Серия «Математика»
2023. Т. 45. С. 73—88

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

Научная статья

УДК 517.955, 519.213
MSC 35K05, 60G51
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.73

Стохастические уравнения и уравнения для вероятностных характеристик процессов с затухающими скачками

И. В. Мельникова[1✉], **В. А. Бовкун**[1]

[1] Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Российская Федерация
✉ Irina.Melnikova@urfu.ru

Аннотация. Представлена общая формулировка процессов типа дробового шума, получено соответствующее процессу стохастическое дифференциальное уравнение и построена связь с уравнением в частных производных для плотности переходной вероятности, которое следует рассматривать в пространствах обобщенных функций. Кроме того, рассмотрено стохастическое уравнение, допускающее наряду со скачкообразным изменением, описываемым процессом типа дробого шума, и непрерывное изменение процесса. Для плотности переходной вероятности процесса, содержащего скачкообразные и непрерывные типы эволюции, получено уравнение, которое также следует рассматривать в пространствах обобщенных функций. Таким образом, основные результаты работы получены на базе техники стохастического анализа и теории обобщенных функций.

Ключевые слова: винеровский процесс, дробовой шум, стохастическое дифференциальное уравнение, вероятностные характеристики, обобщенные функции

Благодарности: Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда № 23-21-00199.

Ссылка для цитирования: Мельникова И. В., Бовкун В. А. Стохастические уравнения и уравнения для вероятностных характеристик процессов с затухающими скачками // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2023. Т. 45. С. 73–88.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.73

Research article

Stochastic Equations and Equations for Probabilistic Characteristics of Processes with Damped Jumps

Irina V. Melnikova[1✉], **Vadim A. Bovkun**[1]

[1] Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation
✉ Irina.Melnikova@urfu.ru

Abstract. Processes such as shot noise are an adequate tool for modeling discontinuous random processes with a damping effect. Such processes arise in various fields of physics, technology and human activity, including the field of finance. They allow to simulate not only abrupt changes in the values of processes with jumps, but also the subsequent return of values to their original or near the original position. For this reason, shot noise is a suitable tool for simulating price hikes of various market assets. This paper presents a general formulation of the shot noise type processes, a stochastic differential equation corresponding to the process, and a connection with the integral-differential equation for the transition probability density, which is formulated in terms of generalized functions. In addition, the paper considers a stochastic equation that allows, along with an abrupt change described by a process of the shot noise type, a continuous change in the process. An equation is obtained for the transition probability density of a process containing jump-like and continuous types of evolution, which should also be considered in spaces of generalized functions. Thus, main results of the paper are obtained on the basis of the application of stochastic analysis and the theory of generalized functions.

Keywords: Wiener process, shot noise, stochastic differential equation, probabilistic characteristics, generalized functions

Acknowledgements: This work was supported by Russian Science Foundation, project No. 23–21–00199.

For citation: Melnikova I. V., Bovkun V. A. Stochastic Equations and Equations for Probabilistic Characteristics of Processes with Damped Jumps. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2023, vol. 45, pp. 73–88. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2023.45.73

1. Введение

В последнее время, понимая вероятностную природу изменения процессов в сфере финансов, компании наряду с точечной по времени оценкой рисков стали использовать наборы сценариев так называемых траекторий развития событий. Важной составляющей в моделировании здесь является изучение динамики случайных процессов на базе построения стохастических уравнений и уравнений для их вероятностных характеристик. Получаемая на финансовых рынках информация часто становится неожиданностью. Это приводит к резким изменениям цен на акции и другие ценные бумаги, что, в свою очередь, приводит к необходимости корректировки инвестиционных портфелей. Например, скачок цены вверх может привести к росту прибыли, в то время как скачок вниз может подтолкнуть инвесторов к покупке новых активов. Учитывая, что с течением времени влияние скачка на цену актива полностью или частично исчезает, наиболее подходящими для описания таких процессов являются процессы дробового шума.

Классическим подходом к включению скачков в модель цены акций является использование моделей jump-diffusion , в которых цена следует за процессом диффузии, прерываемым скачками, влияние которых со временем не ослабевает (подробнее см. [8]). Процесс дробового шума, содержащий процесс затухания, является более гибким по сравнению с процессами, не имеющими такого свойства. Эффект дробового шума в физике и технике был описан еще в начале XX в. Применения дробового шума для моделирования финансовых инструментов и различных явлений в физике, популяционной динамике, социальной сфере см., например, [5; 7; 10; 11]. Несмотря на широкое применение процесса дробового шума в моделировании эффекта скачков с затуханием, с точки зрения обоснования используемого математического аппарата такие процессы изучены в меньшей степени по сравнению с непрерывными процессами, содержащими броуновское движение, и процессами Пуассона, имеющими скачки случайного размера без эффекта затухания.

В настоящей работе основное внимание уделено использованию процесса дробового шума в общем виде для моделирования скачков цены акций. А именно, в разд. 2 построено стохастическое дифференциальное уравнение для цены акций, изменение которой имеет скачкообразный характер с эффектом затухания. На базе связи стохастических дифференциальных уравнений с уравнениями для вероятностных характеристик (см., например, [2–4]) в разд. 3 получено интегро-дифференциальное уравнение для плотности переходной вероятности, обоснованное в пространствах обобщенных функций. В разд. 4 построено стохастическое уравнение для цены акций, изменение которой характеризуется двумя типами процессов, обладающих непрерывными и скачкообразными с эффектом затухания траекториями, а также получено соответствующее уравнение для плотности переходной вероятности. Отметим, что роль связи между стохастическими уравнениями и уравнениями для их вероятностных храктеристик является важной в обоих направлениях, в частности, в численных расчетах уравнений для характеристик через соответствующие стохастические уравнения (см., например, [9]).

2. Модель скачкообразного поведения цены акции

Рассмотрим характерные черты скачкообразного поведения цены акции типа дробового шума. Появление в информационном пространстве нестандартных новостей приводит к скачкам цены акций на фондовом рынке. Предположим, что все новости дают скачок цены одинаковой формы, но с разной временной задержкой. При этом каждый скачок постепенно компенсируется со временем. В таких предположениях $I = \{I(t), t \geq 0\}$ — процесс изменения цены акций — может быть представлен следующим образом:

$$I(t) = \sum_{t_k} g(t - t_k),\ t \geq 0,$$

где функции $g(t - t_k)$ отражают изменение цены под влиянием информации, появившейся в случайные моменты времени t_k. При этом будем считать известным среднее число изменений в единицу времени. Кроме того, заложим в модель выполнение следующих условий:

1. Стационарность: для любой конечной группы непересекающихся промежутков времени вероятность наступления определенного числа событий на протяжении каждого из промежутков зависит только от этого числа и от длительности промежутка времени.

2. Отсутствие последействия: вероятность наступления событий в течение промежутка времени $[t, t + \tau)$ не зависит от того, сколько раз и как появлялись события ранее. Это означает, что условная вероятность появления событий за промежуток времени $[t, t + \tau)$ совпадает с безусловной вероятностью.

3. Ординарность: если $P_{>1}(\Delta t)$ — это вероятность появления более чем одного события за промежуток времени Δt, то $P_{>1}(\Delta t) = o(\Delta t)$.

Из стационарности, в частности, следует что вероятность появления k событий в течение промежутка времени от t до $t + \tau$ не зависит от t и является функцией только от k и τ. Отсутствие последействий означает взаимную независимость появления того или иного числа событий в непересекающиеся промежутки времени.

Обозначим через $P_n(t)$ вероятность появления n скачков цены акций, которые возникают до момента времени t. При выполнении условий 1–3 рассматриваемая модель количества скачков цены за промежуток времени от ноля до t имеет пуассоновское распределение [1]:

$$P_n(t) = P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \tag{2.1}$$

где $N(t)$ следует рассматривать как число появлений информации, приводящей к скачку цены на рынке к моменту t, $N(0) = 0$.

Случайный процесс $\mu(t)$ формально определим как производную от $N(t)$, которая равна нулю всюду, за исключением тех моментов, когда $N(t)$ увеличивается на единицу, т. е. $\mu(t)$ является суммой дельта-функций: $\mu(t) = \sum_k \delta(t-t_k)$, где t_k — моменты появления информации на рынке, которые приводят к скачкам цены. Случайный процесс цены акций $I(t)$ можно рассматривать как действие функционала μ на функцию g. Запишем его условно, как это принято в физических и экономических моделях, в виде интеграла

$$I(t) = \langle g(t-\cdot), \mu(\cdot)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-\tau)\mu(\tau)d\tau = (g*\mu)(t),\ t \geq 0. \quad (2.2)$$

Согласно модели ограничения на функцию $g = g(t), t \in \mathbb{R}$, состоят в том, что она равна нулю при $t \leq 0$ и интегрируема на бесконечности. Первое означает, что скачки отсутствуют до появления информации, а второе — что эффект каждого скачка угасает со временем, поскольку информация устаревает и ее влияние на цену стремится к нулю. Далее воспользуемся для простоты формой функции g, часто встречающейся в таких моделях и удовлетворяющей перечисленным условиям:

$$g(t) = qe^{-\alpha t},\ t \geq 0; \quad g(t) = 0,\ t < 0; \quad \alpha > 0.$$

Тогда равенство (2.2) принимает следующий вид:

$$I(t) = \int_{-\infty}^{t} qe^{-\alpha(t-\tau)}\frac{dN(\tau)}{d\tau}d\tau = \int_0^t qe^{-\alpha(t-\tau)}\frac{dN(\tau)}{d\tau}d\tau. \quad (2.3)$$

Утверждение 1. *Процесс цены акций $\{I(t), t \geq 0\}$, определяемый равенством (2.3), удовлетворяет стохастическому уравнению*

$$I(t) = -\alpha\int_0^t I(s)ds + qN(t),\ t > 0. \quad (2.4)$$

Доказательство. Продифференцируем это равенство, задаваемое на подходящем пространстве основных функций, по временному параметру t:

$$\frac{dI(t)}{dt} = \left[qe^{-\alpha(t-\tau)}\frac{dN(\tau)}{d\tau}\right]_{\tau=t} + \int_0^t (-\alpha q)e^{-\alpha(t-\tau)}\frac{dN(\tau)}{d\tau}d\tau.$$

Отсюда для $I(t)$ получаем стохастическое уравнение с нулевым начальным условием, со сдвигом и флуктуационной составляющей $q\mu(t)$:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\alpha I(t) + q\mu(t),\ t > 0, \quad I(0) = 0. \quad (2.5)$$

Представим уравнение (2.5), как это принято в стохастическом анализе, в интегральном виде. Тогда, учитывая начальные условия, получаем уравнение (2.4), которое на отрезке $[t, t+\Delta t]$ принимает вид

$$I(t+\Delta t) - I(t) = -\alpha\int_t^{t+\Delta t} I(s)ds + q\left(N(t+\Delta t) - N(t)\right). \quad (2.6)$$

$\square$

3. Уравнение для плотности переходной вероятности

Теперь займемся исследованием уравнений для вероятностных характеристик, соответствующих процессу, определяемому стохастическими уравнениями (2.5)–(2.6). Как показано в [4], в случае воздействия случайных возмущений (с непрерывными и скачкообразными траекториями) коэффициенты A, B и G прямого интегро-дифференциального уравнения для плотности переходной вероятности $p(t,z;\tau,x)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}p(t,z;\tau,x) = \frac{\partial}{\partial x}\big[A(\tau,x)p(t,z;\tau,x)\big] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big[B(\tau,x)p(t,z;\tau,x)\big] \\ + \int\big[G(\tau,y;x)p(t,z;\tau,y) - G(\tau,x;y)p(t,z;\tau,x)\big]dy,\end{aligned} \quad (3.1)$$

определяются следующими пределами: для любого $\varepsilon > 0$

$$m_1 := \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|x-z|<\varepsilon}(x-z)p(t,z;t+\Delta t,x)\,dx = A(t,z) + O(\varepsilon), \quad (3.2)$$

$$m_2 := \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\int_{|x-z|<\varepsilon}(x-z)^2p(t,z;t+\Delta t,x)\,dx = B(t,z) + O(\varepsilon), \quad (3.3)$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p(t,z;t+\Delta t,x)}{\Delta t} = G(t,z;x) \text{ при } |x-z| \geq \varepsilon. \quad (3.4)$$

Здесь $p(t,z;t+\Delta t,x)$ — плотность переходной вероятности от значения z в момент времени t к значению x в момент времени $t+\Delta t$.

Покажем, что для вероятностных характеристик процесса, определяемого полученными стохастическими уравнениями (2.5)–(2.6), следует существование (в обобщенном смысле) пределов (3.2)–(3.4).

Утверждение 2. *На основных непрерывно дифференцируемых функциях φ для плотности переходной вероятности процесса $\{I(t), t \geq 0\}$ имеет место уравнение*

$$\begin{aligned}\langle\varphi(x), \frac{\partial}{\partial\tau}p(t,z;\tau,x)\rangle = \langle\varphi(x), -\frac{\partial}{\partial x}(\alpha x p(t,z;\tau,x))\rangle \\ + \langle\varphi(x), -\lambda p(t,z;\tau,x) + \lambda p(t,z;\tau,x-q)\rangle.\end{aligned} \quad (3.5)$$

Доказательство. Решение уравнения (2.5) определяется следующим образом:

$$I(s) = I(0)e^{-\alpha s} + q\int_0^s e^{-\alpha(s-\tau)}dN(\tau), \ s \geq 0.$$

На отрезке $[t, t+\Delta t]$ имеем

$$I(s) = I(t)e^{-\alpha(s-t)} + q\int_t^s e^{-\alpha(s-\tau)}dN(\tau), \ t \leq s \leq t+\Delta t. \quad (3.6)$$

Для нахождения предела (3.2) запишем следующее равенство:

$$m_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}\big[I(t+\Delta t) - I(t)\big|\, |I(t+\Delta t) - I(t)| < \varepsilon\big], \tag{3.7}$$

где $z = I(t), x = I(t+\Delta t)$. В силу равенства (2.6) получаем, что предел в правой части (3.7) равен сумме пределов

$$m_1 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-\alpha}{\Delta t} \mathbb{E}\left[\int_t^{t+\Delta t} I(s)ds \Big|\, |I(t+\Delta t) - I(t)| < \varepsilon\right]$$
$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q}{\Delta t} \mathbb{E}\left[N(t+\Delta t) - N(t) \Big|\, |I(t+\Delta t) - I(t)| < \varepsilon\right]$$

и равен $-\alpha z + O(\varepsilon)$. Действительно, во втором слагаемом предел равен нулю, так как вероятность появления скачка при условии $|I(t+\Delta t) - I(t)| < \varepsilon$ и $\Delta t \to 0$ равна нулю при малых ε ($\varepsilon < q$). Используя равенство (3.6), для первого слагаемого получаем следующее представление:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{-\alpha}{\Delta t} \mathbb{E}\left[\int_t^{t+\Delta t} z e^{-\alpha(s-t)} ds \Big|\, |I(t+\Delta t) - I(t)| < \varepsilon\right]$$
$$+ \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-\alpha}{\Delta t} \mathbb{E}\left[q \int_t^{t+\Delta t} \left(\int_t^s e^{-\alpha(s-\tau)} dN(\tau)\right) ds \Big|\, |I(t+\Delta t) - I(t)| < \varepsilon\right].$$

Здесь под знаком первого интеграла стоит непрерывная детерминированная величина $ze^{-\alpha(s-t)}$, независимая от изменения $I(s)$. Под знаком внешнего интеграла во втором слагаемом стоит случайная величина, вероятность наступления которой порядка Δt при $\Delta t \to 0$. Окончательно получаем равенство $A(t,z) = -\alpha z + O(\varepsilon)$.

Для нахождения предела (3.3) по аналогии со случаем (3.2) запишем интеграл по области $|x - z| < \varepsilon$ с помощью математического ожидания с условием $|I(t+\Delta t) - I(t)| < \varepsilon$:

$$m_2 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}\big[(I(t+\Delta t) - I(t))^2\big|\, |I(t+\Delta t) - I(t)| < \varepsilon\big].$$

В силу представлений (2.6) и (3.6) этот предел равен следующему пределу:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}\Bigg[\Bigg(- \alpha \int_t^{t+\Delta t} \left(z e^{-\alpha(s-t)} + q \int_t^s e^{-\alpha(s-\tau)} dN(\tau)\right) ds$$
$$+ q(N(t+\Delta t) - N(t))\Bigg)^2 \Big|\, |I(t+\Delta t) - I(t)| < \varepsilon\Bigg].$$

Математическое ожидание от слагаемых, содержащих приращение процесса $N(t)$, равно нулю, потому что вероятность появления скачка при условии $|I(t+\Delta t)-I(t)|<\varepsilon$ и $\Delta t\to 0$ в случае малых ε равна нулю. При возведении в квадрат математическое ожидание от получаемых интегральных слагаемых имеет порядок не ниже $(\Delta t)^2$, следовательно, пределы от этих слагаемых равны нулю. Отсюда следует равенство $B(t,z)=O(\varepsilon)$.

Для нахождения предела (3.4) запишем решение при $s=t+\Delta t$:

$$I(t+\Delta t)=I(t)e^{-\alpha\Delta t}+q\int_t^{t+\Delta t}e^{-\alpha(t+\Delta t-\tau)}dN(\tau)$$

и представим интеграл по процессу Пуассона в виде (конечной) суммы скачков за промежуток времени $[t,t+\Delta t)$:

$$I(t+\Delta t)=ze^{-\alpha\Delta t}+q\sum e^{-\alpha(t+\Delta t-t_k)}(N(t_{k+1})-N(t_k)). \tag{3.8}$$

Рассмотрим функции распределения и плотности переходной вероятности каждого слагаемого. Для первого (детерминированного) слагаемого функция распределения F_ξ, где $\xi=ze^{-\alpha\Delta t}$, имеет вид

$$F_\xi(y)=\begin{cases}0, & y\le ze^{-\alpha\Delta t},\\ 1, & y>ze^{-\alpha\Delta t}.\end{cases}$$

Тогда соответствующая плотность $p_\xi(y)=\delta(y-ze^{-\alpha\Delta t})$. Теперь рассмотрим функцию распределения и плотность переходной вероятности второго слагаемого в равенстве (3.8). При $\Delta t\to 0$ из условия $t_k\in[t,t+\Delta t)$ следует, что функция $e^{-\alpha(t+\Delta t-t_k)}$ стремится к единице и $1-e^{-\alpha(t+\Delta t-t_k)}=O(\Delta t)$. Учитывая, что вероятность скачка процесса $\Delta t(N(t+\Delta t)-N(t))$ равна $o(\Delta t)$, получим, что функция распределения второго слагаемого при $\Delta t\to 0$ ведет себя как функция распределения F_θ случайного процесса $\theta(t):=q(N(t+\Delta t)-N(t))$, которую в силу (2.1) можем записать следующим образом:

$$F_\theta(y)=\sum_{k=0}^{d_q}e^{-\lambda\Delta t}\frac{(\lambda\Delta t)^k}{k!}, \tag{3.9}$$

где $d_q=[y/q]$ — целая часть числа y/q при нецелом y/q и $d_q=y/q-1$ при целом y/q. Тогда соответствующая ей плотность распределения процесса $\theta(t),t\ge 0$ имеет вид

$$p_\theta(y)=\sum_{k=0}^{d_q}\delta(y-qk)e^{-\lambda\Delta t}\frac{(\lambda\Delta t)^k}{k!}. \tag{3.10}$$

Плотность переходной вероятности случайного процесса $I(t+\Delta t)$, определяемого равенством (3.8), равна свертке плотностей, составляющих его двух независимых процессов. Учитывая, что мы рассматриваем плотность переходной вероятности от точки z в момент времени t к точке x в момент времени $t + \Delta t$, при условии $|x - z| \geq \varepsilon$ $(\varepsilon < q)$ получаем

$$G(t,z;x)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\delta(x+z-ze^{-\alpha\Delta t})*\sum_{k=0}^{\hat{d}_q}\delta(x-z-qk)e^{-\lambda\Delta t}\frac{(\lambda\Delta t)^k}{k!}\right],$$

где $\hat{d}_q = [(x-z)/q]$ — целая часть числа $(x-z)/q$ при нецелом $(x-z)/q$ и $\hat{d}_q = (x-z)/q - 1$ при целом $(x-z)/q$. После деления на Δt полученной справа суммы δ-функций, в которой только первое слагаемое порядка Δt, а остальные слагаемые имеют более высокий порядок малости, по сравнению с Δt, и предельного перехода при $\Delta t \to 0$ получаем равенство $G(t,z;x) = \delta(x) * \lambda\delta(x-z-q)$. Поскольку входящие в свертку обобщенные функции имеют компактные носители заключаем, что $G(t,z;x)$ существует и определяется следующим равенством: $G(t,z;x) = \lambda\delta(x-z-q)$.

Таким образом, найдены значения трех пределов (3.2)–(3.4) и можно формально записать уравнение (3.1) для плотности переходной вероятности с найденными коэффициентами:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\tau}p(t,z;\tau,x) &= -\frac{\partial}{\partial x}(\alpha x p(t,z;\tau,x))\\ &+\int[\lambda\delta(x-y-q)p(t,z;\tau,y)-\lambda\delta(y-x-q)p(t,z;\tau,x)]dy.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Поскольку в общем случае произведение обобщенных функций не определено, чтобы придать смысл полученному равенству (3.11), запишем это равенство как действие функционала на непрерывно дифференцируемую функцию φ, используемую в качестве основной функции:

$$\begin{aligned}\int\varphi(x)\frac{\partial}{\partial\tau}p(t,z;\tau,x)dx &= \int\varphi(x)\Big[-\frac{\partial}{\partial x}(\alpha x p(t,z;\tau,x))\\ &+\int[\lambda\delta(x-y-q)p(t,z;\tau,y)-\lambda\delta(y-x-q)p(t,z;\tau,x)]dy\Big]dx.\end{aligned}$$

Поменяв порядок интегрирования, получаем уравнение

$$\begin{aligned}\int\varphi(x)\frac{\partial}{\partial\tau}p(t,z;\tau,x)dx = \int\varphi(x)\Big[-\frac{\partial}{\partial x}(\alpha x p(t,z;\tau,x))-\lambda p(t,z;\tau,x)\Big]dx\\ +\lambda\int\varphi(y+q)p(t,z;\tau,y)dy.\end{aligned}$$

Таким образом, на основных непрерывно дифференцируемых функциях φ с ограниченными носителями на $[0,\infty)$ имеет место равенство (3.5). $\square$

4. Уравнение для вероятностных характеристик процесса с непрерывными и скачкообразными случайными возмущениями

Здесь рассмотрим поведение процесса с непрерывным возмущением типа броуновского движения и со скачкообразным возмущением типа дробового шума. Начнем со стохастического уравнения, определяющего такой процесс.

Стохастическое уравнение для непрерывного процесса $\{X(t), t \geq 0\}$ под воздействием аддитивного броуновского движения $\{W(t), t \geq 0\}$ имеет следующий вид:

$$X(t) - X(0) = \int_0^t \sigma(s)dW(s), \ t \geq 0. \tag{4.1}$$

Учитывая (4.1) и уравнение (2.4), получаем стохастическое дифференциальное уравнение для процесса $S = \{S(t), t \geq 0\}$, определяемого действием броуновского движения, непрерывного случайного возмущения, и разрывного случайного возмущения типа дробового шума:

$$\begin{aligned} S(t+\Delta t) - S(t) = -\alpha \int_t^{t+\Delta t} S(s)ds + \int_t^{t+\Delta t} \sigma(s)dW(s) \\ + \int_t^{t+\Delta t} q(s)dN(s), \ t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь $\sigma(s)$ и $q(s) \geq q_0 > 0, s \geq 0$, являются непрерывными ограниченными функциями.

Теперь найдем соответствующее уравнению (4.2) уравнение для плотности переходной вероятности процесса S. С этой целью покажем, что для процесса S существуют пределы (3.2)–(3.4).

Теорема 1. *На основных непрерывно дифференцируемых функциях φ для плотности переходной вероятности процесса S имеет место уравнение*

$$\begin{aligned} \langle \varphi(x), \frac{\partial}{\partial \tau} p(t,z;\tau,x) \rangle = \langle \varphi(x), \frac{\partial}{\partial x}(\alpha x\, p(t,z;\tau,x)) + \frac{\sigma^2(t)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(t,z;\tau,x) \rangle \\ + \langle \varphi(x), \lambda p(t,z;\tau,x-q(t)) \rangle - \langle \varphi(x), \lambda p(t,z;\tau,x) \rangle. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Доказательство. По аналогии с решением обыкновенных дифференциальных уравнений запишем решение уравнения (4.2):

$$S(s) = S(t)e^{-\alpha(s-t)} + \int_t^s \sigma(\tau)e^{-\alpha(s-\tau)}dW(\tau) + \int_t^s q(\tau)e^{-\alpha(s-\tau)}dN(\tau). \tag{4.4}$$

Доказательство этого факта проведем с помощью формулы Ито (см., например, [3]). А именно, рассмотрим функцию $f(S(t),t) = S(t)e^{\alpha t}$, тогда

$$df(S(t),t) = \alpha S(t)e^{\alpha t}dt + e^{\alpha t}dS(t). \tag{4.5}$$

Запишем стохастическое уравнение (4.2) в форме дифференциалов

$$dS(t) = -\alpha S(t)dt + \sigma(t)dW(t) + q(t)dN(t).$$

Подставим его в равенство (4.5) и получим уравнение

$$df(S(t),t) = e^{\alpha t}\sigma(t)dW(t) + e^{\alpha t}q(t)dN(t). \tag{4.6}$$

После интегрирования равенства (4.6) по интервалу от t до s и деления обеих частей на $e^{\alpha s}$ получаем представление (4.4). Теперь используем равенство (4.4) для того, чтобы найти пределы (3.2)–(3.4). Для нахождения предела (3.2) получаем следующее выражение

$$\begin{aligned} m_1 &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\mathbb{E}\big[S(t+\Delta t)-S(t)\big|\,|S(t+\Delta t)-S(t)|<\varepsilon\big] \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\alpha}{\Delta t}\mathbb{E}\left[\int_t^{t+\Delta t}S(s)ds\bigg|\,|S(t+\Delta t)-S(t)|<\varepsilon\right] \\ &+ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\mathbb{E}\left[\int_t^{t+\Delta t}\sigma(s)dW(s)\bigg|\,|S(t+\Delta t)-S(t)|<\varepsilon\right] \\ &+ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\mathbb{E}\left[\int_t^{t+\Delta t}q(s)dN(s)\bigg|\,|S(t+\Delta t)-S(t)|<\varepsilon\right]. \end{aligned}$$

Покажем, что сумма этих пределов при малых ε существует и равна $-\alpha z$, пределу первого слагаемого. Третье слагаемое равно нулю, так как вероятность появления скачка при условии $|S(t+\Delta t)-S(t)|<\varepsilon$ и $\Delta t\to 0$ равна нулю при малых ε, следовательно, математическое ожидание приращения процесса $N(t)$ равно нулю. Второе слагаемое тоже равно нулю как математическое ожидание приращения броуновского движения. Рассмотрим подробнее первое слагаемое, подставив в него решение стохастического дифференциального уравнения (4.4):

$$\begin{aligned} m_1 &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\alpha}{\Delta t}\mathbb{E}\left[\int_t^{t+\Delta t}ze^{-\alpha(s-t)}ds\bigg|\,|S(t+\Delta t)-S(t)|<\varepsilon\right] \\ &+ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\alpha}{\Delta t}\mathbb{E}\left[\int_t^{t+\Delta t}\left(\int_t^s e^{-\alpha(s-\tau)}\sigma(\tau)dW(\tau)\right)ds\bigg|\,|S(t+\Delta t)-S(t)|<\varepsilon\right] \\ &+ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{-\alpha}{\Delta t}\mathbb{E}\left[\int_t^{t+\Delta t}\left(\int_t^s e^{-\alpha(s-\tau)}q(\tau)dN(\tau)\right)ds\bigg|\,|S(t+\Delta t)-S(t)|<\varepsilon\right]. \end{aligned}$$

Под знаком первого интеграла стоит непрерывная детерминированная величина $ze^{-\alpha(s-t)}$, независимая от изменения $S(t)$. Предел первого слагаемого от этой величины равен $-\alpha z$. Второй интеграл равен нулю по свойству математического ожидания от интеграла по броуновскому движению. Под знаком внешнего интеграла в третьем слагаемом стоит случайная величина, вероятность наступления которой порядка Δt, следовательно, при $\Delta t \to 0$ третье слагаемое стремится к нулю. Получили, что предел (3.2) при малых ε равен $-\alpha z$.

Предел (3.3) аналогичным образом сводится к следующему пределу:

$$m_2 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}\big[(S(t+\Delta t) - S(t))^2 \big| |S(t+\Delta t) - S(t)| < \varepsilon\big].$$

Подставляя в него приращение процесса (4.2), получаем равенство

$$m_2 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}\Bigg[\bigg(-\alpha \int_t^{t+\Delta t} S(s)ds + \int_t^{t+\Delta t} \sigma(s)dW(s) \\ + \int_t^{t+\Delta t} q(s)dN(s)\bigg)^2 \bigg| |S(t+\Delta t) - S(t)| < \varepsilon\Bigg].$$

Математическое ожидание от слагаемых, содержащих приращение процесса $N(t)$, равны нулю, поскольку вероятность появления скачка при условии $|S(t+\Delta t) - S(t)| < \varepsilon$ и $\Delta t \to 0$ равна нулю. При возведении в квадрат математическое ожидание от получаемых интегральных слагаемых имеет порядок не ниже $(\Delta t)^2$, поэтому пределы от этих слагаемых тоже равны нулю. Рассмотрим подробнее оставшиеся слагаемые, содержащие интегралы Ито по броуновскому движению $W(t)$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}\left[-\alpha \int_t^{t+\Delta t} S(s)ds \int_t^{t+\Delta t} \sigma(s)dW(s) \big| |S(t+\Delta t) - S(t)| < \varepsilon\right] \\ + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}\left[\int_t^{t+\Delta t} \sigma(s)dW(s) \int_t^{t+\Delta t} q(s)dN(s) \big| |S(t+\Delta t) - S(t)| < \varepsilon\right] \\ + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}\left[\left(\int_t^{t+\Delta t} \sigma(s)dW(s)\right)^2 \big| |S(t+\Delta t) - S(t)| < \varepsilon\right].$$

Первые два слагаемые в полученном равенстве равны нулю по свойству математического ожидания от интеграла по броуновскому движению. Рассмотрим последнее слагаемое. Из свойств интеграла по броуновскому движению получим, что предел (3.3) при малых ε равен

$$m_2 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \mathbb{E}\left[\left(\int_t^{t+\Delta t} \sigma(s)dW(s)\right)^2 \big| |S(t+\Delta t) - S(t)| < \varepsilon\right] = \sigma^2(t).$$

Теперь найдем предел (3.4). Для этого запишем вид решения (4.4) при $s = t + \Delta t$:

$$\begin{aligned} S(t+\Delta t) = ze^{-\alpha\Delta t} + \int_t^{t+\Delta t} e^{-\alpha(t+\Delta t-\tau)}\sigma(\tau)dW(\tau) \\ + \int_t^{t+\Delta t} e^{-\alpha(t+\Delta t-\tau)}q(\tau)dN(\tau). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Для первого слагаемого, как показано в разд. 3, плотность распределения вероятностей имеет вид $p(y) = \delta(y - ze^{-\alpha\Delta t})$. Для второго слагаемого при малых Δt плотность распределения имеет вид: $p(y) = \dfrac{1}{\sigma(t)\sqrt{2\pi\Delta t}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2(t)\Delta t}}$. Теперь переходим к третьему слагаемому. Пусть θ — случайный процесс, определяемый равенством $\theta(\Delta t) = \displaystyle\int_t^{t+\Delta t} q(\tau)e^{-\alpha(t+\Delta t-\tau)}dN(\tau)$ при фиксированном $t \geq 0$. Представим интеграл по приращению процесса Пуассона в виде суммы

$$\theta(\Delta t) = \sum_{t\leq\tau_k\leq t+\Delta t} q(\tau_k)e^{-\alpha(t+\Delta t-\tau_k)}(N(\tau_{k+1}) - N(\tau_k)),$$

где τ_k — моменты появления скачков. Чтобы найти плотность $p_\theta(y)$ процесса θ, сначала предположим, что $q(t) \equiv q$. В этом случае в силу (2.1) функции распределения и плотности распределения определяются формулами (3.9) и (3.10). Переходная плотность вероятности из состояния z в момент времени t в состояние x в момент времени $t + \Delta t$ для всего случайного процесса $S(t + \Delta t)$ в равенстве (3.4) равна свертке плотностей, составляющих его трех независимых процессов. Учитывая, что мы рассматриваем плотность переходной вероятности от z в момент времени t к x в момент времени $t + \Delta t$, получаем

$$\begin{aligned} G(t,z;x) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\Bigg[\delta(x - ze^{-\alpha\Delta t}) * \frac{1}{\sigma(t)\sqrt{2\pi\Delta t}}e^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma^2(t)\Delta t}} \\ * \sum_{k=0}^{\left[\frac{x-z}{q}\right]} \delta(x - z - qk)e^{-\lambda\Delta t}\frac{(\lambda\Delta t)^k}{k!}\Bigg]. \end{aligned}$$

Сделаем замену переменной $x - z = r$. Тогда при $\Delta t \to 0$ первый и второй элементы свертки ведут себя как $\delta(r)$. Рассмотрим третий элемент свертки, деленный на Δt. Предел первого слагаемого рассматриваемой суммы равен $\lambda\delta(r - q)$, остальные слагаемые имеют более высокий порядок малости, по сравнению с Δt, отсюда следует

$$G(t,z;z+r) = \delta(r) * \delta(r) * \lambda\delta(r-q) = \lambda\delta(r-q).$$

Сделав обратную замену переменных, получаем $G(t,z;x) = \lambda\delta(x-z-q)$.

В случае, когда $q(t)$ — непрерывная функция, аналогичные рассуждения приводят к равенству $G(t,z;x) = \lambda\delta(y-z-q(t))$.

В итоге вычисления всех трех пределов получаем:

$$A(t,z) = -\alpha z, \quad B(t,z) = \sigma^2(t), \quad G(t,z;x) = \lambda\delta(x-z-q(t)). \tag{4.8}$$

Запишем уравнение (3.1), используя полученные значения (4.8):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\tau}p(t,z;\tau,x) = -\frac{\partial}{\partial x}\big[\alpha x p(t,z;\tau,x)\big] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\big[\sigma^2(t)p(t,z;\tau,x)\big] \\ &+ \int [\lambda\delta(x-y-q(t))p(t,z;\tau,y) - \lambda\delta(y-x-q(t))p(t,z;\tau,x)]dy. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Поскольку коэффициент G является обобщенной функцией, уравнение (4.9) следует рассматривать на пространстве непрерывно дифференцируемых функций φ. Запишем на основных функциях первое интегральное слагаемое в правой части (4.9). После применения функционала $\delta(x-y-q(t))$ к функции $\varphi(x)$ получаем

$$\int \varphi(x)\Big[\int \lambda\delta(x-y-q(t))p(t,z;\tau,y)dy\Big]dx = \lambda\int \varphi(y+q(t))p(t,z;\tau,y)dy.$$

После замены переменных по формуле $x = y + q(t)$ получаем

$$\int \varphi(x)\Big[\int \lambda\delta(x-y-q(t))p(t,z;\tau,y)dy\Big]dx = \lambda\int \varphi(x)p(t,z;\tau,x-q(t))dx.$$

Теперь, учитывая свойства δ-функции, для второго интегрального слагаемого в (4.9) получаем

$$\int \varphi(x)\Big[\int \lambda\delta(y-x-q(t))p(t,z;\tau,x)dy\Big]dx = \lambda\int \varphi(x)p(t,z;\tau,x)dx.$$

Окончательно интегро-дифференциальное уравнение (4.9) для плотности переходной вероятности процесса S на основных функция φ принимает вид (4.3). $\square$

Таким образом, получено уравнение для плотности переходной вероятности процесса под действием непрерывных и скачкообразных случайных возмущений с учетом затухания.

Список источников

1. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М. : Едиториал УРСС, 2005. 448 с.

2. Мельникова И. В., Алексеева У. А., Бовкун В. А. Уравнения, связанные со случайными процессами: полугрупповой подход и преобразование Фурье // Современная математика. Фундаментальные направления. 2021. Т. 67, № 2. С. 324–348. https://doi.org/10.22363/2413-3639-2021-67-2-324-348
3. Applebaum D. Levy Processes and Stochastic Calculus. Cambridge, Cambridge University Press, 2009. 492 p. https://doi.org/10.1017/CBO9780511809781
4. Gardiner C. Stochastic Methods. A Handbook for the Natural and Social Sciences. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2009. 447 p.
5. Ghobanov G. Modeling financial asset returns with shot noice processes // Mathematical and Computer Modelling. 1999. Vol. 29. P. 17–21. https://doi.org/10.1016/S0895-7177(99)00089-8
6. Numerical methods for Levy processes / N. Hilber, N. Reich, C. Winter, C. Schwab // Finance Stoch. 2009. Vol. 13. P. 471–500. https://doi.org/10.1007/s00780-009-0100-5
7. Kobayashi K., Hashisaki M. Shot Noise in Mesoscopic Systems: from Single Particles to Quantum Liquids // Journal of the Physical Society of Japan. 2021. Vol. 90, N 10. https://doi.org/10.7566/JPSJ.90.102001
8. Merton R. Theory of rational option pricing // The Bell Journal of Economics and Management Science. 1973. Vol. 4. P. 141–183.
9. Milshtein G. N., Tretyakov M. V. Stochastic Numerics for Mathematical Physics. Berlin ; Heidelberg : Springer-Verlag, 2004. 596 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-10063-9
10. Samorodnitsky G. A. Class of shot noise models for financial applications // Stochastic processes and their applications. 1995. Vol. 59. P. 217–233.
11. Torrisi G. L., Leonardi E. Asymptotic analysis of Poisson shot noise processes, and applications // Stochastic Processes and their Applications. 2022. Vol. 144. P. 229–270. https://doi.org/10.1016/j.spa.2021.11.008

References

1. Gnedenko B.V. *Probability theory course.* Moscow, Editorial URSS Publ., 2005. (in Russian)
2. Melnikova I.V., Alekseeva U.A., Bovkun V.A. Equations related to stochastic processes: semigroup approach and Fourier transform. *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2021, vol. 67, no. 2, pp. 324–348. https://doi.org/10.22363/2413-3639-2021-67-2-324-348(in Russian)
3. Applebaum D. *Levy Processes and Stochastic Calculus.* Cambridge, Cambridge University Press, 2009. https://doi.org/10.1017/CBO9780511809781
4. Gardiner C. *Stochastic Methods. A Handbook for the Natural and Social Sciences.* Berlin, Springer-Verlag, 2009.
5. Ghobanov G. Modeling financial asset returns with shot noice processes. *Mathematical and Computer Modelling*, 1999, vol. 29, pp. 17–21. https://doi.org/10.1016/S0895-7177(99)00089-8
6. Hilber N., Reich N., Winter C., Schwab C. Numerical methods for Levy processes. *Finance Stoch*, 2009, vol. 13, pp. 471–500. https://doi.org/10.1007/s00780-009-0100-5
7. Kobayashi K., Hashisaki M. Shot Noise in Mesoscopic Systems: from Single Particles to Quantum Liquids. *Journal of the Physical Society of Japan,* 2021, vol. 90, no. 10. https://doi.org/10.7566/JPSJ.90.102001

8. Merton R. Theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 1973, vol. 4, pp. 141–183.
9. Milshtein G.N., Tretyakov M.V. *Stochastic Numerics for Mathematical Physics.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag, 2004. https://doi.org/10.1007/978-3-662-10063-9
10. Samorodnitsky G.A. Class of shot noise models for financial applications. *Stochastic processes and their applications*, 1995, vol. 59, pp. 217–233.
11. Torrisi G.L., Leonardi E. Asymptotic analysis of Poisson shot noise processes, and applications. *Stochastic Processes and their Applications*, 2022, vol. 144, pp. 229–270. https://doi.org/10.1016/j.spa.2021.11.008

Об авторах

Мельникова Ирина Валерьяновна, д-р физ.-мат. наук, проф., Уральский федеральный университет, Екатеринбург, 620075, Российская Федерация, Irina.Melnikova@urfu.ru, https://orcid.org/0000-0003-4623-7954

Бовкун Вадим Андреевич, канд. физ.-мат. наук, доц., Уральский федеральный университет, Екатеринбург, 620075, Российская Федерация, Vadim.Bovkun@urfu.ru, https://orcid.org/0000-0002-5866-6396

About the authors

Irina V. Melnikova, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Ural Federal University, Ekaterinburg, 620075, Russian Federation, Irina.Melnikova@urfu.ru, https://orcid.org/0000-0003-4623-7954

Vadim A. Bovkun, Cand. Sci. (Phys.Math.), Assoc. Prof., Ural Federal University, Ekaterinburg, 620075, Russian Federation, Vadim.Bovkun@urfu.ru, https://orcid.org/0000-0002-5866-6396

Поступила в редакцию / Received 15.04.2023
Поступила после рецензирования / Revised 05.06.2023
Принята к публикации / Accepted 26.06.2023