Серия «Математика»
2024. Т. 49. С. 32—44

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.977
MSC 49M25
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.32

Параметрическая регуляризация функционала в линейно-квадратичной задаче оптимального управления

В. А. Срочко[1], **А. В. Аргучинцев**[1]✉

[1] Иркутский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация
✉ arguch@math.isu.ru

Аннотация. На множестве ступенчатых управляющих функций рассматривается линейно-квадратичная задача оптимального управления с параметрами и произвольными матрицами в квадратичном целевом функционале. В качестве критерия качества допустимого набора параметров предлагается выбрать число обусловленности итоговой матрицы, которое выражается через границы ее спектра. В результате построены задачи оптимизации параметров, которые обеспечивают сильную выпуклость целевой функции по управляющим переменным вместе с относительно хорошей обусловленностью соответствующей задачи квадратичного программирования. Аналогичный подход реализован для минимаксной задачи. В этом случае целевая функция приобретает выпукло-вогнутую структуру, и выбор параметров проводится на основе минимизации некоторой свертки двух чисел обусловленности.

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача оптимального управления, целевой функционал с параметрами, оптимизация параметров, минимизация числа обусловленности

Благодарности: Исследование Аргучинцева А. В. выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00296, https://rscf.ru/project/23-21-00296/.

Ссылка для цитирования: Срочко В. А., Аргучинцев А. В. Параметрическая регуляризация функционала в линейно-квадратичной задаче оптимального управления // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2024. Т. 49. С. 32–44.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.32

Research article

Parametric Regularization of the Functional in a Linear-quadratic Optimal Control Problem

Vladimir A. Srochko[1], **Alexander V. Arguchintsev**[1]✉

[1] Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation
✉ arguch@math.isu.ru

Abstract. A linear-quadratic optimal control problem with parameters and arbitrary matrices in the quadratic cost functional is considered on the set of stepwise control functions. As a quality criterion of the admissible set of parameters it is proposed to choose a condition number of the final matrix, which is expressed through the boundaries of its spectrum. As a result, parameter optimization problems are constructed which provide a strong convexity of the objective function on control variables together with relatively good conditionality of the corresponding quadratic programming problem. A similar approach is realized for the minimax problem. In this case, the objective function acquires a convex-concave structure and the choice of parameters is based on minimization of some convolution of two condition numbers.

Keywords: linear-quadratic optimal control problem, cost functional with parameters, parameter optimization, minimization of the condition number

Acknowledgements: The study by A. Arguchintsev was financially supported by the Russian Science Foundation, Project No 23-21-00296, https://rscf.ru/project/23-21-00296.

For citation: Srochko V. A., Arguchintsev A. V. Parametric Regularization of the Functional in a Linear-quadratic Optimal Control Problem. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2024, vol. 49, pp. 32–44. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2024.49.32

1. Введение

В теории оптимального управления линейно-квадратичные задачи (линейная система, квадратичный функционал) традиционно занимают приоритетное место в силу своей сохраняющейся актуальности как в теоретическом, так и в прикладном отношениях. Спектр возможных постановок и полученных результатов в этой области достаточно широк и разнообразен. Укажем избранные фрагменты линейно-квадратичной теории оптимального управления, связанные с научными интересами авторов [1; 6; 7; 9; 12; 14]:

– классические задачи без ограничений на управление и разрешающие уравнения Риккати и Ляпунова в рамках регулирования с обратной связью;
– выпуклые задачи с ограничением на управление и разрешающие соотношения принципа максимума Понтрягина;

– позиционное решение линейных и квадратичных задач в классе дискретных управлений;
– невыпуклые по функционалу задачи программного управления с условиями глобальной оптимальности и методами нелокального улучшения на основе точных формул приращения;
– линейно-квадратичные аппроксимации общих нелинейных задач в рамках методов последовательных приближений.

Данная статья продолжает направление исследований, представленное в публикациях [2; 3; 10], и связана с регуляризацией невыпуклых линейно-квадратичных задач с ограничением на кусочно-постоянное управление и параметрами в квадратичном целевом функционале. В указанных работах получены конструктивные условия на параметры, обеспечивающие функционалу свойства выпуклости либо вогнутости по управлению, что открывает возможности эффективного численного решения рассматриваемой задачи.

В настоящей работе ликвидируется неопределенность в выборе параметров. Вводится критерий качества допустимого выбора. Это число обусловленности итоговой матрицы квадратичной формы, которое выражается через границы ее спектра, что вполне согласуется со спектральными условиями на параметры. Отсюда естественно возникает задача минимизации числа обусловленности матрицы вторых производных целевой функции на множестве параметров, гарантирующих ей положительную определенность. Приводится линеаризованный вариант задачи, когда минимизируется дробно-линейная оценка сверху числа обусловленности при условии положительности знаменателя.

Полученные задачи оптимизации содержат три параметра и после приемлемой нормировки могут решаться в приближенном варианте простым методом перебора на сетке допустимых значений параметров. В целом предлагаемая процедура поиска параметров обеспечивает сильную выпуклость целевой функции по управляющим переменным вместе с относительно хорошей обусловленностью соответствующей задачи квадратичного программирования.

Аналогичный подход реализуется для минимаксной задачи, отражающей принцип гарантированного результата относительно множества начальных воздействий на систему. В этом случае целевая функция приобретает выпукло-вогнутую структуру. Выбор параметров проводится на основе условий знакоопределенности двух матриц с минимизацией некоторой свертки двух чисел обусловленности.

2. Постановка задачи. Конечномерная модель

Используя стандартные обозначения $t \in [t_0, T]$, $u(t) \in \Re$, $x(t) \in \Re^n$, рассмотрим задачу на минимум квадратичного функционала

$$\Phi(u, x) = 1/2\ \alpha\langle x(T), Px(T)\rangle + 1/2 \int_{t_0}^{T} [\beta\langle x(t), Q(t)x(t)\rangle + \gamma u^2(t)]dt \quad (2.1)$$

применительно к линейной системе

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u,\ x(t_0) = x^0 \quad (2.2)$$

с двусторонними ограничениями на управление

$$u(t) \in [u_-, u_+],\ t \in [t_0, T]. \quad (2.3)$$

Перечислим основные условия на параметры задачи (2.1)–(2.3):
– функции $Q(t)$, $A(t)$, $b(t)$ непрерывны на отрезке $[t_0, T]$;
– матрицы P, $Q(t)$ симметричны;
– параметры α, β, γ положительны.

Определим множество допустимых управлений. Введем на отрезке $[t_0, T]$ сетку узлов $\{t_0, t_1, \ldots, t_{m-1}, t_m = T\}$ с условиями $t_j = t_{j-1} + h_j$, $h_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Выделим промежутки $T_1 = [t_0, t_1]$, $T_j = (t_{j-1}, t_j]$, $j = 2, \ldots, m$, вместе с соответствующими характеристическими функциями $\chi_1(t)$, $\chi_j(t)$, $t \in [t_0, T]$. Для вектора $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ введем множество допустимых значений

$$Y = \{y \in \Re^m : y_j \in [u_-, u_+],\ j = 1, 2, \ldots, m\}$$

и сформируем управление

$$u(t, y) = \sum_{j=1}^{m} y_j \chi_j(t),\ t \in [t_0, T], y \in Y. \quad (2.4)$$

Это кусочно-постоянная функция со значениями y_j на заданных промежутках T_j, удовлетворяющая ограничениям (2.3).

Рассмотрим решение $x(t, y)$ задачи Коши (2.2), соответствующее управлению $u(t, y)$. Для получения явной зависимости решения от y определим следующие объекты:

$x^0(t)$ — решение (2.2) при нулевом управлении;
$B_\chi(t) \in \Re^{n\times m}$ — матрица столбцов $b(t)\chi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, m$;
$X(t) \in \Re^{n\times m}$ — решение задачи Коши для матричной системы

$$\dot{X}(t) = A(t)X(t) + B_\chi(t),\ X(t_0) = O,$$

где O — нулевая матрица.

В этих обозначениях имеет место представление

$$x(t,y) = x^0(t) + X(t)y,\ t \in [t_0, T]. \tag{2.5}$$

Проверим дифференциальное уравнение для $x(t,y)$, учитывая, что

$$B_\chi(t)y = \sum_{j=1}^{m} b(t)\chi_j(t)y_j = b(t)u(t,y).$$

Тогда

$$\dot{x}(t,y) = A(t)x^0(t) + A(t)X(t)y + b(t)u(t,y) = A(t)x(t,y) + b(t)u(t,y),$$

что и подтверждает формулу (2.5).

Рассмотрим далее целевой функционал (2.1) для $u = u(t,y)$, $x = x(t,y)$. Используя представления (2.4), (2.5), после простых преобразований приходим к целевой функции $\varphi(y)$ следующей структуры:

$$\varphi(y) = 1/2\ \langle y, (\alpha P_1 + \beta Q_1 + \gamma H)y\rangle + \langle y, \alpha p^0 + \beta q^0\rangle + \Phi(0, x^0(t)). \tag{2.6}$$

Здесь введены обозначения

$$P_1 = X^T(T)PX(T),\ p^0 = X^T(T)Px^0(T);$$

$$Q_1 = \int_{t_0}^{T} X^T(t)Q(t)X(t)dt,\ q^0 = \int_{t_0}^{T} X^T(t)Q(t)x^0(t)dt;$$

$$H = diag(h_1, h_2, \ldots, h_m).$$

В результате первоначальная задача (2.1)–(2.3) в классе допустимых управлений (2.4) формулируется в конечномерном варианте

$$\varphi(y) \to \min,\ y \in Y. \tag{2.7}$$

Замечание 1. Целевой функционал (2.1) можно интерпретировать как линейную свертку трех квадратичных членов с нефиксированными весовыми коэффициентами α, β, γ при условии некоторых соотношений между ними в соответствии со значимостью слагаемых функционала. Эти параметры обеспечивают возможность воздействия на функционал с определенными целями.

Замечание 2. Соотношения (2.1)–(2.4) можно рассматривать как параметрическое семейство, вообще говоря, невыпуклых задач оптимизации, среди которых необходимо конструктивно выделить приемлемые задачи в смысле глобального решения.

3. Оптимизационный выбор параметров

В рамках задачи (2.7) обеспечим функции $\varphi(y)$ свойство сильной выпуклости с помощью положительных параметров α, β, γ. Соответствующие условия сформулируем через экстремальные собственные значения $\lambda_{\min}(.)$, $\lambda_{\max}(.)$ возникающих симметричных матриц. Будем использовать экстремальные представления [13]

$$\lambda_{\min}(A) = \min_{\langle y,y\rangle=1} \langle y, Ay\rangle,\ \lambda_{\max}(A) = \max_{\langle y,y\rangle=1} \langle y, Ay\rangle. \tag{3.1}$$

Выделим матрицу квадратичной формы в выражении для $\varphi(y)$:

$$S(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha P_1 + \beta Q_1 + \gamma H.$$

Свойство сильной выпуклости функции $\varphi(y)$ эквивалентно неравенству

$$\lambda_{\min}(S(\alpha,\beta,\gamma)) > 0. \tag{3.2}$$

При этом спектральное число обусловленности матрицы $S(\alpha,\beta,\gamma)$ выражается по формуле

$$cond\ S(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\lambda_{\max}(S(\alpha,\beta,\gamma))}{\lambda_{\min}(S(\alpha,\beta,\gamma))}. \tag{3.3}$$

Отсюда естественно возникает параметрическая задача оптимизации числа обусловленности матрицы S при условии ее положительной определенности:

$$cond\ S(\alpha,\beta,\gamma) \to \min,\ \lambda_{\min}(S(\alpha,\beta,\gamma)) > 0. \tag{3.4}$$

Проведем упрощение спектральной задачи (3.4) на основе линеаризации собственных значений в (3.3) относительно параметров α, β, γ.

Используя представление (3.1), получаем следующие оценки (экстремум суммы и сумма экстремумов):

$$\lambda_{\min}(S(\alpha,\beta,\gamma)) \geq \alpha\lambda_{\min}(P_1) + \beta\lambda_{\min}(Q_1) + \gamma\lambda_{\min}(H) = s_{\min}(\alpha,\beta,\gamma),$$

$$\lambda_{\max}(S(\alpha,\beta,\gamma)) \leq \alpha\lambda_{\max}(P_1) + \beta\lambda_{\max}(Q_1) + \gamma\lambda_{\max}(H) = s_{\max}(\alpha,\beta,\gamma).$$

Кроме того, отметим, что в силу диагональности матрицы H

$$\lambda_{\min}(H) = \min_{1\leq j\leq m} h_j = h_{\min},\ \lambda_{\max}(H) = \max_{1\leq j\leq m} h_j = h_{\max}.$$

В результате получаем оценку сверху

$$cond\ S(\alpha,\beta,\gamma) \leq \frac{s_{\max}(\alpha,\beta,\gamma)}{s_{\min}(\alpha,\beta,\gamma)},$$

что приводит к задаче на минимум дробно-линейной функции с условием положительности знаменателя

$$\frac{s_{\max}(\alpha,\beta,\gamma)}{s_{\min}(\alpha,\beta,\gamma)} \to \min,\ s_{\min}(\alpha,\beta,\gamma) > 0. \tag{3.5}$$

Отметим, что это условие гарантирует выполнение неравенства (3.2), т. е. положительную определенность матрицы $S(\alpha,\beta,\gamma)$. Более того, поскольку $\lambda_{\min}(H) > 0$, то найдется допустимый набор параметров (α, β,γ) с условием $s_{\min}(\alpha,\beta,\gamma) > 0$. Это означает, что ограничения строгой положительности в задачах (3.4), (3.5) содержательны.

Таким образом, спектральные задачи (3.4), (3.5) поиска параметров α, β, γ обеспечивают сильную выпуклость функции $\varphi(y)$ вместе с относительно хорошей обусловленностью задачи (2.7). В этих условиях задача квадратичного программирования (2.7) с простейшими ограничениями допускает эффективное численное решение за конечное число итераций методами особых точек, сопряженных градиентов или опорным методом [4; 5; 8].

Обсудим вопрос о решении параметрических задач (3.4), (3.5).

Прежде всего, необходимо скорректировать строгие неравенства в ограничениях:

$$\lambda_{\min}(S(\alpha,\beta,\gamma)) \geq \varepsilon,$$
$$s_{\min}(\alpha,\beta,\gamma) \geq \varepsilon,$$

где параметр $\varepsilon > 0$.

Далее, в качестве альтернативы дробным целевым функциям можно минимизировать разность между числителем и знаменателем при тех же ограничениях. Для задачи (3.4) это будет разность между границами спектра матрицы S, а задача (3.5) становится линейной по своим переменным.

Кроме того, представляется целесообразной некоторая нормировка параметров, например, по правилу $\alpha+\beta+\gamma = 1$. В результате приближенное решение задач (3.4), (3.5) можно проводить перебором значений целевой функции на сетке $\{\alpha_i,\ \beta_j,\ \gamma_k\}$. Возможны, конечно, и другие варианты согласованного выбора параметров в рамках задач (3.4), (3.5).

В заключение имеет смысл прокомментировать симметричную ситуацию, когда требуется обеспечить отрицательную определенность матрицы $S(\alpha,\beta,\gamma)$. В этом случае проще всего перейти к матрице $(-S)$ и реализовать для нее описанную ранее технологию с учетом очевидной взаимосвязи

$$cond\ (-S) = cond\ S,\ \lambda_i(-S) = -\lambda_i(S),\ i = 1,2,\ldots,m.$$

В результате получаем задачу минимизации сильно вогнутой функции $\varphi(y)$ на параллелепипеде Y, которую можно решить специализированным перебором его угловых точек [11].

4. Иллюстративный пример

Данный пример демонстрирует возможность аналитического решения параметрической задачи оптимизации (3.4) на минимум функции обусловленности при условии положительной определенности матрицы.

Рассмотрим простейшую систему

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t),\ \dot{x}_2(t) = u(t, y),\ t \in [0, 2],\ x_1(0) = x_2(0) = 0$$

на множестве управлений

$$u(t, y) = \begin{cases} y_1,\ 0 \le t < 1, \\ y_2,\ 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Соответствующие траектории имеют вид

$$x_1(t, y) = \begin{cases} 1/2 y_1 t^2,\ 0 \le t \le 1, \\ 1/2 y_1 + y_1(t-1) + 1/2 y_2 (t-1)^2,\ 1 \le t \le 2; \end{cases}$$

$$x_2(t, y) = \begin{cases} y_1 t,\ 0 \le t \le 1, \\ y_1 + y_2(t-1),\ 1 \le t \le 2. \end{cases}$$

Определим квадратичный функционал с параметрами α и β:

$$\Phi(u) = -\alpha x_1^2(2, y) + \beta \int\limits_0^2 x_2^2(t, y)dt.$$

Целевая функция конечномерной задачи выражается по формуле

$$\varphi(y) = (-9/4\alpha + 4/3\beta) y_1^2 + (-3/2\alpha + \beta) y_1 y_2 + (-1/4\alpha + 1/3\beta) y_2^2.$$

Выделим матрицу квадратичной формы

$$S(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 4/3\beta - 9/4\alpha & 1/2\beta - 3/4\alpha \\ 1/2\beta - 3/4\alpha & 1/3\beta - 1/4\alpha \end{bmatrix}$$

и определим условие ее положительной определенности по критерию Сильвестра:

$$\beta > 12/7\alpha > 0.$$

Найдем собственные значения

$$\lambda_{\min}(S(\alpha, \beta)) = 1/2(5/3\beta - 5/2\alpha - \sqrt{(\beta - 2\alpha)^2 + (\beta - 3/2\alpha)^2}),$$

$$\lambda_{\max}(S(\alpha, \beta)) = 1/2(5/3\beta - 5/2\alpha + \sqrt{(\beta - 2\alpha)^2 + (\beta - 3/2\alpha)^2}).$$

Сформируем число обусловленности

$$cond\ S(\alpha,\beta)=\frac{\lambda_{\max}(S(\alpha,\beta))}{\lambda_{\min}(S(\alpha,\beta))}$$

и параметрическую задачу оптимизации

$$cond\ S(\alpha,\beta)\to\min,\ \alpha>0,\ \beta>12/7\alpha. \tag{4.1}$$

Для решения задачи найдем частную производную целевой функции по β. Несложные выкладки приводят к следующему выражению:

$$\frac{\partial\ cond\ S(\alpha,\beta)}{\partial\beta}=\frac{5/6\alpha(\beta-2\alpha)}{2\lambda^2_{\min}(S(\alpha,\beta))\sqrt{(\beta-2\alpha)^2+(\beta-3/2\alpha)^2}}.$$

Отсюда для $\alpha>0$, $\beta>12/7\alpha$

$$\frac{\partial\ cond\ S(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\begin{cases}<0,\ \beta<2\alpha,\\ =0,\ \beta=2\alpha,\\ >0,\ \beta>2\alpha.\end{cases}$$

Следовательно, значение $\beta=2\alpha$ минимизирует функцию обусловленности по переменной β на множестве $\alpha>0$, $\beta>12/7\alpha$:

$$cond\ S(\alpha,2\alpha)\le cond\ S(\alpha,\beta).$$

Подсчитаем соответствующее значение целевой функции:

$$cond\ S(\alpha,2\alpha)=4. \tag{4.2}$$

Это число не зависит от α. Поэтому соотношение между параметрами $\beta=2\alpha$ решает задачу оптимизации (4.1) с минимальным значением (4.2). При этом итоговая сильно выпуклая функция $\varphi(y)$ выражается по формуле

$$\varphi(y)=1/12\alpha(5y_1^2+6y_1y_2+5y_2^2).$$

5. Задача с неопределенностью. Минимаксный подход

Внесем в задачу (2.1)–(2.3) элемент неопределенности на уровне начального условия для фазовой системы. Пусть начальное состояние $x^0=z$ изменяется в пределах выпуклого компактного множества Z и является неконтролируемым внешним воздействием на систему (2.2) и задачу в целом. Определим возникающие при этом соотношения.

Начальная траектория $x^0(t)$ выражается через z по формуле Коши

$$x^0(t)=F(t)z,\ t\in[t_0,T]$$

с фундаментальной матрицей $F(t)$: $\dot{F}(t) = A(t)F(t),\ F(t_0) = E$, где E — единичная матрица.

Тогда из (2.5) получаем следующую формулу для решения (2.2):

$$x(t, y, z) = F(t)z + X(t)y,\ t \in [t_0, T].$$

Далее обратимся к выражению (2.6) для целевой функции, в котором

$$\Phi(0, x^0(t)) = 1/2\ \alpha\langle x^0(T), Px^0(T)\rangle + 1/2\beta \int\limits_{t_0}^{T} \langle x^0(t), Q(t)x^0(t)\rangle dt.$$

С учетом формулыКошив правой части получаем квадратичную форму

$$1/2\langle z, (\alpha P_2 + \beta Q_2)z\rangle$$

с матрицами

$$P_2 = F^T(T)PF(T),\ Q_2 = \int\limits_{t_0}^{T} F^T(t)Q(t)F(t)dt.$$

Обозначим матрицу квадратичной формы $R(\alpha, \beta) = \alpha P_2 + \beta Q_2$ и на основе (2.6) представим выражение для целевой функции в следующем виде:

$$\varphi(y, z) = 1/2\langle y, S(\alpha, \beta, \gamma)y\rangle + 1/2\langle z, R(\alpha, \beta)z\rangle + \langle y, \alpha p^0 + \beta q^0\rangle.$$

Здесь векторы p^0, q^0 линейно зависят от z.

Далее будем действовать в соответствии с правилом гарантированного результата, т. е. поставим задачу на минимакс

$$\min_{y \in Y} \max_{z \in Z}\ \varphi(y, z). \tag{5.1}$$

Придадим задаче благоприятный характер в плане возможностей ее эффективного численного решения. С этой целью обеспечим функции $\varphi(y, z)$ свойство сильной выпуклости по y и сильной вогнутости по z за счет параметров α, β, γ. Соответствующие условия представим, как и ранее, в спектральной терминологии относительно матриц S и R.

Положительная определенность матрицы S отработана ранее и обеспечивается одним из следующих неравенств:

$$\lambda_{\min}(S(\alpha, \beta, \gamma)) > 0,\ s_{\min}(\alpha, \beta, \gamma) > 0. \tag{5.2}$$

Отрицательная определенность матрицы R эквивалентна неравенству $\lambda_{\max}(R(\alpha, \beta)) < 0$. С учетом оценки сверху

$$\lambda_{\max}(R(\alpha, \beta)) \le \alpha\lambda_{\max}(P_2) + \beta\lambda_{\max}(Q_2) = r_{\max}(\alpha, \beta)$$

получаем достаточное условие отрицательной определенности

$$r_{\max}(\alpha, \beta) < 0.$$

Таким образом, условие отрицательной определенности матрицы R обеспечивается одним из следующих неравенств:

$$\lambda_{\max}(R(\alpha, \beta)) < 0, \ r_{\max}(\alpha, \beta) < 0. \tag{5.3}$$

Качество каждого набора параметров (α, β, γ) с условиями (5.2), (5.3) оценим с помощью спектральных чисел обусловленности $cond\ S(\alpha, \beta, \gamma)$, $cond\ R(\alpha, \beta)$.

Образуем неотрицательную свертку $W(cond\ S, cond\ R)$ двух критериев и сформулируем задачу оптимизации $W(.,.) \to \min$ на множестве параметров, удовлетворяющих условиям знакоопределенности (5.2), (5.3). В качестве W можно использовать, например, следующие варианты: $W_1 = cond\ S + cond\ R$, $W_2 = max\{cond\ S, cond\ R\}$. Реальное решение этой параметрической задачи на минимум совокупной обусловленности выпукло-вогнутой задачи (5.1) естественно проводить в рамках некоторой схемы дискретного перебора (см. разд. 3).

После регуляризации минимаксная задача (5.1) переходит в категорию выпуклого программирования $\varphi_1(y) = \max_{z \in Z} \varphi(y, z) \to \min, \quad y \in Y$. Целевые функции здесь являются выпуклыми и дифференцируемыми, что открывает возможности эффективного решения этой задачи.

6. Заключение

Предлагаемые задачи на минимум чисел обусловленности при условиях знакоопределенности соответствующих матриц хорошо завершают в идейном плане технологию параметрической регуляризации квадратичного функционала в линейной системе управления, представленную в [2;3;10]. Дальнейшие исследования в данном направлении могут быть связаны с расширением класса рассматриваемых задач.

Список источников

1. Аргучинцев А. В., Дыхта В. А., Срочко В. А. Оптимальное управление: нелокальные условия, вычислительные методы и вариационный принцип максимума // Известия вузов. Математика. 2009. № 1. С. 3–43.
2. Аргучинцев А. В., Срочко В. А. Процедура регуляризации билинейных задач оптимального управления на основе конечномерной модели // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2022. Т. 18, № 1. С. 179–187. https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.115

3. Аргучинцев А. В., Срочко В. А. Решение линейно-квадратичной задачи на множестве кусочно-постоянных управлений с параметризацией функционала // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 3. С. 5–16. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-3-5-16
4. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. Книга 1. Москва : МЦНМО, 2011. 620 с.
5. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, В. В. Альсевич [и др.]. Минск : Четыре четверти, 2011. 472 с.
6. Габасов Р., Кириллова Ф. М., Павленок Н. С. Построение программного и позиционного решений линейно-квадратичной задачи оптимального управления // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2008. Т. 48, № 10. С. 1748–1779. https://doi.org/10.1134/S0965542508100023
7. Дмитрук Н. М. Многократно замыкаемая стратегия управления в линейной терминальной задаче оптимального гарантированного управления // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2022. Т. 28, № 3. С. 66–82. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-3-66-82
8. Измаилов А. Ф., Солодов М. В. Численные методы оптимизации. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. 304 с.
9. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2000. 160 с.
10. Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В. Параметрическая регуляризация линейно-квадратичной задачи на множестве кусочно-линейных управлений // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 41. С. 57—68. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.57
11. Срочко В. А., Аксенюшкина Е. В., Антоник В. Г. Решение линейно-квадратичной задачи оптимального управления на основе конечномерных моделей // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2021. Т. 37. С. 3–16. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.37.3
12. Срочко В. А., Антоник В. Г. Условия оптимальности экстремальных управлений для билинейной и квадратичной задач // Известия вузов. Математика. 2016. № 5. С. 86–92. https://doi.org/10.3103/S1066369X1605008X
13. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М. : Мир, 1989. 655 с.
14. Rao A. V. A survey of numerical methods for optimal control // Advances in the Astronautical Sciences. 2009. Vol. 135. P. 1–32.

References

1. Arguchintsev A.V., Dykhta V.A., Srochko V.A. Optimal control: nonlocal conditions, computational methods, and the variational principle of maximum. *Russian Math.*, 2009, vol. 53, no. 1, pp. 1–35.
2. Arguchintsev A.V., Srochko V.A. Procedure for regularization of bilinear optimal control problems based on a finite-dimensional model. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, 2022, vol. 8, no. 1, pp. 179–187. (in Russian) https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2022.115
3. Arguchintsev A.V., Srochko V.A. Solution of a linear-quadratic problem on a set of piecewise constant controls with parametrization of the functional. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2022, vol. 319, suppl. 1, pp. S43–S53. https://doi.org/10.21538/0134-4889-2022-28-3-5-16
4. Vasil'ev F.P. *Optimization Methods. Book 1.* Moscow, MTSNMO Publ., 2011, 620 p. (in Russian)

5. Gabasov R., Kirillova F.M., Alsevich V.V. et al. *Optimization Methods*. Minsk, Four Quarters Publ., 2011, 472 p. (in Russian)
6. Gabasov R., Kirillova F.M., Pavlenok N.S. Constructing open-loop and closed-loop solutions of linear-quadratic optimal control problems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2008, vol. 48, pp. 1715–1745. https://doi.org/10.1134/S0965542508100023
7. Dmitruk N. M. Multiply closed control strategy in a linear terminal problem of optimal guaranteed control. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, 2022, vol. 319, suppl. 1, pp. S112–128. https://doi.org/10.1134/S0081543822060104
8. Izmailov A.F., Solodov M.V. *Numerical Methods of Optimization*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2005, 304 p. (in Russian)
9. Srochko V.A. *Iterative Methods for Solving Optimal Control Problems*. Moscow, Fizmatlit Publ., 2000, 160 p. (in Russian)
10. Srochko V.A., Aksenyushkina E.V. Parametric regularization of a linear-quadratic problem on a set of piecewise linear controls. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 41, pp. 57–68. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.57 (in Russian)
11. Srochko V.A., Aksenyushkina E.V., Antonik V.G. Resolution of a linear-quadratic optimal control problem based on finite-dimensional models. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2021, vol. 37, pp. 3–16. https://doi.org/10.26516/1997-7670.2021.37.3 (in Russian)
12. Srochko V.A., Antonik V.G. Optimality conditions for extremal controls in bilinear and quadratic problems. *Russian Math.*, 2016, vol. 60, no. 5, pp. 75–80.
13. Horn R., Johnson C. *Matrix Analysis*. Moscow, Mir Publ., 1989, 655 p. (in Russian)
14. Rao A.V. A survey of numerical methods for optimal control. *Advances in the Astronautical Sciences*, 2009, vol. 135, pp. 1–32.

Об авторах

Срочко Владимир Андреевич, д-р физ.-мат. наук, проф., Иркутский государственный университет, Иркутск, 664003, Российская Федерация, srochko@math.isu.ru

Аргучинцев Александр Валерьевич, д-р физ.-мат. наук, проф., Иркутский государственный университет, Иркутск, 664003, Российская Федерация, arguch@math.isu.ru, https://orcid.org/0000-0002-9314-485X

About the authors

Vladimir A. Srochko, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Irkutsk State University, Irkutsk, 664003, Russian Federation, srochko@math.isu.ru

Alexander V. Arguchintsev, Dr. Sci. (Phys.Math.), Prof., Irkutsk State University, Irkutsk, 664003, Russian Federation, arguch@math.isu.ru, https://orcid.org/0000-0002-9314-485X

Поступила в редакцию / Received 31.03.2024
Поступила после рецензирования / Revised 27.05.2024
Принята к публикации / Accepted 30.05.2024