Серия «Математика»
2025. Т. 52. С. 105—119

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 519.633
MSC 65N06, 34A08
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.52.105

Сходимость метода повышенного порядка точности для решения нелинейного уравнения супердиффузии с запаздыванием

В. Г. Пименов[1], **А. В. Лекомцев**[1✉]

[1] Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Российская Федерация
✉ avlekomtsev@urfu.ru

Аннотация. Рассматривается нелинейное уравнение супердиффузии с эффектом запаздывания. Производится дискретизация задачи. Приводятся конструкции разностного метода повышенного порядка точности с кусочно-линейной интерполяцией. Изучается порядок невязки численного метода. При определенных предположениях доказывается теорема о сходимости второго порядка по пространственному и временному шагам и об устойчивости метода. Приводятся результаты численных экспериментов на тестовых примерах.

Ключевые слова: нелинейное уравнение супердиффузии, функциональное запаздывание, кусочно-линейная интерполяция, повышенный порядок сходимости, квазилинейность

Ссылка для цитирования: Пименов В. Г., Лекомцев А. В. Сходимость метода повышенного порядка точности для решения нелинейного уравнения супердиффузии с запаздыванием // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2025. Т. 52. С. 105–119.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.52.105

Research article

Convergence of the High Accuracy Method for Solving the Nonlinear Superdiffusion Equation with Functional Delay

Vladimir G. Pimenov[1], **Andrei V. Lekomtsev**[1✉]

[1] Ural Federal University, Yekaterinburg, Russian Federation
✉ avlekomtsev@urfu.ru

Abstract. In this paper, the nonlinear superdiffusion equation with functional delay is considered. The discretization of the problem is performed. Constructions of the high accuracy difference method with piecewise linear interpolation are given. The order of the residual of the numerical method is studied. Under certain assumptions, the convergence of the second order in spatial and temporal steps and stability of the method is proved. The results of numerical experiments on test examples are presented.

Keywords: nonlinear superdiffusion equation, functional delay, piecewise linear interpolation, higher order of convergence, quasilinearity

For citation: Pimenov V. G., Lekomtsev A. V. Convergence of the High Accuracy Method for Solving the Nonlinear Superdiffusion Equation with Functional Delay. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2025, vol. 52, pp. 105–119. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2025.52.105

1. Введение

Уравнения в частных производных как целого, так и дробного порядков с различными усложняющими эффектами широко используются во многих математических моделях (газодинамика, популяционная динамика, задачи экологии и т.д). Эти эффекты могут включать нелинейности в операторе дифференцирования [3; 9], эффекты запаздывания [8; 11] и наличие производных дробных порядков по пространству (супердиффузия) [4; 5]. Так, например, модель переноса загрязняющих веществ в стоке воды может содержать одновременно и дробную производную по пространству и запаздывание. В связи со сложностью изучаемых эффектов на первый план выходит разработка численных алгоритмов решения поставленных задач. Так для уравнений с дробными производными по состоянию в настоящее время работ в этом направлении огромное количество, отметим лишь работу [10], результаты которой использованы в данной статье. Численный метод для дробного по пространству линейного уравнения с постоянным запаздыванием был разработан в [6], с функциональным запаздыванием в работе [1], см. также библиографии в этих работах.

В данной работе рассматривается квазилинейное уравнение супердиффузии с эффектом функционального запаздывания. Учитывая особый вид нелинейности (квазилинейность), можно построить эффективный алгоритм решения рассматриваемых уравнений. Идея этого алгоритма была заимствована из [2]. Ранее в работе [7] был построен метод первого порядка относительно шагов дискретизации по времени и пространству, в данной работе строится метод второго порядка. Второй порядок относительно шага дискретизации по пространству достигается применением одного из алгоритмов аппроксимации двухсторонней производной Римана – Лиувилля из [10]. Второй порядок относительно шага дискретизации по времени достигается за счет сочетания трех факторов: во-первых, в отличие от алгоритма работы [7], где рассматривалась чисто неявная схема, в данной работе строится аналог схемы Кранка – Николсон; во-вторых, для учета эффекта функционального запаздывания применяется кусочно-линейная интерполяция с экстраполяцией продолжением, вместо кусочно-постоянной; в-третьих, более точно аппроксимируется нелинейный коэффициент супердиффузии. В результате на каждом временном слое возникает линейная система специального вида, с диагональным преобладанием и положительными диагональными элементами, что позволяет эффективно её решать. Кроме того, свойства системы позволяют доказать устойчивость метода при определенных условиях и, как следствие, получить сходимость метода с соответствующим порядком в максимум-норме.

2. Постановка задачи и основные предположения

Рассмотрим нелинейное уравнение супердиффузии с запаздыванием:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = K(u(x,t))\Big(\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^\alpha u}{\partial(-x)^\alpha}\Big) + f\big(x,t,u_t(x,\cdot)\big), \tag{2.1}$$

где $t \in [t_0, \theta] \subset \mathbb{R}^1$, $x \in [0, X] \subset \mathbb{R}^1$ — независимые переменные. $u(x,t) \in \mathbb{R}^1$ — искомая функция, $u_t(x,\cdot) = \{u(x,t+s),\ -\tau \leqslant s \leqslant 0\}$ – функция-предыстория искомой функции к моменту t. $K(u(x,t))$ – нелинейный коэффициент супердиффузии, $\tau > 0$ – величина запаздывания. Левосторонняя и правосторонняя дробные производные порядка α, $1 < \alpha < 2$, определяются в смысле Римана – Лиувилля:

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^x \frac{u(\eta,t)d\eta}{(x-\eta)^{\alpha-1}},$$

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial(-x)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_x^X \frac{u(\eta,t)d\eta}{(\eta-x)^{\alpha-1}}.$$

Пусть заданы следующие начальные и граничные условия:

$$u(x,t) = \varphi(x,t),\ x \in [0, X],\ t \in [t_0-\tau, t_0], \tag{2.2}$$

$$u(0,t) = 0,\ u(X,t) = 0,\ t \in [t_0, \theta]. \tag{2.3}$$

Будем предполагать, что $\varphi(x,t)$, $K(u(x,t))$ и $f\big(x,t,u_t(x,\cdot)\big)$ таковы, что задача (2.1)–(2.3) имеет единственное решение $u(x,t)$. Причем для доказательства сходимости численного метода будем предполагать необходимую степень гладкости решения $u(x,t)$ в ограниченной области $[0, X] \times [t_0, \theta]$. Обозначим через $Q[-\tau, 0]$ пространство кусочно-непрерывных функций $q(s)$ на отрезке $[-\tau, 0]$ с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа, с нормой $\|q(\cdot)\|_{Q[-\tau,0]} = \max\limits_{-\tau\leqslant s\leqslant 0} |q(s)|$. Будем предполагать, что функционал $f\big(x, t, u_t(x, \cdot)\big)$ является липшицевым с константой L_f по последнему аргументу, т. е. существует константа L_f такая, что для всех $t \in [t_0, \theta]$, $x \in [0, X]$, $v^1(\cdot) \in Q$, $v^2(\cdot) \in Q$ выполняется

$$|f(x, t, v^1(\cdot)) - f(x, t, v^2(\cdot))| \leqslant L_f \|v^1(\cdot) - v^2(\cdot)\|_Q. \tag{2.4}$$

Пусть для всех $t \in [t_0 - \tau, t_0]$, $x \in [0, X]$ точное решение задачи (2.1)–(2.3) удовлетворяет условию $|u(x, t)| \leqslant U$. Будем предполагать, что для функции $K(u)$ в области $|u| \leqslant 2U$ выполняется условие

$$K(u) \geqslant \hat{K} > 0.$$

Предположим, что функция $K(u)$ является липшицевой в вышеуказанной области определения, т. е. существует константа L_K, что для всех u и v из этой области определения выполняется неравенство

$$|K(u) - K(v)| \leqslant L_K |u - v|. \tag{2.5}$$

3. Метод повышенного порядка точности

Разобьём отрезки $[t_0, \theta]$, $[0, X]$ на части с шагами $\Delta = (\theta - t_0)/M$ и $h = X/N$ соответственно, введя точки $t_k = t_0 + k\Delta$, $k = \overline{0, M}$, $x^i = ih$, $i = \overline{0, N}$. Будем считать, что величина $\tau/\Delta = m$ — целое число. Обозначим через u_k^i приближение точного решения $u(x^i, t_k)$ в узлах (x^i, t_k). При всяком фиксированном $i = \overline{0, N}$ введем дискретную предысторию к моменту времени t_k, $k = \overline{0, M}$: $\{u_l^i\}_k = \{u_l^i, k - m \leqslant l \leqslant k\}$.

Определение 1. *Оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории $\{u_l^i\}_k$ назовем отображение*

$$I : \{u_l^i\}_k \to v_k^i(\cdot) \in Q[-\tau, \Delta].$$

В дальнейшем будем использовать кусочно-линейную интерполяцию с экстраполяцией продолжением

$$v_k^i(t) = \begin{cases} \varphi(x^i, t), \ t \in [t_0 - \tau, t_0], \\ u_{j-1}^i \frac{t_j - t}{\Delta} + u_j^i \frac{t - t_{j-1}}{\Delta}, \ t \in [t_{j-1}, t_j), \ 1 \leqslant j \leqslant k, \\ u_{k-1}^i \frac{t_k - t}{\Delta} + u_k^i \frac{t - t_{k-1}}{\Delta}, \ t \in [t_k, t_{k+1}]. \end{cases} \tag{3.1}$$

Такой способ интерполяции с экстраполяцией продолжением имеет второй порядок погрешности по Δ, т. е., если точное решение $u(x, t)$

является дважды непрерывно дифференцируемым по t на $[t_0 - \tau, \theta]$, тогда существуют константы C_1 и C_2 такие, что для всех i, k и $t \in [t_k - \tau, t_{k+1}]$ выполняется неравенство

$$|v_k^i(t) - u(x^i, t)| \leqslant C_1 \max_{k-m \leqslant j \leqslant k} |u_j^i - u(x^i, t_j)| + C_2 \Delta^2. \tag{3.2}$$

Отметим тот факт, что оператор кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением является липшицевым с константой L_I в следующем смысле. Пусть $\widehat{v}_k^i(t)$ и $v_k^i(t)$ являются результатами действия оператора интерполяции с экстраполяцией продолжением на две дискретные предыстории $\{\widehat{v}_j^i\}_k$ и $\{v_j^i\}_k$ соответственно. Тогда для всех $t \in [t_k - \tau, t_{k+1}]$ выполняется неравенство

$$|\widehat{v}_k^i(t) - v_k^i(t)| \leqslant L_I \max_{k-m \leqslant j \leqslant k} |\widehat{v}_j^i - v_j^i|.$$

Для приближения левосторонней дробной производной на $k+1$ временном слое будем использовать сдвинутую вправо формулу Грюнвальда – Летникова [10]: $\delta_{\alpha,x}[u_{k+1}^i] = \frac{1}{h^\alpha} \sum\limits_{j=0}^{i+1} \omega_{\alpha,j} u_{k+1}^{i-j+1}$, где нормализованные веса Грюнвальда определяются соотношениями

$$\omega_{\alpha,0} = \frac{\alpha}{2} g_{\alpha,0}, \ \omega_{\alpha,j} = \frac{\alpha}{2} g_{\alpha,j} + \frac{2-\alpha}{2} g_{\alpha,j-1}, \quad j \geqslant 1,$$

$$g_{\alpha,j} = \frac{\Gamma(j-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j+1)}, \ j \geqslant 0.$$

В частности, $g_{\alpha,0} = 1$, $g_{\alpha,1} = -\alpha$, $\omega_{\alpha,0} = \dfrac{\alpha}{2} > 0$, $\omega_{\alpha,1} = \dfrac{2-\alpha-\alpha^2}{2} < 0$, $\omega_{\alpha,2} = \dfrac{\alpha(\alpha^2+\alpha-4)}{4}$, $g_{\alpha,j} = (-1)^j \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}$, $j = 2, \ldots$. Аналогичным образом для приближения правосторонней дробной производной на $k+1$ временном слое будем использовать сдвинутую влево формулу Грюнвальда – Летникова [10]:

$$\delta_{\alpha,-x}[u_{k+1}^i] = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{N-i+1} \omega_{\alpha,j} u_{k+1}^{i+j-1}.$$

Обозначим $\varLambda(u_k^i)[u_{k+1}^i] = K\Big(\dfrac{3}{2}u_k^i - \dfrac{1}{2}u_{k-1}^i\Big)(\delta_{\alpha,x}[u_{k+1}^i] + \delta_{\alpha,-x}[u_{k+1}^i])$.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* (2.5). *Левосторонняя и правосторонняя производные порядка $\alpha+1$ точного решения вместе с их преобразованиями Фурье являются непрерывными. Тогда*

$$K(u(x^i, t_{k+\frac{1}{2}}))\bigg(\frac{\partial^\alpha u(x^i, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^\alpha u(x^i, t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial(-x)^\alpha}\bigg) =$$

$$= \varLambda(u(x^i, t_k))[u(x^i, t_{k+\frac{1}{2}})] + P_k^i, \ |P_k^i| \leqslant C_3(\Delta^2 + h^2).$$

Доказательство. В силу предположений о соответствующей гладкости решения $u(x,t)$ задачи (2.1)–(2.3) и липшицевости $K(u)$ получаем

$$u(x^i,t_{k+\frac{1}{2}})=\frac{3}{2}u(x^i,t_k)-\frac{1}{2}u(x^i,t_{k-1})+r_1,\ |r_1|\leqslant C_4\Delta^2,$$

$$|K(u(x^i,t_{k+\frac{1}{2}}))-K\big(\frac{3}{2}u(x^i,t_k)-\frac{1}{2}u(x^i,t_{k-1})\big)|\leqslant$$

$$\leqslant L_K|u(x^i,t_{k+\frac{1}{2}})-\frac{3}{2}u(x^i,t_k)+\frac{1}{2}u(x^i,t_{k-1})|\leqslant L_K C_4\Delta^2.$$

Тогда $K(u(x^i,t_{k+\frac{1}{2}}))=K\big(\frac{3}{2}u(x^i,t_k)-\frac{1}{2}u(x^i,t_{k-1})\big)+r_2,\ |r_2|\leqslant C_5\Delta^2.$

Из [10] следует, что

$$\frac{\partial^\alpha u(x^i,t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial x^\alpha}=\delta_{\alpha,x}[u(x^i,t_{k+\frac{1}{2}})]+r_3,\ |r_3|\leqslant C_6h^2,$$

$$\frac{\partial^\alpha u(x^i,t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial(-x)^\alpha}=\delta_{\alpha,-x}[u(x^i,t_{k+\frac{1}{2}})]+r_4,\ |r_4|\leqslant C_7h^2.$$

Из вышеуказанных соотношений следует, что $\delta_{\alpha,x}[u(x^i,t_{k+\frac{1}{2}})]$, $\delta_{\alpha,-x}[u(x^i,t_{k+\frac{1}{2}})]$ и $K\big(\frac{3}{2}u(x^i,t_k)-\frac{1}{2}u(x^i,t_{k-1})\big)$ являются ограниченными. Откуда сразу следует заключение леммы. □

Для $k=\overline{0,M-1}$ рассмотрим неявно-явную разностную схему с начальными и граничными условиями

$$\frac{u^i_{k+1}-u^i_k}{\Delta}=\varLambda(u^i_k)\big[\frac{u^i_k+u^i_{k+1}}{2}\big]+f(x^i,t_{k+\frac{1}{2}},v^i_k(\cdot)),\ i=\overline{1,N-1},\quad (3.3)$$

$$v^i_0(t)=\varphi(x^i,t),\ t\leqslant t_0,\ i=\overline{0,N};\quad u^0_k=0,\ u^N_k=0,\ k=\overline{0,M}.\quad (3.4)$$

Использование интерполяции с экстраполяцией позволяет явно вычислить функционал $f(x^i,t_{k+\frac{1}{2}},v^i_k(\cdot))$. Значения функции $K(u)$ в системе (3.3) вычисляются в узлах временных слоев t_{k-1} и t_k. Следовательно, схема (3.3)–(3.4) является линейной системой по отношению к значениям u^i_{k+1} на временном слое t_{k+1}. Перепишем систему (3.3) для $i=\overline{1,N-1}$ в следующем виде:

$$u^i_{k+1}-\frac{\Delta}{2}\varLambda(u^i_k)[u^i_{k+1}]=u^i_k+\frac{\Delta}{2}\varLambda(u^i_k)[u^i_k]+\Delta f(x^i,t_{k+\frac{1}{2}},v^i_k(\cdot)).\quad (3.5)$$

Выпишем матрицу A коэффициентов при неизвестных системы (3.5), элементы матрицы A размерности $N-1\times N-1$ имеют вид

$$A_{ij}=\begin{cases}1-2\xi_i\omega_{\alpha,1} & j=i,\\ -\xi_i(\omega_{\alpha,2}+\omega_{\alpha,0}) & j=i-1,\\ -\xi_i(\omega_{\alpha,0}+\omega_{\alpha,2}) & j=i+1,\\ -\xi_i\omega_{\alpha,i-j+1} & j<i-1,\\ -\xi_i\omega_{\alpha,j-i+1} & j>i+1,\end{cases}$$

где $\xi_i = K\big(\dfrac{3}{2}u_k^i - \dfrac{1}{2}u_{k-1}^i\big)\dfrac{\Delta}{2h^\alpha} > 0$.

Лемма 2. *Коэффициенты матрицы A имеют строгое диагональное преобладание с положительными диагональными элементами. Следовательно, система* (3.5) *разрешима и имеет единственное решение.*

Доказательство. Заметим, что для $\omega_{\alpha,j}$ выполняются соотношения [10]:

$$\omega_{\alpha,j} > 0,\ j = 0, 3, 4, \dots;\ \omega_{\alpha,1} < 0,\ \omega_{\alpha,0} + \omega_{\alpha,2} > 0,\ \sum_{j=0}^{i}\omega_{\alpha,j} < 0,\ i \geqslant 2.$$

Тогда диагональные элементы больше 0, более того, $A_{ii} = 1 - 2\xi_i\omega_{\alpha,1} > 1$. Покажем строгое диагональное преобладание. Пусть $i = 1$, тогда

$$A_{ii} - \sum_{j=2}^{N-1}|A_{ij}| = 1 - 2\xi_i\omega_{\alpha,1} - \xi_i(\omega_{\alpha,0} + \omega_{\alpha,2}) - \sum_{j=i+2}^{N-1}\xi_i\omega_{\alpha,j-i+1} =$$

$$= 1 - \xi_i\omega_{\alpha,1} - \xi_i\sum_{j=0}^{N-1}\omega_{\alpha,j} > 1.$$

Это следует из того факта, что $\xi_i > 0$, $\sum\limits_{j=0}^{N-1}\omega_{\alpha,j} < 0$, $\omega_{\alpha,1} < 0$. Аналогичным образом проверяются случаи $i = 2, \dots, N-1$. □

4. Невязка разностного метода

Определение 2. *Невязкой без интерполяции метода (3.3) назовем*

$$\Psi_k^i = \frac{u(x^i, t_{k+1}) - u(x^i, t_k)}{\Delta} - \Lambda(u(x^i, t_k))\Big[\frac{u(x^i, t_k) + u(x^i, t_{k+1})}{2}\Big] -$$

$$-f\big(x^i, t_{k+\frac{1}{2}}, u_{t_{k+\frac{1}{2}}}(x^i, \cdot)\big),\ i = \overline{1, N-1},\ k = \overline{0, M-1}.$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия леммы* 1 *и точное решение трижды непрерывно дифференцируемо по переменной t. Тогда невязка без интерполяции метода* (3.3) *имеет порядок $h^2 + \Delta^2$, т. е. существует константа C_8 такая, что*

$$|\Psi_k^i| \leqslant C_8(h^2 + \Delta^2),\ i = 1, \dots, N-1,\ k = 0, \dots, M-1.$$

Доказательство. Согласно формуле численного дифференцирования

$$\frac{u(x^i, t_k) + u(x^i, t_{k+1})}{2} = u(x^i, t_{k+\frac{1}{2}}) + r_5,\ |r_5| \leqslant C_9\Delta^2,$$

$$\frac{u(x^i,t_{k+1})-u(x^i,t_k)}{\Delta}=\frac{\partial u(x^i,t_{k+\frac{1}{2}})}{\partial t}+r_6,\ |r_6|\leqslant C_{10}\Delta^2.$$

Тогда из леммы 1 и того факта, что $u(x^i,t_{k+\frac{1}{2}})$ является точным решением уравнения (2.1), получаем утверждение леммы. □

Определение 3. *Невязкой с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением метода* (3.3) *назовем*

$$\hat{\Psi}_k^i=\frac{u(x^i,t_{k+1})-u(x^i,t_k)}{\Delta}-\Lambda(u(x^i,t_k))\Big[\frac{u(x^i,t_k)+u(x^i,t_{k+1})}{2}\Big]-$$
$$-f\big(x^i,t_{k+\frac{1}{2}},\hat{v}_{t_{k+\frac{1}{2}}}(x^i,\cdot)\big),\ i=\overline{1,N-1},\ k=\overline{0,M-1},$$

где $\hat{v}(x^i,t)$ *для* $t\in[t_k-\tau,t_{k+1}]$ *является результатом кусочно-линейно интерполяции и экстраполяции продолжением (3.1) дискретной предыстории точного решения в узлах* $\{u(x^i,t_l)\}_k$.

Лемма 4. *Пусть выполняются условия предыдущей леммы. Тогда невязка с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением метода* (3.3) *имеет порядок* $h^2+\Delta^2$, *т. е. существует постоянная* C_{11} *такая, что*

$$|\hat{\Psi}_k^i|\leqslant C_{11}(h^2+\Delta^2),\ i=1,\dots,N-1,\ k=0,\dots,M-1.$$

Доказательство. Доказательство приведено в лемме 4 из [7]. □

5. Анализ погрешности

Определим погрешность метода (3.3) следующим образом:

$$\varepsilon_j^i=u(x^i,t_j)-u_j^i,\ j=0,\dots,M,\ i=0,\dots,N.$$

Будем говорить, что метод сходится с порядком $h^p+\Delta^q$, если существует константа C, не зависящая от h и Δ, такая, что $|\varepsilon_j^i|\leqslant C(h^p+\Delta^q)$ для всех $i=0,1,\dots,N$ и $j=0,1,\dots,M$. Для каждого временного слоя с номером $j=0,1,\dots,M$ введем вектор послойной погрешности $\varepsilon_j=(\varepsilon_j^1,\varepsilon_j^2,\cdots,\varepsilon_j^{N-1})$ с нормой $\|\varepsilon_j\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N-1}|\varepsilon_j^i|$. Также введем накопленную предысторию послойной погрешности к моменту t_k, $k=0,1,\dots,M$: $\{\varepsilon_j\}_k=\{\varepsilon_j,\ 0\leqslant j\leqslant k\}$ с нормой $\|\{\varepsilon_j\}_k\|=\max\limits_{0\leqslant j\leqslant k}\|\varepsilon_j\|$.

Лемма 5. *Пусть* $|\varepsilon_{k+1}^{i_0}|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N-1}|\varepsilon_{k+1}^i|$, *тогда*

$$(1+L_k^{i_0})|\varepsilon_{k+1}^{i_0}|\leqslant|\varepsilon_k^{i_0}+\frac{\Delta}{2}\Lambda(u_k^{i_0})[\varepsilon_k^{i_0}]|+|\varepsilon_k^{i_0}|\Delta 3L_KC_{12}+|\varepsilon_{k-1}^{i_0}|\Delta L_KC_{12}+$$

$$+\Delta|\hat{f}^{i_0}_{k+\frac{1}{2}} - f^{i_0}_{k+\frac{1}{2}}| + \Delta C_{11}(h^2+\Delta^2), \tag{5.1}$$

$$L^{i_0}_k = -\frac{\Delta}{2h^\alpha}K\big(\frac{3}{2}u^{i_0}_k - \frac{1}{2}u^{i_0}_{k-1}\big)\big(\sum_{j=0}^{i_0+1}\omega_{\alpha,j} + \sum_{j=0}^{N-i_0+1}\omega_{\alpha,j}\big) > 0,$$

$$f^i_{k+\frac{1}{2}} = f\big(x^i, t_{k+\frac{1}{2}}, v_{t_{k+\frac{1}{2}}}(x^i,\cdot)\big),\ \hat{f}^i_{k+\frac{1}{2}} = f\big(x^i, t_{k+\frac{1}{2}}, \hat{v}_{t_{k+\frac{1}{2}}}(x^i,\cdot)\big).$$

Доказательство. Запишем метод (3.3) в виде

$$u^i_{k+1} - \frac{\Delta}{2}\Lambda(u^i_k)[u^i_{k+1}] = u^i_k + \frac{\Delta}{2}\Lambda(u^i_k)[u^i_k] + \Delta f^i_{k+\frac{1}{2}}.$$

Выпишем определение невязки с интерполяцией в следующей форме:

$$u(x^i,t_{k+1}) - \frac{\Delta}{2}\Lambda(u^i_k)[u(x^i,t_{k+1})] = u(x^i,t_k) + \frac{\Delta}{2}\Lambda(u^i_k)[u(x^i,t_k)] +$$

$$+\Delta(\Lambda(u(x^i,t_k)) - \Lambda(u^i_k))[\frac{u(x^i,t_k)+u(x^i,t_{k+1})}{2}] + \Delta\hat{f}^i_{k+\frac{1}{2}} + \Delta\hat{\Psi}^i_k.$$

Тогда уравнение для погрешности будет иметь вид

$$\varepsilon^i_{k+1} - \frac{\Delta}{2}\Lambda(u^i_k)[\varepsilon^i_{k+1}] = \varepsilon^i_k + \frac{\Delta}{2}\Lambda(u^i_k)[\varepsilon^i_k] + \Delta(\hat{f}^i_{k+\frac{1}{2}} - f^i_{k+\frac{1}{2}}) + \Delta\hat{\Psi}^i_k +$$

$$+\Delta(\Lambda(u(x^i,t_k)) - \Lambda(u^i_k))[\frac{u(x^i,t_k)+u(x^i,t_{k+1})}{2}]. \tag{5.2}$$

Модуль левой части соотношения (5.2) для индекса i_0 будет иметь вид

$$|\varepsilon^{i_0}_{k+1} - \frac{\Delta}{2h^\alpha}K\big(\frac{3}{2}u^{i_0}_k - \frac{1}{2}u^{i_0}_{k-1}\big)\big(\sum_{j=0}^{i_0+1}\omega_{\alpha,j}\varepsilon^{i_0-j+1}_{k+1} + \sum_{j=0}^{N-i_0+1}\omega_{\alpha,j}\varepsilon^{i_0+j-1}_{k+1}\big)|.$$

Повторяя способ оценки подобного соотношения в лемме 5 из [7], а также в силу того, что $\omega_{\alpha,1} = \dfrac{2-\alpha-\alpha^2}{2} < 0$, $\omega_{\alpha,0}+\omega_{\alpha,2} > 0$, $\omega_{\alpha,j} > 0$ для $j \geqslant 3$ и $K(\dfrac{3}{2}u^{i_0}_k - \dfrac{1}{2}u^{i_0}_{k-1}) > 0$, можно получить оценку

$$|\varepsilon^{i_0}_{k+1} - \frac{\Delta}{2}\Lambda(u^{i_0}_k)[\varepsilon^{i_0}_{k+1}]| > (1+L^{i_0}_k)|\varepsilon^{i_0}_{k+1}|,\ L^{i_0}_k > 0. \tag{5.3}$$

Оценим модуль правой части соотношения (5.2) для индекса $i = i_0$. Из определения оператора Λ, липшицевости функции K и ограниченности $\delta_{\alpha,x}[u(x^{i_0},t_k)]$, $\delta_{\alpha,x}[u(x^{i_0},t_{k+1})]$, $\delta_{\alpha,-x}[u(x^{i_0},t_k)]$, $\delta_{\alpha,-x}[u(x^{i_0},t_{k+1})]$ получаем

$$|(\Lambda(u(x^{i_0},t_k)) - \Lambda(u^{i_0}_k))[\frac{u(x^{i_0},t_k)+u(x^{i_0},t_{k+1})}{2}]| =$$

$$= \frac{1}{2}|[K\big(\frac{3}{2}u(x^{i_0},t_k) - \frac{1}{2}u(x^{i_0},t_{k-1})\big) - K\big(\frac{3}{2}u_k^{i_0} - \frac{1}{2}u_{k-1}^{i_0})\big]\big(\delta_{\alpha,x}[u(x^{i_0},t_k)]+$$

$$+\delta_{\alpha,-x}[u(x^{i_0},t_k)] + \delta_{\alpha,x}[u(x^{i_0},t_{k+1})] + \delta_{\alpha,-x}[u(x^{i_0},t_{k+1})]\big)| \leqslant$$

$$\leqslant 2L_K C_{12}|\frac{3}{2}\varepsilon_k^{i_0} - \frac{1}{2}\varepsilon_{k-1}^{i_0}| \leqslant L_K C_{12}(3|\varepsilon_k^{i_0}| + |\varepsilon_{k-1}^{i_0}|), \tag{5.4}$$

$$|\delta_{\alpha,x}[u(x^{i_0},t_k)]| \leqslant C_{12},\ |\delta_{\alpha,x}[u(x^{i_0},t_{k+1})]| \leqslant C_{12},$$

$$|\delta_{\alpha,-x}[u(x^{i_0},t_k)]| \leqslant C_{12},\ |\delta_{\alpha,-x}[u(x^{i_0},t_{k+1})]| \leqslant C_{12}.$$

Используя лемму 4, соотношения (5.3) и (5.4), получим из соотношения (5.2) для индекса $i = i_0$ следующее неравенство:

$$(1+L_k^{i_0})|\varepsilon_{k+1}^{i_0}| \leqslant |\varepsilon_k^{i_0} + \frac{\Delta}{2}\Lambda(u_k^{i_0})[\varepsilon_k^{i_0}]| + |\varepsilon_k^{i_0}|\Delta 3L_K C_{12} + |\varepsilon_{k-1}^{i_0}|\Delta L_K C_{12}+$$

$$+\Delta|\hat{f}^{i_0}_{k+\frac{1}{2}} - f^{i_0}_{k+\frac{1}{2}}| + \Delta C_{11}(h^2+\Delta^2).$$

Лемма доказана, что означает устойчивость разностной схемы. □

Лемма 6. *Пусть* $\Delta \leqslant \dfrac{2h^\alpha}{C_K(\alpha^2+\alpha-2)}$, *где* $|K(u)| \leqslant C_K$. *Если выполняются условия предыдущей леммы, то справедлива оценка*

$$\|\{\varepsilon_j\}_{k+1}\| \leqslant (1 + (L_f L_I + 4L_K C_{12})\Delta)\|\{\varepsilon_j\}_k\| + C_{11}\Delta(h^2+\Delta^2).$$

Доказательство. Пусть $|\varepsilon_{k+1}^{i_0}| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N-1}|\varepsilon_{k+1}^{i}|$, тогда из (5.1) получим

$$\|\varepsilon_{k+1}\| \leqslant \frac{1}{(1+L_k^{i_0})}\big(|\varepsilon_k^{i_0} + \frac{\Delta}{2}\Lambda(u_k^{i_0})[\varepsilon_k^{i_0}]|\big) + \|\varepsilon_k\|\Delta 3L_K C_{12}+$$

$$+\|\varepsilon_{k-1}\|\Delta L_K C_{12} + \Delta|\hat{f}^{i_0}_{k+\frac{1}{2}} - f^{i_0}_{k+\frac{1}{2}}| + \Delta C_{11}(h^2+\Delta^2). \tag{5.5}$$

В силу липшицевости f по последнему аргументу и свойств кусочно-линейно интерполяции с экстраполяцией продолжением получим

$$|\hat{f}^{i_0}_{k+\frac{1}{2}} - f^{i_0}_{k+\frac{1}{2}}| = |f\big(x^{i_0}, t_{k+\frac{1}{2}}, \hat{v}_{t_{k+\frac{1}{2}}}(x^{i_0},\cdot)\big) - f\big(x^{i_0}, t_{k+\frac{1}{2}}, v_{t_{k+\frac{1}{2}}}(x^{i_0},\cdot)\big)| \leqslant$$

$$\leqslant L_f \max_{t\in[t_k-\tau,t_{k+1}]}|\hat{v}(x^{i_0},t) - v(x^{i_0},t)| \leqslant L_f L_I\|\{\varepsilon_j\}_k\|. \tag{5.6}$$

Используя следующие свойства коэффициентов $\omega_{\alpha,j} > 0$ для $j \geqslant 3$, $\omega_{\alpha,0}+\omega_{\alpha,2} > 0$, $\omega_{\alpha,1} < 0$, $\sum\limits_{j=0}^{i}\omega_{\alpha,j} < 0$ для $i \geqslant 2$, получим

$$\frac{1}{(1+L_k^{i_0})}|\varepsilon_k^{i_0} + \frac{\Delta}{2}\Lambda(u_k^{i_0})[\varepsilon_k^{i_0}]| \leqslant \frac{1}{(1+L_k^{i_0})}\big[|1 + \frac{\Delta}{2h^\alpha}2\omega_{\alpha,1}K(\frac{3}{2}u_k^{i_0} - \frac{1}{2}u_{k-1}^{i_0})|\cdot$$

$$\cdot|\varepsilon_k^{i_0}| + \frac{\Delta}{2h^\alpha}K(\frac{3}{2}u_k^{i_0} - \frac{1}{2}u_{k-1}^{i_0})\big(|\omega_{\alpha,0} + \omega_{\alpha,2}||\varepsilon_k^{i_0+1}| + |\omega_{\alpha,2} + \omega_{\alpha,0}||\varepsilon_k^{i_0-1}| +$$

$$+ \sum_{j=3}^{i_0+1} |\omega_{\alpha,j}||\varepsilon_k^{i_0-j+1}| + \sum_{j=3}^{N-i_0+1} |\omega_{\alpha,j}||\varepsilon_k^{i_0+j-1}|\big)\big] \leqslant \frac{1}{(1+L_k^{i_0})}\big[1 + \frac{\Delta}{2h^\alpha}K\big(\frac{3}{2}u_k^{i_0} -$$

$$-\frac{1}{2}u_{k-1}^{i_0}\big)\big(\sum_{j=0}^{i_0+1}\omega_{\alpha,j} + \sum_{j=0}^{N-i_0+1}\omega_{\alpha,j}\big)\big]\|\varepsilon_k\| = \frac{1-L_k^{i_0}}{1+L_k^{i_0}}\|\varepsilon_k\| \leqslant \|\varepsilon_k\|. \qquad (5.7)$$

Неравенство (5.7) выполняется в силу $\Delta \leqslant \dfrac{2h^\alpha}{C_K(\alpha^2+\alpha-2)}$, так как

$$1 + \frac{\Delta}{2h^\alpha}2\omega_{\alpha,1}K(\frac{3}{2}u_k^{i_0} - \frac{1}{2}u_{k-1}^{i_0}) = 1 - \frac{\Delta}{2h^\alpha}(\alpha^2+\alpha-2)K(\frac{3}{2}u_k^{i_0} - \frac{1}{2}u_{k-1}^{i_0}) \geqslant 0.$$

Из соотношений (5.5), (5.6) и (5.7) следует утверждение леммы. □

Теорема 1. *Пусть точное решение $u(x,t)$ задачи (2.1)–(2.3) удовлетворяет условиям леммы 1 и леммы 3. Тогда метод (3.3) сходится с порядком $h^2+\Delta^2$.*

Доказательство. Из леммы 6 мы получаем, что

$$\|\{\varepsilon_j\}_{k+1}\| \leqslant A\|\{\varepsilon_j\}_k\| + B,$$

где $A = 1 + (L_f L_I + 4L_K C_{12})\Delta$, $B = C_{11}\Delta(h^2+\Delta^2)$. Дальнейшее доказательство полностью повторяет доказательство теоремы 1 из [7]. □

6. Численный эксперимент

Рассмотрим тестовое уравнение с постоянным сосредоточенным запаздыванием по переменной t:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = K(u(x,t))[\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial^\alpha u}{\partial(-x)^\alpha}] + 2tx^2(1-x)^2 + u(x,t-\tau(t)) -$$

$$-(t-0,1)^2x^2(1-x)^2 - \frac{0,1+\beta t^6x^6(1-x)^6}{2}t^2[\frac{2}{\Gamma(3-\alpha)}(x^{2-\alpha} + (1-x)^{2-\alpha}) -$$

$$-\frac{12}{\Gamma(4-\alpha)}(x^{3-\alpha} + (1-x)^{3-\alpha}) + \frac{24}{\Gamma(5-\alpha)}(x^{4-\alpha} + (1-x)^{4-\alpha})],$$

где $x \in [0,1]$, $t \in [0,1]$, $\tau(t) = 0,1$, $K(u(x,t)) = (u^3(x,t) + 0,1)/2$. Заданы начальные и граничные условия

$$u(x,t) = t^2x^2(1-x)^2,\ x \in [0,1],\ t \in [-0.1, 0].$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t \in [0,1].$$

Рассматриваемое уравнение выписано по точному решению $u(x,t) = t^2x^2(1-x)^2$. Введем обозначение $E(\Delta, h) = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant M,\ 0\leqslant i\leqslant N} |u(x_i,t_k) - u_k^i|$.

В данном примере $C_K < 1/8$. Тогда

$$\Delta \leqslant \frac{2h^\alpha}{C_K(\alpha^2+\alpha-2)} < \frac{16h^\alpha}{\alpha^2+\alpha-2} = \overline{\Delta}. \tag{6.1}$$

Метод (3.3) тестировался для различных шагов Δ и h. Были получены вычислительные порядки сходимости $order_\Delta = \log_2(\frac{E(2\Delta,h)}{E(\Delta,h)})$, $order_h = \log_2(\frac{E(\Delta,2h)}{E(\Delta,h)})$ по Δ и h соответственно. Параметр $\overline{\Delta}$ вычислялся для наименьшего шага h при фиксированном Δ. Метод (3.3) сравнивался с методом первого порядка, который был получен ранее в статье [7]. Обозначим через $\overline{E(\Delta,h)}$, $\overline{order_\Delta}$ и $\overline{order_h}$ погрешность и вычислительные порядки сходимости метода первого порядка соответственно.

В табл. 1 показан вычислительный порядок сходимости по h.

7. Заключение

В данной работе представлен численный метод решения дифференциального уравнения супердиффузии. Уравнение содержит несколько эффектов, усложняющих решение: дробный характер пространственной производной, наличие функционального запаздывания и, самое главное, нелинейность коэффициента супердиффузии.

Таблица 1

Зависимость погрешностей и вычислительных порядков сходимости от шагов

α	Δ	h	$\overline{\Delta}$	$E(\Delta,h)$	$order_h$	$\overline{E(\Delta,h)}$	$\overline{order_h}$
1,9	1/4000	1/20	0,0011	0,000173158		0,000112093	
1,9	1/4000	1/40	0,0011	0,000043041	2,0083	0,000028555	1,9729
1,9	1/4000	1/80	0,0011	0,000010678	2,0111	0,000012048	1,2449
1,1	1/4000	1/320	0,0197	0,000001337		0,000102656	
1,1	1/4000	1/640	0,0197	0,000000405	1,7230	0,000053423	0,9423
1,1	1/4000	1/1280	0,0197	0,000000115	1,8163	0,000027543	0,9558

Таблица 2 показывает вычислительный порядок сходимости по Δ. Условие (6.1) для табл. 2 выполняется только для $\alpha = 1,1$, однако все равно наблюдается сходимость метода (3.3).

Таблица 2

Зависимость погрешностей и вычислительных порядков сходимости от шагов

α	h	Δ	$\overline{\Delta}$	$E(\Delta,h)$	$order_\Delta$	$\overline{E(\Delta,h)}$	$\overline{order_\Delta}$
1,9	1/1000	1/20	0,0000091	0,000007114		0,002666906	
1,9	1/1000	1/40	0,0000091	0,000001783	1,9964	0,001337513	0,9956
1,9	1/1000	1/80	0,0000091	0,000000452	1,9799	0,000665114	1,0079
1,1	1/2000	1/100	0,0121	0,000001816		0,000855208	
1,1	1/2000	1/200	0,0121	0,000000459	1,9842	0,000419821	1,0265
1,1	1/2000	1/400	0,0121	0,000000115	1,9969	0,000203094	1,0476

Разностный численный алгоритм основан на следующих методах. Учет левых и правых дробных производных осуществляется с помощью сдвинутых формул Грюнвальда-Летникова второго порядка. Эффект функционального запаздывания учитывается с помощью кусочно-линейной интерполяции, а неявность становится конечномерной после дополнительной экстраполяции продолжением. Нелинейность коэффициента супердиффузии преодолевается использованием значения этого коэффициента на предыдущем временном слое. В результате алгоритм сводится к решению системы линейных уравнений специального вида на каждом временном слое. Выписывается основная матрица этой системы и показано, что она имеет диагональное преобладание, из чего следует, что система однозначно разрешима.

Локальная погрешность (невязка) алгоритма выписывается без учета интерполяции и с учетом кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением. Показано, что невязка имееет второй порядок малости по Δ и h. Введены сеточное значение глобальной погрешности метода, послойный вектор погрешности и вектор накопленной истории погрешности. Основным результатом статьи является доказательство леммы 5, играющей роль утверждения об устойчивости алгоритма в максимальной норме, откуда следует теорема о сходимости алгоритма со вторым порядком малости по Δ и h. В последнем разделе работы представлены результаты численных экспериментов на одном из тестовых примеров. Мы надеемся, что эта методология может быть модифицирована для нелинейных многомерных дробно-пространственных уравнений с функциональным запаздыванием.

Список источников

1. Пименов В. Г., Ложников А. Б. Асимптотическое разложение погрешности численного метода для решения супердиффузионного уравнения с функциональным запаздыванием // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2024. Т. 30, № 2. С. 138–151.

2. Самарский А. А. Теория разностных схем. 3-е изд. М. : Наука, 1989. 616 с.
3. Arenas A. J., Gonzalez-Parra G., Caraballo B. M. A nonstandard finite difference scheme for a nonlinear Black–Scholes equation // Mathematical and Computer Modelling. 2013. Vol. 57, N 7. P. 1663–1670. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.11.009
4. Anomalous diffusion modeling by fractal and fractional dirivatives / W. Chen, H. Sun, X. Zhang, D. Korosak // Computers & Mathematics with Applications. 2010. Vol. 59, N 5. P. 1754–1758. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.020
5. Meerschaert M. M., Tadjeran C. Finite difference approximations for fractional advection–dispersion flow equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2004. Vol. 172, N 1. P. 65–77. https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.01.033
6. Heris M. S., Javidi M. Second order difference approximation for a class of Riesz space fractional advection-dispersion equations with delay // arXiv. 2021. https://doi.org/10.48550/arXiv.1811.10513
7. Pimenov V.G., Lekomtsev A.V. Numerical Method for Solving the Nonlinear Superdiffusion Equation with Functional Delay // Mathematics. 2023. Vol. 11, N 18. 3941. https://doi.org/10.3390/math11183941
8. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I. Delay Ordinary and Partial Differential Equations. Boca Raton, FL, USA : CRC Press, 2023. 434 p. https://doi.org/10.1201/9781003042310
9. Two-dimensional time fractional-order biological population model and its analytical solution / V. K. Srivastava, S. Kumar, M. K. Awasthi, B. K. Singh // Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences. 2014. Vol. 1, N 1. P. 71–76. https://doi.org/10.1016/j.ejbas.2014.03.001
10. Tian W., Zhou H., Deng W. A class of second order difference approximation for solving space fractional diffusion equations // Mathematics of Computation. 2015. Vol. 84, N 294. P. 1703–1727. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2015-02917-2
11. Wu J. Theory and Application of Partial Functional Differential Equations. New York, NY, USA : Springer-Verlag, 1996. 432 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4050-1

References

1. Pimenov V.G., Lozhnikov A.B. Asymptotic expansion of the error of a numerical method for solving a superdiffusion equation with functional delay. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2024, vol. 30, no. 2, pp. 138—151.
2. Samarskii A.A. *The Theory of Difference Schemes*. New York, Marcel Dekker Publ., 2001, 786 p. https://doi.org/10.1201/9780203908518
3. Arenas A.J., Gonzalez-Parra G., Caraballo B.M. A nonstandard finite difference scheme for a nonlinear Black–Scholes equation. *Mathematical and Computer Modelling*, 2013, vol. 57, no. 7, pp. 1663–1670. https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.11.009
4. Chen W., Sun H., Zhang X., Korosak D. Anomalous diffusion modeling by fractal and fractional dirivatives. *Computers & Mathematics with Applications*, 2010, vol. 59, no. 5, pp. 1754–1758. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.020
5. Meerschaert M.M., Tadjeran C. Finite difference approximations for fractional advection–dispersion flow equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2004, vol. 172, no. 1, pp. 65–77. https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.01.033

6. Heris M.S., Javidi M. Second order difference approximation for a class of Riesz space fractional advection-dispersion equations with delay. *arXiv*, 2021. https://doi.org/10.48550/arXiv.1811.10513
7. Pimenov V.G., Lekomtsev A.V. Numerical Method for Solving the Nonlinear Superdiffusion Equation with Functional Delay. *Mathematics*, 2023, vol. 11, no. 18, 3941. https://doi.org/10.3390/math11183941
8. Polyanin A.D., Sorokin V.G., Zhurov A.I. *Delay Ordinary and Partial Differential Equations*. Boca Raton, FL, CRC Press Publ., 2023, 434 p. https://doi.org/10.1201/9781003042310
9. Srivastava V.K., Kumar S., Awasthi M.K., Singh B.K. Two-dimensional time fractional-order biological population model and its analytical solution. *Egyptian Journal of Basic and Applied Sciences*, 2014, vol. 1, no. 1, pp. 71–76. https://doi.org/10.1016/j.ejbas.2014.03.001
10. Tian W., Zhou H., Deng W. A class of second order difference approximation for solving space fractional diffusion equations. *Mathematics of Computation*, 2015, vol. 84, no. 294, pp. 1703–1727. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-2015-02917-2
11. Wu J. *Theory and Application of Partial Functional Differential Equations*. New York, Springer-Verlag Publ., 1996, 432 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4050-1

Об авторах

Пименов Владимир Германович, д-р физ.-мат. наук, проф., Уральский федеральный университет, Екатеринбург, 620075, Российская Федерация, v.g.pimenov@urfu.ru, https://orcid.org/0000-0002-4042-6079

Лекомцев Андрей Валентинович, канд. физ.-мат. наук, Уральский федеральный университет, Екатеринбург, 620075, Российская Федерация, avlekomtsev@urfu.ru, https://orcid.org/0000-0003-0176-1306

About the authors

Vladimir G. Pimenov, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Ural Federal University, Yekaterinburg, 620075, Russian Federation, v.g.pimenov@urfu.ru, https://orcid.org/0000-0002-4042-6079

Andrei V. Lekomtsev, Cand. Sci. (Phys.Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620075, Russian Federation, avlekomtsev@urfu.ru, https://orcid.org/0000-0003-0176-1306

Поступила в редакцию / Received 28.07.2024
Поступила после рецензирования / Revised 23.09.2024
Принята к публикации / Accepted 18.11.2024