

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS AND FUNCTIONAL ANALYSIS



Серия «Математика»
2026. Т. 56. С. 47–63

Онлайн-доступ к журналу:
<http://mathizv.isu.ru>

ИЗВЕСТИЯ

Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 519.622

MSC 65L09, 34A55, 34B10

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.56.47>

К решению коэффициентно-обратных задач для ОДУ с нелокальными условиями

К. Р. Айда-заде^{1,3}, В. М. Абдуллаев^{1,2,3✉}

¹ Институт математики, Баку, Азербайджан

² Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности,
Баку, Азербайджан

³ Азербайджанский университет архитектуры и строительства, Баку,
Азербайджан

✉ vaqif_ab@rambler.ru

Аннотация: Рассмотрен класс задач определения неизвестных постоянных значений коэффициентов в свободных членах неавтономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Отмечается, что основные условия и условия переопределения имеют в общем случае нелокальный характер, они включают суммарные значения неизвестной функции как в отдельных точках, так и интегральные их значения на отдельных интервалах. В зависимости от соотношения количества неизвестных коэффициентов и дополнительных условий рассмотрены различные варианты постановок задач и методов их решения. Приводятся результаты компьютерных экспериментов и проведен анализ влияния погрешностей в заданных условиях на точность результатов решения тестовых задач.

Ключевые слова: обратные задачи, параметрическая идентификация, многоточные условия, нелокальные условия, динамическая система

Ссылка для цитирования: Айда-заде К. Р., Абдуллаев В. М. К решению коэффициентно-обратных задач для ОДУ с нелокальными условиями // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2026. Т. 56. С. 47–63.
<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.56.47>

Research article

On the Solution of Coefficient-Inverse Problems for ODEs with Non-Local Conditions

Kamil R. Aida-zade^{1,3}, Vagif M. Abdullayev^{1,2,3}✉

¹ Institute of Mathematics, Baku, Azerbaijan

² Azerbaijan State Oil and Industry University, Baku, Azerbaijan

³ Azerbaijan University of Architecture and Construction, Baku, Azerbaijan

✉ vaqif.ab@rambler.ru

Abstract: We consider a class of problems in which it is required to determine unknown constant coefficients appearing in the free terms of non-autonomous systems of ordinary differential equations. The basic and additional (overdetermining) conditions are, in the general case, of a nonlocal nature: they involve cumulative characteristics of the unknown state functions – both their values at selected points and their integral values over specified sub-intervals. Depending on the relation between the number of unknown coefficients and the number of additional conditions, several problem settings and corresponding solution methods are discussed. Results of computer experiments are presented, together with an analysis of how errors in the prescribed conditions affect the accuracy of the solutions for test problems.

Keywords: inverse problems, parametric identification, multipoint conditions, nonlocal conditions, dynamic system

For citation: Aida-zade K. R., Abdullayev V. M. On the Solution of Coefficient-Inverse Problems for ODEs with Non-Local Conditions. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2026, vol. 56, pp. 47–63. (in Russian)
<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2026.56.47>

1. Введение

Исследуется класс коэффициентно-обратных задач относительно линейных систем неавтономных дифференциальных уравнений с обыкновенными производными [4; 6; 10; 11]. Основные условия и условия переопределения являются линейными и в общем случае имеют нелокальный характер, а именно они определяются суммарными значениями неизвестных фазовых функций как в отдельных точках, так и интегральными их значениями по отдельным интервалам независимой переменной.

В зависимости от соотношения числа неизвестных коэффициентов (параметров) и количества условий переопределения рассмотрены два варианта постановки задачи определения неизвестных коэффициентов. Для случая их равенства предложен подход для решения задачи, использующий специальное представление решения краевой задачи. Подход сводит решение поставленной задачи к двум вспомогательным кра-

евым задачам, решения которых используются для формирования линейной алгебраической системы относительно неизвестных коэффициентов.

Отметим, что к рассматриваемому классу задач, в частности, приводятся многие обратные задачи относительно источников, описываемые дифференциальными уравнениями с частными производными при нелокальных условиях [12; 14; 17]. Применение для численного решения метода прямых по пространственной или временной переменной [5] приводит эти задачи к рассматриваемым в данной работе обратным задачам относительно систем дифференциальных уравнений с обыкновенными производными с нелокально заданными начальными или краевыми условиями [7; 8].

Во многих известных работах используются в основном следующие два подхода к численному решению рассматриваемого класса задач. Первый подход заключается в сведении этих задач к задачам оптимального управления [15]. Второй подход использует построение фундаментального решения (функции Грина) для краевых задач относительно дифференциальных уравнений с частными производными [12; 13; 18].

В отличие от этих методов, предлагаемый в данной работе подход к решению рассматриваемого класса задач не является итерационным и не требует многократного решения как исходной, так и каких-либо других вспомогательных задач относительно каких-либо систем дифференциальных уравнений.

2. Постановка задачи

Рассматривается следующая коэффициентно-обратная задача относительно системы обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными условиями:

$$\frac{du(x)}{dx} = A(x)u(x) + B(x)P + C(x), \quad x \in [a, b], \quad (2.1)$$

$$\sum_{i=1}^{l_1} \bar{\alpha}^i \bar{u}_m(x_i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\tilde{x}_j}^{\tilde{x}_j + \Delta_j} \tilde{\alpha}^j(\xi) \bar{u}_m(\xi) d\xi = \gamma. \quad (2.2)$$

Здесь $u(x)$ — n -мерная непрерывно дифференцируемая вектор-функция, определяющая состояние объекта в точке $x \in [a, b]$, a, b -заданы; заданные матрицы: $A(x)$ размерности $(n \times n)$, $B(x)$ размерности $(n \times L)$ и n -мерная вектор-функция $C(x)$ непрерывны при $x \in [a, b]$; числовые матрицы $\bar{\alpha}^i$ размерности $(N \times m)$, $i = 1, 2, \dots, l_1$, и непрерывные матричные функции $\tilde{\alpha}^j(x)$, $x \in [\tilde{x}_j, \tilde{x}_j + \Delta_j]$ и N -мерный вектор γ заданы; заданные точки x_i , $i = 1, 2, \dots, l_1$, и интервалы $(\tilde{x}_j, \tilde{x}_j + \Delta_j)$, $j = 1, 2, \dots, l_2$, принадлежат отрезку $[a, b]$. Неизвестная вектор-функция

$\bar{u}_m(x)$ состоит из m компонентов вектора неизвестного состояния $u(x)$. Не умаляя общности, будем предполагать, что вектор-функция $\bar{u}_m(x)$ состоит из первых m компонентов вектор-функции $u(x)$. Обозначим через $\bar{u}(x)$ вектор-функцию, состоящую из оставшихся $(n - m)$ компонентов вектор-функции $u(x)$. Таким образом,

$$\bar{u}_m(x) = (u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)), \quad \bar{u}_{n-m}(x) = (u_{m+1}(x), u_{m+2}(x), \dots, u_n(x)).$$

В дальнейшем первые m компонентов вектор-функции $u(x)$, т. е. вектор-функцию $\bar{u}(x)$, будем называть наблюдаемыми. Это означает, что есть возможность получить какую-либо информацию о численных значениях этих компонентов.

Значения L -мерного постоянного вектора параметров P являются неизвестными коэффициентами в уравнении (2.1), их требуется определить, используя заданные нелокальные условия (2.2), число которых равно N , причем $N \geq n$.

Будем предполагать, что столбцы матричной функции являются линейно независимыми и удовлетворяют критерию Грама. Ясно, что при невыполнении этого условия размерность вектора неизвестных параметров следует уменьшить, так как коэффициенты при линейно зависимых столбцах матрицы $B(x)$ однозначно не определены.

В работе будут рассмотрены следующие два возможных варианта постановки обратно-коэффициентной задачи.

Задача I. Число независимых условий в (2.2) в задаче (2.1), (2.2) равно $N = n + L$. Будут сформулированы необходимые и достаточные условия существования единственности решения задачи по определению вектор-функции $u(x)$ и постоянного вектора $P \in \mathbb{R}^L$. Предложен подход к численному решению задач (2.1), (2.2). Он использует специальное представление решения системы дифференциальных уравнений (2.1), позволяющее условие (2.2) привести к системе алгебраических уравнений относительно коэффициентов P .

Задача II. Заключается в определении вектора параметров $P \in \mathbb{R}^L$ и неизвестной n -мерной вектор-функции $u(x)$. Для этого имеются условия (2.2), являющиеся результатами N наблюдений за состоянием объекта, имеющих нелокальный характер. Будем предполагать, что число наблюдений N превышает необходимое число условий $(n + L)$ в (2.2). На практике эта ситуация обусловлена наличием погрешности в проводимых наблюдениях, а следовательно, неточным выполнением условий (2.2). Для численного решения задачи будет использовано специальное представление решения системы дифференциальных уравнений (2.1) с неизвестным начальным условием. Относительно неизвестных начальных условий и параметров P с использованием заданной переопределенной системы нелокальных условий (2.2) будет получена переопределенная система алгебраических уравнений. В качестве решения

данной системы будет получено решение соответствующей нормальной системы.

Для численного решения системы дифференциальных уравнений с нелокальными условиями вида (2.2) можно использовать различные известные методы [9; 16]. Мы использовали предложенный в работах [1; 3] так называемый метод сдвига условий, являющийся разновидностью и обобщением метода переноса краевых условий, предложенный А. Абрамовым [2].

Условия (2.2) за счет существенного увеличения размерности вектор-функции $u(x)$ могут быть приведены к разделенным краевым условиям. Как показано в работах [3; 9], такое преобразование приводит и к существенному увеличению объема требуемых вычислений.

3. Исследование и схема численного решения задачи I

Пусть n -мерная квадратная матричная непрерывно дифференцируемая функция $\Phi(x, \xi)$ является фундаментальной матрицей решений однородной системы дифференциальных уравнений, соответствующей системе (2.1), т. е. она является решением следующей задачи Коши:

$$\frac{d\Phi(x, \xi)}{dx} = A(x)\Phi(x, \xi), \quad \Phi(\xi, \xi) = E_n, \quad (3.1)$$

при $x, \xi \in [a, b]$. Здесь E_n — n -мерная единичная квадратная матрица.

Из m строк матрицы $\Phi(x, \xi)$ с номерами, соответствующими номерам компонентов вектор-функции $\bar{u}_m(x)$ (в данном случае из первых m строк), образуем матрицу $\Phi_m(x, \xi)$ размерности $(m \times n)$. Введем используемую далее следующую числовую N -мерную квадратную матрицу:

$$Q = \left(\left(\sum_{i=1}^{l_1} \bar{\alpha}^i \Phi_m(x_i, a) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\bar{x}_j}^{\bar{x}_j + \Delta_j} \bar{\alpha}^j(\xi) \Phi_m(\xi, a) d\xi ; \sum_{i=1}^{l_1} \bar{\alpha}^i \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \int_a^{x_i} \Phi_m(x_i, \xi) B(\xi) d\xi + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\bar{x}_j}^{\bar{x}_j + \Delta_j} \bar{\alpha}^j(\xi) \int_a^{\xi} \Phi_m(\xi, \eta) B(\eta) d\eta d\xi \right) \right), \quad (3.2)$$

и числовой N -мерный вектор:

$$G = \gamma - \sum_{i=1}^{l_1} \bar{\alpha}^i \int_a^{x_i} \Phi_m(x_i, \xi) C(\xi) d\xi - \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\bar{x}_j}^{\bar{x}_j + \Delta_j} \bar{\alpha}^j(\xi) \int_0^{\xi} \Phi_m(\xi, \eta) C(\eta) d\eta d\xi. \quad (3.3)$$

Теорема 1. Пусть матричные и векторные функции $A(x)$, $\tilde{\alpha}^j(\xi)$, $j = 1, 2, \dots, l_2$, $B(x)$ удовлетворяют наложенным на них условиям. Для существования и единственности решения обратной коэффициентной задачи I необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\text{rang } Q = N + L. \quad (3.4)$$

Доказательство. Известно, что решение неоднородной системы дифференциальных уравнений (2.1) с помощью фундаментальной матрицы решений для произвольно заданного вектора P можно представить единственным образом в виде

$$u(x) = \Phi(x, a)u^0 + \int_a^x \Phi(x, \xi) [B(\xi)P + C(\xi)] d\xi, \quad x \in [a, b]. \quad (3.5)$$

Здесь u^0 пока произвольный n -мерный вектор, являющийся начальным условием для системы дифференциальных уравнений (2.1).

Учитывая введенные выше обозначения для вектор-функции $\bar{u}_m(x)$ и матрицы $\Phi_m(x, \xi)$, из (3.5) имеем

$$\bar{u}_m(x) = \Phi_m(x, a)u^0 + \int_a^x \Phi_m(x, \xi) [B(\xi)P + C(\xi)] d\xi, \quad x \in [a, b]. \quad (3.6)$$

Для определения неизвестных начального условия $u^0 \in \mathbb{R}^n$ и вектора коэффициентов $P \in \mathbb{R}^L$ используем $N = n + L$ заданных условий (2.2). Подставим выражения (3.6) в условия (2.2), получим систему алгебраических уравнений N порядка, якобианом которой является матрица Q , а правой частью N -мерный вектор G , определенные формулами (3.2), (3.3):

$$Q(u^0, P)^* = G, \quad (3.7)$$

где $*$ — знак транспонирования. Ясно, что для существования единственного решения алгебраической системы (3.7) необходимо и достаточно выполнение условия (3.4).

С другой стороны, известно, что задача Коши относительно системы дифференциальных уравнений (2.1) имеет единственное решение при заданных векторе коэффициентов P и начальном условии $u(0) = u^0$, с учетом выполнения условий на функции, участвующей в правых частях системы (2.1). $\square$

Как видно из вышеизложенного, решение задачи I приведено с помощью формул (3.2), (3.3) к решению N -мерной алгебраической системы (3.7). Решение такой системы, учитывая, как правило, ее небольшую

размерность, не представляет сложности. Основная трудность использования такого способа решения задачи I заключается в построении фундаментальной матрицы решений $\Phi(x, \xi)$ при условии, что $A(x) \neq \text{const}$, $x \in [a, b]$. Непосредственное решение задач Коши относительно системы (3.1) численными методами требует большого объема как вычислительной работы, так и оперативной памяти для хранения значений матричной функции $\Phi(x, \xi)$ во всех точках дискретизации. Нахождение и применение собственных значений матрицы $A(x)$ для построения матрицы $\Phi(x, \xi)$, учитывая условие $A(x) \neq \text{const}$, приводит еще к большим трудностям.

Далее будем предполагать, что выполнены условия существования единственного решения задачи (2.1).

Ниже предлагается подход к численному решению задачи I, не требующий построения фундаментальной матрицы решений $\Phi(x, \xi)$.

Разобьем $N = n + L$ условий в (2.2) на две части. Не умаляя общности, первые n условий из (2.2) будем считать основными и определим их матрицами $\bar{\alpha}_n^i$, $\bar{\alpha}_n^j(x)$ размерности $(n \times m)$, образованными первыми n строками матриц $\bar{\alpha}^i$, $\bar{\alpha}^j(x)$ и n -мерным вектором γ_n , образованного первыми n -компонентами N -мерного вектора γ .

Оставшиеся L условий из (2.2), которые будем считать условиями переопределения, определим матрицами $\bar{\alpha}_L^i$, $\bar{\alpha}_L^j(x)$ размерности $(L \times m)$, образованными последними L строками матриц $\bar{\alpha}^i$, $\bar{\alpha}^j(x)$, и L -мерным вектором γ_L , образованного последними L компонентами вектора γ .

Таким образом, N условий (2.2) запишем в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{l_1} \bar{\alpha}_n^i \bar{u}(x_i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\bar{x}_j}^{\bar{x}_j + \Delta_j} \bar{\alpha}_n^j(\xi) \bar{u}(\xi) d\xi = \gamma_n, \quad (3.8)$$

$$\sum_{i=1}^{l_1} \bar{\alpha}_L^i \bar{u}(x_i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\bar{x}_j}^{\bar{x}_j + \Delta_j} \bar{\alpha}_L^j(\xi) \bar{u}(\xi) d\xi = \gamma_L. \quad (3.9)$$

Сначала займемся вспомогательной задачей, заключающейся в решении системы дифференциальных уравнений (2.1) с нелокальными условиями (3.8) при произвольно заданном векторе коэффициентов P .

Решение задачи (2.1), (3.8) будем искать в следующем виде:

$$u(x) = \vartheta(x) + V(x)P, \quad x \in [a, b], \quad (3.10)$$

где $\vartheta(x)$ — n -мерная вектор функция, $V(x)$ — $(n \times L)$ -мерная непрерывно дифференцируемая матричная функция. Используем следующие обозначения: $\vartheta_m(x)$ для вектора, состоящего из первых m ком-

понентов вектора $\vartheta(x)$, $V_m(x)$ — для матрицы, состоящей из первых m строк матрицы $V(x)$ размерности $(N \times m)$ ($m \leq N$), 0_n — n -мерный нулевой вектор.

Теорема 2. Для того чтобы функция $u(x)$ из (3.10) являлась решением задачи (2.1), (3.8) при произвольно заданном векторе $P \in \mathbb{R}^L$ необходимо и достаточно, чтобы $\vartheta(x)$, $V(x)$ являлись решениями следующих задач:

$$\frac{d\vartheta(x)}{dx} = A(x)\vartheta(x) + C(x), \quad x \in [a, b], \quad (3.11)$$

$$\sum_{i=1}^{l_1} \bar{\alpha}_n^i \bar{\vartheta}_m(x_i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\widetilde{x}_j}^{\widetilde{x}_j + \Delta_j} \bar{\alpha}_n^j(\xi) \bar{\vartheta}_m(\xi) d\xi = \gamma_n, \quad (3.12)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = A(x)V(x) + B(x), \quad x \in [a, b], \quad (3.13)$$

$$\sum_{i=1}^{l_1} \bar{\alpha}_n^i \bar{V}_m(x_i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\widetilde{x}_j}^{\widetilde{x}_j + \Delta_j} \bar{\alpha}_n^j(\xi) \bar{V}_m(\xi) d\xi = 0_{n \times L}. \quad (3.14)$$

Доказательство. Подставляя (3.10) в (2.1), получим

$$\frac{d\vartheta(x)}{dx} + \frac{dV(x)}{dx} P = A(x)\vartheta(x) + A(x)V(x)P + B(x)P + C(x).$$

Группируя, получим

$$\left[\frac{d\vartheta(x)}{dx} - A(x)\vartheta(x) - C(x) \right] + \left[\frac{dV(x)}{dx} - A(x)V(x) - B(x) \right] P = 0_n.$$

Из произвольности значений вектора P следует необходимость равенства нулю выражений в каждой из квадратных скобок, а, следовательно, справедливость дифференциальных уравнений (3.11), (3.13). Подставляя (3.10) в условия (3.8), получим

$$\sum_{i=1}^{l_1} \bar{\alpha}_n^i [\bar{\vartheta}_m(x_i) + \bar{V}_m(x_i)P] + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\widetilde{x}_j}^{\widetilde{x}_j + \Delta_j} \bar{\alpha}_n^j(\xi) [\bar{\vartheta}_m(\xi) + \bar{V}_m(\xi)P] d\xi = \gamma_n.$$

После группировки будем иметь

$$\left[\sum_{i=1}^{l_1} \bar{\alpha}_n^i \bar{\vartheta}_m(x_i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\widetilde{x}_j}^{\widetilde{x}_j + \Delta_j} \bar{\alpha}_n^j(\xi) \bar{\vartheta}_m(\xi) d\xi - \gamma_n \right] +$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^{l_1} \bar{\alpha}_n^i \bar{V}_m(x_i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\bar{x}_j}^{\bar{x}_j + \Delta_j} \bar{\alpha}_n^j(\xi) \bar{V}_m(\xi) d\xi \right] P = 0_n.$$

Из произвольности вектора P следует необходимость выполнения условий (3.12), (3.14). Достаточность выполнения условий (3.11), (3.12) несложно показывается умножением обеих частей равенств (3.13), (3.14) на произвольный вектор $P \in \mathbb{R}^L$ и сложением соответствующих соотношений с (3.11), (3.12). При этом будут получены условия задачи I. $\square$

Для определения значений L -мерного вектора P после решения краевых задач (3.11), (3.12) и (3.13), (3.14) подставим полученные функции $\vartheta(x)$, $V(x)$, в (3.10) и используем L условий (3.9):

$$\sum_{i=1}^{l_1} \bar{\alpha}_L^i [\bar{\vartheta}_m(x_i) + \bar{V}_m(x_i)P] + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\bar{x}_j}^{\bar{x}_j + \Delta_j} \bar{\alpha}_L^j(\xi) [\bar{\vartheta}_m(\xi) + \bar{V}_m(\xi)P] d\xi = \gamma_L.$$

Отсюда получим следующую L -мерную линейную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров P :

$$TP = F, \quad (3.15)$$

где T есть L -мерная квадратная матрица:

$$T = \left(\left(\sum_{i=1}^{l_1} \bar{\alpha}_L^i \bar{V}_m(x_i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\bar{x}_j}^{\bar{x}_j + \Delta_j} \bar{\alpha}_L^j(\xi) \bar{V}_m(\xi) d\xi \right) \right),$$

F есть следующий L -мерный вектор:

$$F = \left(\left(\gamma_L - \sum_{i=1}^{l_1} \bar{\alpha}_L^i \bar{\vartheta}_m(x_i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\bar{x}_j}^{\bar{x}_j + \Delta_j} \bar{\alpha}_L^j(\xi) \bar{\vartheta}_m(\xi) d\xi \right) \right).$$

Решая систему (3.15), определяем вектор коэффициентов P , а из представления (3.10) определяем вектор-функцию $u(x)$, $x \in [a, b]$.

4. Исследование и схема численного решения задачи II

В задаче II предполагается, что число условий N в (2.2) превышает необходимое суммарное число $n + L$ неизвестных функций $u(x)$ и коэффициентов P . Это означает, что условия (2.2) относительно системы

дифференциальных уравнений (2.1) переопределены. При этом значения правых частей γ , как это часто встречается на практике, заданы не точно из-за возможных имеющихся погрешностей в проводимых замерах. Это означает, что из N имеющихся условий в (2.2) не могут быть выбраны никакие $n + L$ условий, при которых решение обратной задачи относительно системы дифференциальных уравнений (2.1) при этих условиях будут удовлетворять оставшимся $(N - n - L)$ условиям из (2.2). Поэтому далее определим, что понимать под решением рассматриваемой задачи II.

Решение системы (2.1) будем искать в следующем виде:

$$u(x) = \vartheta(x) + V^1(x)u^0 + V^2(x)P. \quad (4.1)$$

Здесь $\vartheta(x)$ — n -мерная вектор-функция; $V^1(x)$ и $V^2(x)$ — матричные функции размерности соответственно $(n \times n)$ и $(n \times L)$; u^0 — неизвестный n -мерный вектор, определяющий начальное значение функции $u(x)$:

$$u(a) = u^0. \quad (4.2)$$

Теорема 3. *Для того чтобы функция $u(x)$, имеющая представление (4.1), была решением системы (2.1) для произвольных начального условия u^0 и вектора коэффициентов P необходимо и достаточно, чтобы $\vartheta(x)$, $V^1(x)$ и $V^2(x)$ являлись решениями следующих задач Коши:*

$$\frac{d\vartheta(x)}{dx} = A(x)\vartheta(x) + C(x), \quad x \in [a, b], \quad \vartheta(a) = 0_n, \quad (4.3)$$

$$\frac{dV^1(x)}{dx} = A(x)V^1(x), \quad x \in [a, b], \quad V^1(a) = E_{n \times n}, \quad (4.4)$$

$$\frac{dV^2(x)}{dx} = A(x)V^2(x) + B(x), \quad x \in [a, b], \quad V^2(a) = 0_{n \times L}. \quad (4.5)$$

Доказательство теоремы проводится почти аналогично доказательству теоремы 2 с использованием подстановки представления (4.1) в систему (2.1).

Для определения неизвестных значений векторов $u^0 \in \mathbb{R}^n$ и $P \in \mathbb{R}^L$ подставим (4.1) в условия (2.2). В результате получим следующую переопределенную систему N линейных уравнений относительно неизвестного $(n + L)$ -мерного вектора $z = (u^0, P)^*$:

$$T_N z = \gamma. \quad (4.6)$$

Здесь T_N есть следующая $N \times (n + L)$ -мерная матрица:

$$T_N = \left(\left(\sum_{i=1}^{l_1} \bar{\alpha}^i \bar{\vartheta}_m(x_i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\tilde{x}_j}^{\tilde{x}_j + \Delta_j} \tilde{\alpha}^j(\xi) \bar{\vartheta}_m(\xi) d\xi ; \right. \right.$$

$$\sum_{i=1}^{l_1} \bar{\alpha}^i \bar{V}_m(x_i) + \sum_{j=1}^{l_2} \int_{\bar{x}_j}^{\bar{x}_j + \Delta_j} \bar{\alpha}^j(\xi) \bar{V}_m(\xi) d\xi \Bigg) \Bigg) .$$

Под решением системы (4.6) будем понимать так называемое нормальное решение, являющееся решением следующей линейной системы $(n + L)$ -го порядка:

$$T_N^* T_N z = T_N^* \gamma. \quad (4.7)$$

Для решения систем дифференциальных уравнений (3.11) и (3.13) с нелокальными условиями соответственно (3.12) и (3.14) возможно использовать разные известные методы, например предложенные в [3].

5. Результаты численных экспериментов

5.1. В качестве задачи I рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{du_1(x)}{dx} &= 4xu_1(x) + 3u_2(x) + 2xp_1 - 5xp_2 - \\ &\quad - 12x^3 - 15x^2 + 6x + 12 \cos 6x - 8x \sin 6x - 3, \\ \frac{du_2(x)}{dx} &= 2u_1(x) - xu_2(x) - 3xp_1 + xp_2 + \\ &\quad + 5x^3 - 7x^2 + 29x - 4 \sin 6x - 3, \quad x \in [0, 1] \end{aligned} \quad (5.1)$$

при следующих двух основных условиях:

$$2u_2(0) + 3u_2(0, 3) + 6 \int_{0,5}^{0,7} u_2(\tau) d\tau = 8, 11, \quad (5.2)$$

$$u_2(0, 2) + 2u_2(0, 4) + 3 \int_{0,6}^{0,8} u_2(\tau) d\tau = 5, 46 \quad (5.3)$$

и двух дополнительных условиях:

$$3u_2(0, 2) - u_2(0, 3) = 1, 85(1 + \chi\theta), \quad (5.4)$$

$$u_2(0, 4) + 2u_2(0, 5) = 4, 9(1 + \chi\theta). \quad (5.5)$$

В (5.4), (5.5) предполагается, что правые части могут иметь погрешности, обусловленные неточно проводимыми замерах. Величина χ определяет уровень погрешности, θ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-1; 1]$.

В рассматриваемой тестовой задаче $B_1(x) = (2x; -3x)^*$, $B_2(x) = (-5x; x)^*$ линейно независимы, следовательно, критерий Грама выполняется.

Известно точное решение коэффициентно обратной задачи (5.1)–(5.5): $\tilde{P} = (7, 0, 3, 0)^*$, $\tilde{u}(x) = (2 \sin 6x + 3x^2 + 1; 5x^2 - x + 1)^*$ и при точно заданных правых частях (5.4), (5.5), т. е. при $\chi = 0$.

Для численного решения вспомогательных задач, полученных из формул (3.11)–(3.14), был использован подход, предложенный в работах [1; 3]. Подход основан на сведении решения нелокальных краевых задач к решению вспомогательных задач Коши. При уровне помех χ , равных 0, 0,01 и 0,03, что соответствует помехам 0

Таблица 1.

Точные и полученные значения параметров
при разных уровнях помех

	Точные	$\chi = 0$	$\chi = 0,01$	$\chi = 0,03$
p_1	7,0000000	7,00000012	7,001838	6,989474
p_2	3,0000000	2,99999999	2,997381	3,009375

Таблица 2.

Полученные решения задачи I при разных уровнях помех

N	$\chi = 0,01$		$\chi = 0,03$		$\chi = 0,05$	
	$u_1(x)$	$u_2(x)$	$u_1(x)$	$u_2(x)$	$u_1(x)$	$u_2(x)$
0	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
10	2,159285	0,950000	2,159366	0,949965	2,158961	0,950182
20	2,984078	1,000000	2,984401	0,999882	2,982806	1,000641
30	3,217695	1,150000	3,218440	1,149786	3,214797	1,151237
40	2,830926	1,400000	2,832332	1,399720	2,825533	1,401804
50	2,032240	1,750000	2,034658	1,749742	2,023090	1,752128
60	1,194959	2,200000	1,198942	2,199933	1,180080	2,201904
70	0,726848	2,750000	0,733305	2,750419	0,702998	2,750673
80	0,927671	3,400000	0,938146	3,401404	0,889340	3,397694
90	1,884471	4,150000	1,901667	4,153230	1,822021	4,141734
100	3,441169	5,000000	3,469939	5,006497	3,337271	4,980641

Как видно, погрешности полученных решений рассматриваемой задачи при разных уровнях помех соответствуют погрешностям в дополнительных условиях, приводимых в (5.4), (5.5).

5.2. Теперь рассмотрим результаты численного решения коэффициентно обратной задачи II относительно системы дифференциальных уравнений (5.1) со следующими основными и дополнительными условиями:

$$2u_2(0) + 3u_2(0.3) + 6 \int_{0.5}^{0.7} u_2(\tau) d\tau = 8.11(1 + \chi\theta), \quad (5.6)$$

$$u_2(0.2) + 2u_2(0.4) + 3 \int_{0.6}^{0.8} u_2(\tau) d\tau = 5.46(1 + \chi\theta), \quad (5.7)$$

$$3u_2(0.2) - u_2(0.3) = 1.85(1 + \chi\theta), \quad u_2(0.4) + 2u_2(0.5) = 4.9(1 + \chi\theta), \quad (5.8)$$

$$u_2(0.7) = 2.75(1 + \chi\theta), \quad u_2(0.9) = 4.15(1 + \chi\theta). \quad (5.9)$$

Аналогично, как и в п. 5.1, здесь χ — уровень помех в данных, θ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-1; 1]$.

В рассматриваемой задаче $m = L = 2$, $N = 6$, $L_1 = 2$. Точное решение рассматриваемой задачи при $\chi = 0$ совпадает с решением задачи (5.1)–(5.5).

Решение рассматриваемой задачи (5.1), (5.6)–(5.9) будем искать в виде (4.1). Вектор функция $\vartheta(x) \in \mathbb{R}^2$ и матричные функции $V^1(x)$, $V^2(x)$ являются решениями вспомогательных задач Коши (4.3)–(4.5), которые учитывают систему дифференциальных уравнений (5.1).

Для определения вектора коэффициентов $P \in \mathbb{R}^2$ и вектора начальных условий $u^0 \in \mathbb{R}^2$ после решения вспомогательных задач Коши, подставляя полученные значения функций $\vartheta(x)$, $V^1(x)$, $V^2(x)$ в условия (5.6)–(5.9), получим систему алгебраических уравнений (4.6). Решая алгебраическую систему линейных уравнений (4.7) 4-го порядка при разных уровнях помех и случайных величинах $\sigma \in [-1, 1]$, определим значения параметров P , приведенные в табл. 3 и начальные условия $u(0) = u^0$.

Таблица 3.

Полученные значения параметров при разных уровнях помех

	$\chi = 0$	$\chi = 0,01$	$\chi = 0,03$	$\chi = 0,05$
p_1	7,00000012	7,00472470	7,01254155	7,20484459
p_2	2,99999999	3,00086123	3,00526595	3,10358178

Пользуясь представлением (4.1), полученным вектором из вспомогательных задач, найдем значения искомой функции $u(x)$ при разных уровнях помех. Результаты расчетов приведены в табл. 4.

6. Заключение

В работе исследуется коэффициентно-обратная задача относительно линейной неавтономной системы дифференциальных уравнений с обыкновенными производными. Краевые и дополнительные условия являются нелокальными и включают в себя точечные и интегральные значения неизвестной функции. К рассмотренной задаче, в частности, приводятся обратные задачи относительно дифференциальных уравнений с частными производными с нелокальными условиями, для численного решения которых применен метод прямых по временной или пространственной переменной. Поставленную задачу можно привести к классу параметрических задач оптимального управления. Но в работе для ее решения предложен подход, не требующий многократного

решения нелокальных краевых задач как для основной, так и сопряженной систем дифференциальных уравнений. Приводятся результаты численных экспериментов для различных вариантов соотношения между числом неизвестных коэффициентов и числом дополнительных условий.

Таблица 4.

Полученные решения задачи II при разных уровнях помех

$\chi = 0,01$			$\chi = 0,03$		$\chi = 0,05$	
N	$u_1(x)$	$u_2(x)$	$u_1(x)$	$u_2(x)$	$u_1(x)$	$u_2(x)$
0	1,001559	0,999390	1,005728	0,998262	1,092602	0,969312
10	2,160756	0,949626	2,164748	0,949216	2,246368	0,934709
20	2,985622	0,999730	2,989720	0,999841	3,071774	0,994573
30	3,219454	1,149731	3,223911	1,150210	3,310985	1,149877
40	2,833046	1,399661	2,838130	1,400400	2,934479	1,401562
50	2,034903	1,749554	2,040953	1,750505	2,151308	1,750677
60	1,198427	2,199457	1,205930	2,200647	1,336562	2,198523
70	0,731534	2,749435	0,741256	2,751005	0,901640	2,746888
80	0,934266	3,399588	0,947484	3,401854	1,153171	3,398426
90	1,894179	4,150078	1,913112	4,153648	2,190973	4,157356
100	3,456153	5,001180	3,484776	5,007165	3,882976	5,030772

Список источников

1. Абдуллаев В. М. К решению нагруженных дифференциальных уравнений с нелокальными условиями // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 49. С. 45–62. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.45>
2. Абрамов А. А. Вариант метода прогонки // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1961. Т. 1, № 2. С. 349–351.
3. Айда-заде К. Р., Абдуллаев В. М. О решении краевых задач с неразделенными многочленными и интегральными условиями // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 9. С. 1152–1162.
4. Айда-заде К. Р., Абдуллаев В. М. К решению коэффициентно обратных задач с условиями переопределения высокого порядка // Известия высших учебных заведений. Математика. 2025. № 5. С. 3–25.
5. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2. М. : Наука, 1962. 620 с.
6. Abdullayev V. M. On an inverse problem with high-order overdetermination conditions // J. Inverse Ill-Posed Probl. 2025. Vol. 33, N 3. P. 351–368. <https://doi.org/10.1515/jiip-2024-0027>
7. Abdullayev V. M. Identification of the Functions of Response to Loading for Stationary Systems // Cybern. Syst. Anal. 2017. Vol. 53, N 3. P. 417–425. <https://doi.org/10.1007/s10559-017-9942-6>
8. Aida-zade K. R., Abdullayev V. M. Optimization of the Right-Hand Sides of Nonlocal Conditions of a Controllable System with Multipoint and Integral Objective Functional // Optimization. 2024. Vol. 73, N 1. P. 205–228. <https://doi.org/10.1080/02331934.2022.2098125>

9. Aida-zade K. R., Abdullayev V. M. To the solution of integro-differential equations with nonlocal conditions // *Turkish Journal of Mathematics*. 2022. Vol. 46, N 1. P.177-188. <https://doi.org/10.3906/mat-2108-89>
10. Aida-Zade K. R., Abdullayev V. M. Numerical Method for Solving the Parametric Identification Problem for Loaded Differential Equations // *Bull. Iran. Math. Soc.* 2019. Vol. 45, N 6. P. 1725–1742. <https://doi.org/10.1007/s41980-019-00225-3>
11. Bakirova E. A., Assanova A. T., Kadirbayeva Z. M. A problem with parameter for the integro-differential equations // *Mathematical Modelling and Analysis*. 2021. Vol. 26, N 1. P. 34–54. <https://doi.org/10.3846/mma.2021.11977>
12. Denisov A. M. Introduction to the Theory of Inverse Problem. Moscow : Lomonosov Moscow State University, 1994. 205 p.
13. Ismailov M. I., Kanca F., Lesnic D. Determination of a time-dependent heat source under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions // *Appl. Math. Comput.* 2011. Vol. 218, N 8. P. 4138–4146. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.09.044>
14. Kabanikhin S. I. Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications. Berlin : De Gruyter, 2011. 477 p.
15. Identification of source locations in two-dimensional heat equations / L. Ling, M. Yamamoto, Y. C. Hon, T. Takeuchi // *Inverse Problems*. 2006. Vol. 22, N 4. P. 1289–1305. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/22/4/011>
16. Parasidis I. N., Providas E. An exact solution method for a class of nonlinear loaded difference equations with multipoint boundary conditions // *J. Difference Equ. Appl.* 2018. Vol. 24. P. 1649–1663. DOI:10.1080/10236198.2018.1515928
17. Vabishchevich P. N., Vasil'ev V. I. Computational algorithms for solving the coefficient inverse problem for parabolic equations // *Inverse Probl. Sci. Eng.* 2016. Vol. 24, N 1. P. 42-59. <https://doi.org/10.1080/17415977.2014.993984>
18. Yang F., Guo H. Z., Li X. X. The method of central difference for the inverse time-dependent heat source problem // *Appl. Math. Comput.* 2011. Vol. 218, N 7. P. 3025–3034. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.09.016>

References

1. Abdullayev V.M. To the Solution of Loaded Differential Equations with Nonlocal Conditions. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 49, pp. 45–62. <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.45> (in Russian)
2. Abramov A.A. A Variant of the Transfer Method. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 1961, vol. 1, no. 2, pp. 349–351. (in Russian)
3. Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On the solution of boundary value problems with nonseparated multipoint and integral conditions. *Diff. Equat.*, 2013, vol. 49, no. 9, pp. 1114–1125. <https://doi.org/10.1134/S0012266113090061> (in Russian)
4. Aida-zade K.R., Abdullayev V.M. To the Solution of Coefficient Inverse Problems with High-Order Overdetermination Conditions. *Russ Math.*, 2025, vol. 69, no. 9, pp. 1–20. <https://doi.org/10.3103/S1066369X25700367> (in Russian)
5. Berezin I.S., Zhidkov N.P. *Computing Methods. Vol. 2*. Moscow, Nauka Publ., 1965, 620 p.
6. Abdullayev V.M. On an inverse problem with high-order overdetermination conditions *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2025, vol. 33, no. 3, pp. 351–368. <https://doi.org/10.1515/jiip-2024-0027>
7. Abdullayev V.M. Identification of the Functions of Response to Loading for Stationary Systems. *Cybern. Syst. Anal.*, 2017, vol. 53, no. 3, pp. 417–425. <https://doi.org/10.1007/s10559-017-9942-6>

8. Aida-zade K. R., Abdullayev V.M. Optimization of the Right-Hand Sides of Nonlocal Conditions of a Controllable System with Multipoint and Integral Objective Functional. *Optimization*, 2024, vol. 73, no. 1, pp. 205–228. <https://doi.org/10.1080/02331934.2022.2098125>
9. Aida-zade K.R., Abdullayev V.M. To the solution of integro-differential equations with nonlocal conditions. *Turkish Journal of Mathematics*, 2022, vol. 46, no. 1, pp. 177–188. <https://doi.org/10.3906/mat-2108-89>
10. Aida-Zade K.R., Abdullayev V.M. Numerical Method for Solving the Parametric Identification Problem for Loaded Differential Equations. *Bull. Iran. Math. Soc.*, 2019, vol. 45, no. 6, pp. 1725–1742. <https://doi.org/10.1007/s41980-019-00225-3>
11. Bakirova E.A., Assanova A.T., Kadirbayeva Z.M. A problem with parameter for the integro-differential equations. *Mathematical Modelling and Analysis*, 2021, vol. 26, no. 1, pp. 34–54. <https://doi.org/10.3846/mma.2021.11977>
12. Denisov A.M. *Introduction to the Theory of Inverse Problem*, Moscow, Lomonosov Moscow State University Publ., 1994, 205 p.
13. Ismailov M.I., Kanca F., Lesnic D. Determination of a time-dependent heat source under nonlocal boundary and integral overdetermination conditions. *Appl. Math. Comput.*, 2011, vol. 218, no. 8, pp. 4138–4146. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.09.044>
14. Kabanikhin S.I. *Inverse and Ill-Posed Problems: Theory and Applications*. Berlin, De Gruyter, 2011, 477 p.
15. Ling L., Yamamoto M., Hon Y.C., Takeuchi T. Identification of source locations in two-dimensional heat equations. *Inverse Problems*, 2006, vol. 22, no. 4, pp. 1289–1305. <https://doi.org/10.1088/0266-5611/22/4/011>
16. Parasidis I.N., Providas E. An exact solution method for a class of nonlinear loaded difference equations with multipoint boundary conditions. *J. Difference Equ. Appl.*, 2018, vol. 24, pp. 1649–1663. DOI:10.1080/10236198.2018.1515928
17. Vabishchevich P.N., Vasil'ev V.I. Computational algorithms for solving the coefficient inverse problem for parabolic equations. *Inverse Probl. Sci. Eng.*, 2016, vol. 24, no. 1, pp. 42–59. <https://doi.org/10.1080/17415977.2014.993984>
18. Yang F., Guo H.Z., Li X.X. The method of central difference for the inverse time-dependent heat source problem. *Appl. Math. Comput.*, 2011, vol. 218, no. 7, pp. 3025–3034. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.09.016>

Об авторах

Айда-заде Камиль Раджабович,
д-р физ.-мат. наук, чл.-кор. НАН
Азербайджана, проф., зав.
лабораторией, Институт
математики, Баку, AZ 1141,
Азербайджан,
kamil_aydazade@rambler.ru,
<https://orcid.org/0000-0002-8439-5585>

About the authors

Kamil R. Aida-zade, Dr. Sci.
(Phys.-Math.), Corresponding Member
of the National Academy of Sciences of
Azerbaijan, Prof., Head of
Department, Institute of Mathematics,
Baku, AZ 1141, Azerbaijan,
kamil.aydazade@rambler.ru,
<https://orcid.org/0000-0002-8439-5585>

**Абдуллаев Вагиф Маариф
оглы**, д-р физ.-мат. наук, проф.,
Азербайджанский государственный
университет нефти и
промышленности; вед. науч. сотр.,
Институт математики; сотрудник,
Научно-исследовательский центр,
Азербайджанский университет
архитектуры и строительства, Баку,
AZ1010, Азербайджан,
vaqif_ab@rambler.ru,
<https://orcid.org/0000-0001-7772-1226>

Vagif M. Abdullayev, Dr. Sci.
(Phys.-Math.), Prof., Azerbaijan State
Oil and Industry University; Senior
Research Scientist, Institute of
Mathematics; Employee, Scientific and
Innovation Center, Azerbaijan
University of Architecture and
Construction, Baku, AZ 1141,
Azerbaijan, vaqif_ab@rambler.ru,
<https://orcid.org/0000-0001-7772-1226>

Поступила в редакцию / Received 22.10.2025

Поступила после рецензирования / Revised 12.01.2026

Принята к публикации / Accepted 16.01.2026