1}^{n} f_{jk}(u(t))\psi_j(t,u) =$$

$$= -f_{kk}(u(t))\psi_k(t,u) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} f_{jk}(u(t))\psi_j(t,u).$$

Обозначим

$$\alpha_k(t) = f_{kk}(u(t)), \quad \beta_k(t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} f_{jk}(u(t))\psi_j(t,u).$$

С учетом условия леммы и определения точки τ имеем $\beta_k(t) \geq 0$, $t \in [\tau, t_1]$.

При этом получаем уравнение

$$\dot{\psi}_k(t,u) = -\alpha_k(t)\psi_k(t,u) - \beta_k(t), \quad \psi_k(t_1,u) = d_k.$$

Согласно формуле Коши

$$\psi_k(\tau, u) = exp\, \left(\int_\tau^{t_1} \alpha_k(t)dt \right) \, [\psi_k(t_1, u) +$$

$$+ \int_\tau^{t_1} exp\, \left(- \int_t^{t_1} \alpha_k(s)ds \right) \beta_k(t)dt].$$

Поскольку $\psi_k(t_1, u) > 0$, $\beta_k(t) \geq 0$, $t \in [\tau, t_1]$, то $\psi_k(\tau, u) > 0$. Это противоречит определению $\tau : \psi_k(\tau, u) = 0$.

□

4. Условия достаточности принципа максимума

Теорема 1. *Пусть в задаче (P) выполнены следующие условия на параметры:*

$$a_{ij} + min\{0, b_i c_j\} \geq 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j,$$

$$x^0 > 0, \quad c \geq 0, \quad c \neq 0.$$

Тогда принцип максимума является достаточным условием оптимальности.

Доказательство. В условиях теоремы 1 все фазовые траектории $x(t, u)$ положительны, причем

$$\langle c, x(t, u) \rangle > 0, \quad t \in [0, t_1], \quad u \in V. \tag{4.1}$$

Сформулируем принцип максимума для управления $\bar{u} \in V$

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0, & \langle b, \psi(t, \bar{u}) \rangle \langle c, x(t, \bar{u}) \rangle < 0 \\ 1, & \langle b, \psi(t, \bar{u}) \rangle \langle c, x(t, \bar{u}) \rangle > 0 \end{cases}, \quad t \in [0, t_1].$$

С учетом свойства (4.1) получаем $\forall\, u \in V$, $t \in [0, t_1]$

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0, & \langle b, \psi(t, \bar{u}) \rangle \langle c, x(t, u) \rangle < 0, \\ 1, & \langle b, \psi(t, \bar{u}) \rangle \langle c, x(t, u) \rangle > 0. \end{cases}$$

Это первое достаточное условие оптимальности для управления $\bar{u}(t)$.

□

Замечание 1. Утверждение теоремы 1 сохраняется при условиях

$$x^0 < 0, \quad c \leq 0, \quad c \neq 0.$$

Теорема 2. *Пусть в задаче (P) выполнены следующие условия на параметры:*

$$a_{ij} + min\{0, b_i c_j\} \geq 0, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad i \neq j,$$

$$d > 0, \quad b \geq 0, \quad b \neq 0.$$

Тогда принцип максимума является достаточным условием оптимальности.

Доказательство. В условиях теоремы 2 $\psi(t_1) > 0$, и все сопряженные траектории $\psi(t, u)$ положительны, причем

$$\langle b, \psi(t, u)\rangle > 0, \quad t \in [0, t_1], \quad u \in V.$$

Тогда принцип максимума для управления $\bar{u} \in V$ представляется в виде

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} 0, & \langle b, \psi(t, u)\rangle\langle c, x(t, \bar{u})\rangle < 0 \\ 1, & \langle b, \psi(t, u)\rangle\langle c, x(t, \bar{u})\rangle > 0 \end{cases}$$

Это второе достаточное условие оптимальности для управления $\bar{u}(t)$. □

Замечание 2. Утверждение теоремы 2 сохраняется при условиях

$$d < 0, \quad b \leq 0, \quad b \neq 0.$$

5. Решение билинейной задачи

Рассмотрим задачу (P) в условиях теоремы 1 (задача (P_1)). В данном случае необходимое и достаточное условие оптимальности для управления $u_* \in V$ (ПМ) выражается соотношением

$$u_*(t) = \begin{cases} 0, & \langle b, \psi(t, u_*)\rangle < 0, \\ 1, & \langle b, \psi(t, u_*)\rangle > 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем следующую процедуру решения задачи (P_1).

Определим вспомогательное управление

$$u_1(\psi) = \begin{cases} 0, & \langle b, \psi\rangle \leq 0, \\ 1, & \langle b, \psi\rangle > 0, \end{cases}$$

найдем решение $\psi^*(t)$, $t \in [0, t_1]$ сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^T\psi - u_1(\psi)\langle b, \psi\rangle c, \quad \psi(t_1) = d$$

и сформируем оптимальное управление $u_*(t) = u_1(\psi^*(t))$, $t \in [0, t_1]$.

Отметим, что сопряженная система представляется в виде

$$\dot{\psi} = -A^T\psi - c\,max\{0, \langle b, \psi\rangle\}, \quad \psi(t_1) = d.$$

Ее решение $\psi^*(t)$, $t \in [0, t_1]$ существует и является единственным: правая часть удовлетворяет условию Липшица для $\psi \in R^n$.

Замечание 3. Поясним последнее утверждение применительно к функции максимума

$$\varphi(x) = max\{0, \langle b, x\rangle\}, \quad x \in R^n.$$

Рассматривая приращение $\varphi(x) - \varphi(y)$ для возможных знаковых ситуаций относительно $\langle b, x\rangle$, $\langle b, y\rangle$, приходим к оценке

$$|\,\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |\langle b, x - y\rangle|, \quad x, y \in R^n,$$

которая сразу порождает условие Липшица с константой $||b||$.

Рассмотрим задачу (P) в условиях теоремы 2 (задача (P_2)). В этом случае критерий оптимальности для управления $u_* \in V$ выражается по формуле

$$u_*(t) = \begin{cases} 0, & \langle c, x(t, u_*)\rangle < 0, \\ 1, & \langle c, x(t, u_*)\rangle > 0. \end{cases}$$

В результате получаем следующую процедуру решения задачи (P_2).

Определим вспомогательное управление

$$u_2(x) = \begin{cases} 0, & \langle c, x\rangle \leq 0, \\ 1, & \langle c, x\rangle > 0, \end{cases}$$

найдем решение $x^*(t)$, $t \in [0, t_1]$ фазовой системы

$$\dot{x} = Ax + u_2(x)\langle c, x\rangle b, \quad x(0) = x^0$$

и сформируем оптимальное управление $u_*(t) = u_2(x^*(t))$, $t \in [0, t_1]$.

Отметим, что фазовая система представляется в виде

$$\dot{x} = Ax + b\,max\{0, \langle c, x\rangle\}, \quad x(0) = x^0.$$

Ее решение $x_*(t)$, $t \in [0, t_1]$ существует и является единственным.

6. Задача оптимизации билинейного функционала

В рамках билинейной системы (1.1) определим обобщенный функционал

$$\Phi_0(u) = \langle d^{\,0}, x(t_1)\rangle + \int_0^{t_1} \langle a(t), x(t)\rangle u(t)dt$$

с непрерывной вектор-функцией $a(t),\ t \in [0, t_1]$.

Рассмотрим билинейную задачу (задача (P_0))

$$\Phi_0(u) \to max, \quad u \in V$$

с позиций достаточных условий оптимальности для управлений $u = 0 \vee 1$.

В данном случае сопряженная система для вектор-функции $\psi^0(t)$ принимает вид

$$\dot{\psi}^0 = -(A^T + ucb^T)\psi^0 - ua(t), \quad \psi^0(t_1) = d^{\,0},$$

и функция переключения выражается по формуле

$$H_u(\psi^0, x, t) = \langle a(t) + \langle b, \psi^0 \rangle c, x \rangle. \tag{6.1}$$

Возьмем за основу следующее представление для приращения функционала Φ_0 на паре управлений $u, v \in V$ [1; 2]

$$\Phi_0(v) - \Phi_0(u) = \int_0^{t_1} H_u(\psi^0(t,u), x(t,v), t)(v(t) - u(t))dt.$$

Рассмотрим управление $u = 0$. Достаточным условием его оптимальности является неравенство

$$H_u(\psi^0(t,0), x(t,v), t) \le 0, \quad t \in [0, t_1], \quad v \in V.$$

С учетом выражения (6.1) введем функцию

$$\varphi_0(t) = \max_{v \in V} \langle a(t) + \langle b, \psi^0(t,0) \rangle c, x(t,v) \rangle.$$

Тогда получаем результат: если $\varphi_0(t) \le 0,\, t \in [0, t_1]$, то управление $u = 0$ является оптимальным в задаче (P_0).

Пусть в задаче (P_0) выполнены предположения теоремы 1. Тогда для каждого фиксированного $t \in (0, t_1]$ подсчет значения $\varphi_0(t)$ связан с решением задачи (P_1) при $t_1 = t,\ d = a(t) + \langle b, \psi^0(t,0) \rangle c$, т.е. не представляет затруднений (две задачи Коши).

Аналогично, для управления $u = 1$ условием оптимальности является неравенство

$$H_u(\psi^0(t,1), x(t,v), t) \ge 0, \quad t \in [0, t_1], \quad v \in V.$$

Введем функцию

$$\varphi_1(t) = \min_{v \in V} \langle a(t) + \langle b, \psi^0(t,1) \rangle c, x(t,v) \rangle$$

и сформулируем результат: если $\varphi_1(t) \ge 0,\ t \in [0, t_1]$, то управление $u = 1$ является оптимальным в задаче (P_0).

Подсчет значений $\varphi_1(t)$, $t \in (0, t_1]$ в рамках задачи (P_1) носит простой вычислительный характер.

Отметим, что неравенства $\varphi_0(0) \leq 0$, $\varphi_1(0) \geq 0$ представляют собой принцип максимума для управлений $u = 0$, $u = 1$ соответственно в точке $t = 0$.

7. Задача оптимизации квадратичного функционала

Для билинейной системы (1.1) на множестве допустимых управлений V определим квадратичный функционал

$$\Phi_1(u) = \frac{1}{2}\langle x(t_1), Dx(t_1)\rangle + \frac{1}{2}\int_0^{t_1}\langle x(t), Q(t)x(t)\rangle dt$$

с условием симметричности матриц D, $Q(t)$.

Сформулируем соответствующую билинейно-квадратичную задачу

$$\Phi_1(u) \to max, \quad u \in V. \tag{7.1}$$

Определим необходимые конструкции:
первая сопряженная система для вектор-функции $\psi^1(t)$ -

$$\dot{\psi}^1 = -(A^T + ucb^T)\psi^1 - Q(t)x, \quad \psi^1(t_1) = Dx(t_1),$$

вторая сопряженная система для симметричной матричной функции $\Psi(t)$ -

$$\dot{\Psi} = -(A^T + ucb^T)\Psi - \Psi(A + ubc^T) - Q(t), \quad \Psi(t_1) = D,$$

функция переключения -

$$H_u(\psi^1, x) = \langle b, \psi^1\rangle\langle c, x\rangle. \tag{7.2}$$

Для управления $u \in V$ обозначим соответствующие решения: $x(t, u)$, $\psi^1(t, u)$, $\Psi(t, u)$. При $u = 0$ установим связь между ними.

Лемма 3. *Имеет место следующее соотношение*

$$\psi^1(t, 0) = \Psi(t, 0)x(t, 0), \quad t \in [0, t_1]. \tag{7.3}$$

Доказательство. При $t = t_1$ равенство (7.3) выполняется по определению ψ^1. Проведем дифференцирование тождества (7.3) в силу уравнений для $\Psi(t, 0)$, $x(t, 0)$

$$\dot{\psi}^1(t, 0) = -A^T\Psi(t, 0)x(t, 0) - \Psi(t, 0)Ax(t, 0) - Q(t)x(t, 0) +$$
$$+\Psi(t, 0)Ax(t, 0) = -A^T\psi^1(t, 0) - Q(t)x(t, 0).$$

Получили сопряженную систему для $\psi^1(t, 0)$.

□

Перейдем на уровень функционала задачи (7.1).

Лемма 4. *Имеет место следующее представление для функционала*

$$\Phi_1(u) = \Phi_1(0) + \int_0^{t_1} \langle \Psi(t,0)b, x(t,u)\rangle \langle c, x(t,0)\rangle u(t)dt. \tag{7.4}$$

Доказательство. Рассмотрим общую формулу приращения функционала в квадратичной задаче для пары $u, v \in V$ с учетом выражения (7.2) [1; 2]

$$\Phi_1(v) - \Phi_1(u) =$$

$$= \int_0^{t_1} \langle b, \psi^1(t,u) + \Psi(t,u)(x(t,v) - x(t,u))\rangle \langle c, x(t,u)\rangle (v(t) - u(t))dt.$$

Положим здесь $v = u$, $u = 0$

$$\Phi_1(u) - \Phi_1(0) =$$

$$= \int_0^{t_1} \langle b, \psi^1(t,0) + \Psi(t,0)(x(t,u) - x(t,0))\rangle \langle c, x(t,0)\rangle u(t)dt.$$

Используя соотношение (7.3), получаем представление (7.4).

□

Подведем итог. На основании формулы (7.4) билинейно-квадратичная задача (7.1) преобразуется в билинейную задачу (P_0) с условием

$$d^0 = 0, \quad a(t) = \langle c, x(t,0)\rangle \Psi(t,0)b, \quad t \in [0, t_1].$$

Список литературы

1. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления / В. А. Срочко. – М. : Физматлит, 2000. – 160 с.
2. Срочко В. А. Методы решения многоэкстремальных задач оптимального управления / В. А. Срочко, В. Г. Антоник. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2012. – 105 с.
3. Срочко В. А. Достаточные условия оптимальности в задачах управления на основе формул приращения функционала / В. А. Срочко, В. Г. Антоник, Е. В. Аксенюшкина // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2014. – Т. 8 – С. 125–140.
4. Хайлов Е. Н. Об экстремальных управлениях однородной билинейной системы, управляемой в положительном ортанте / Е. Н. Хайлов // Тр. МИАН. – 1998. – Т. 220 – С. 217–235.
5. Хайлов Е. Н. О решении задачи оптимального управления с терминальным функционалом для однородной билинейной системы / Е. Н. Хайлов // Вестн. МГУ. Сер. 15. – 1998. – № 1. – С. 26–30.

6. Swierniak A. Some Control Problems for Simplest Differential Models of Proliferation Cycle / A. Swierniak // Applied Math. and Computer Science. – 1994. – Vol. 4, N 2. – P. 223–232.
7. Swierniak A. Cell Cycle as an Object of Control / A. Swierniak // Journal of Biological Systems. – 1995. – Vol. 3, N 1. – P. 41–54.

Срочко Владимир Андреевич, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики, экономики и информатики, Иркутский государственный университет, 664003, Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: (3952)521275 (e-mail: srochko@math.isu.ru)

Аксенюшкина Елена Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент, Байкальский государственный университет, 664015, Иркутск, ул. Ленина, 11, тел.: (3952)255550
(e-mail: aks.ev@mail.ru)

V. A. Srochko, E. V. Aksenyushkina

Optimal Control Problems for the Bilinear System of Special Structure

Abstract. We consider three optimal control problems (linear terminal, bilinear and quadratic functionals) with respect to the special bilinear system with a matrix of rank 1. For the terminal problem we received two versions of conditions on the initial data of the system and functional in which the maximum principle becomes the sufficient optimality condition. At the same time the problem becomes very simple: the optimal control is determined in the process of integration phase or conjugate system (one Cauchy problem).

Next the problem of optimization of bilinear functional is considered. Sufficient optimality conditions for the boundary controls without switching points are obtained.These conditions are represented as inequalities for functions of one variable (the time).

The optimal control problem with the quadratic functional reduces to bilinear case on the basis of special increment formula.

Keywords: bilinear system, optimal control problem, the maximum principle, sufficient optimality conditions.

References

1. Srochko V.A. Iterative methods for solving optimal control problems (in Russian). Moscow, Fizmatlit, 2000. 160 p.
2. Srochko V.A., Antonik V.G. Methods for solving multiextremal problems of optimal control (in Russian), Irkutsk, IGU, 2012. 105 p.
3. Srochko V.A., Antonik V.G., Aksenyushkina E.V. Sufficient optimality conditions based on functional increment formulas in control problems (in Russian). *Izvestia IGU, Ser. Matematika*, 2014, vol. 8, pp. 125-140.
4. Khailov E. N. On extremal controls in homogeneous bilinear system (in Russian). *Trudy MIAN*, 1998, vol. 220, pp. 217-235.
5. Khailov E. N. Solving of optimal control problems with a terminal functional for bilinear systems (in Russian). *Vestnik MGU, ser. 15*, 1998, no 1, pp. 26-30.

6. Swierniak A. Some Control Problems for Simplest Differential Models of Proliferation Cycle. *Applied Math. and Computer Science*, 1994, vol. 4, no 2, pp. 223-232.
7. Swierniak A. Cell Cycle as an Object of Control. *Journal of Biological Systems*, 1995, vol. 3, no 1, pp. 41-54.

Srochko Vladimir Andreevich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, tel.: (3952)521275 (e-mail: srochko@math.isu.ru)

Aksenyushkina Elena Vladimirovna, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor, Baikal State University, 11, Lenin st., Irkutsk, 664015, tel.: (3952)255550 (e-mail: aks.ev@mail.ru)