Серия «Математика»
2022. Т. 42. С. 59—74

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.95
MSC 35G45, 35R99
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.59

Задача Самарского – Ионкина с интегральным возмущением для псевдопараболического уравнения

А. И. Кожанов[1,2], **Г. И. Тарасова**[3✉]

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация
[2] Академия наук Республики Саха(Якутия), Якутск, Российская Федерация,
[3] Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Якутск, Российская Федерация
✉ gi-tarasova@mail.ru

Аннотация. Работа посвящена исследованию разрешимости в анизотропных пространствах Соболева нелокальных краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка. Особенностью изучаемых задач является то, что в них по пространственной переменной задается условие, объединяющее в себе обобщенное условие Самарского – Ионкина и условие интегрального типа. Целью работы является доказательство существования и единственности регулярных решений изучаемых задач — решений, имеющих все обобщенные по С. Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения соболевского типа третьего порядка, пространственно-нелокальные краевые задачи, обобщенное условие Самарского – Ионкина, регулярные решения, существование и единственность

Ссылка для цитирования: Кожанов А. И., Тарасова Г. И. Задача Самарского-Ионкина с интегральным возмущением для псевдопараболического уравнения // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 42. С. 59–74.
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.59

Research article

The Samarsky – Ionkin Problem with Integral Perturbation for a Pseudoparabolic Equation

Alexander I. Kozhanov[1,2], **Galina I. Tarasova**[3]✉

[1] Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, Russian Federation
[2] Academy of Sciences of the Republic of Sakha (Yakutia), Yakutsk, Russian Federation
[3] North-Eastern Federal University, Yakutsk, Russian Federation
✉ gi-tarasova@mail.ru

Abstract. In the work the solvability of nonlocal boundary value problems for third-order pseudoparabolic equations in anisotropic spaces of Sobolev is studied. The condition is specified by a spatial variable that combines the generalized Samarsky-Ionkin condition and the integral type condition is particularity of the problems under study. The work aim is to prove the existence and uniqueness of the problems regular solutions - the solutions that have all Sobolev derivatives included in the corresponding equation.

Keywords: Sobolev type differential equations of the third order, spatially-nonlocal boundary value problems, generalized Samarsky-Ionkin condition, regular solutions, existence and uniqueness

For citation: Kozhanov A I., Tarasova G. I. The Samarsky-Ionkin Problem with Integral Perturbation for a Pseudoparabolic Equation. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 42, pp. 59–74. (in Russian)
https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.42.59

1. Введение

В работе изучается разрешимость пространственно-нелокальных краевых задач с обобщенным условием Самарского – Ионкина для нестационарных дифференциальных уравнений соболевского типа третьего порядка — именно для так называемых псевдопараболических уравнений.

Исследование разрешимости нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений представляется важным как с точки зрения собственно математики, так и с точки зрения математического моделирования. С математической точки зрения нелокальные задачи являются новым классом задач для дифференциальных уравнений; изучению разрешимости, изучению свойств решений подобных задач посвящено очень много работ — некоторые, близкие к настоящей статье, будут указаны ниже.

Впервые, по-видимому, на появление нелокальных задач в математическом моделировании обратил внимание В.А. Стеклов еще в конце XIX века в работе [16] (см. также [9]), посвященной изучению некоторых процессов теплопроводности.

Современный этап в исследованиях, связанных с нелокальными задачами для дифференциальных уравнений, начался с работ J. Cannon и

В. Л. Камынина [5;22], опубликованных в 1963 и 1964 гг. соответственно. В этих работах изучались новые нелокальные задачи для уравнения теплопроводности — именно задачи с интегральными условиями, происхождение которых объяснялось прежде всего некоторыми задачами математического моделирования.

В дальнейшем нелокальные задачи (их разрешимость, свойства решений) изучались столь многими авторами, что упомянуть даже малую их часть в рамках настоящей статьи не представляется возможным. Выделим лишь две работы, сыгравшие особую роль в теории нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений. В первой из них — в работе [4], опубликованной в 1977 г., изучалась одна специальная задача теории теплопроводности. В работе [4] был предложен новый метод исследования разрешимости подобных задач — метод разложения решения по специальным биортогональным семействам функций. Этот метод в дальнейшем неоднократно применялся в исследованиях разрешимости нелокальных задач для параболических и гиперболических уравнений, а также для уравнений смешанного типа.

Еще одна работа, которую нужно выделить, — работа А. А. Самарского [12], опубликованная в 1980 г. В этой работе для параболических уравнений была предложена постановка общей нелокальной краевой задачи, включающая в себя как классические начально-краевые задачи, так и многие нелокальные задачи, в том числе задачи В. А. Стеклова и Н. И. Ионкина. В дальнейшем многие исследования, связанные с нелокальными задачами для дифференциальных уравнений, в той или иной степени были связаны с задачами работ [4] и [12].

Отметим также следующее. Общая нелокальная задача Самарского работы [12] представляется тесно связанной с задачей Бицадзе – Самарского, предложенной ранее в работе [1] для эллиптических уравнений. Обе эти работы — [12] и [1] — сыграли важную роль в исследованиях, связанных с нелокальными задачами для дифференциальных уравнений.

Назовем еще одну работу, посвященную исследованию разрешимости нелокальных задач для параболических уравнений, — работу Н. И. Юрчука [18], опубликованную в 1986 г. В этой работе для параболических уравнений с переменными коэффициентами изучалась разрешимость задачи Ионкина, предложенный в ней метод отличался от метода работы [4], но при этом разрешимость была установлена в некоторых весовых пространствах.

Перейдем непосредственно к задачам, изучаемым в настоящей статье.

В работе будет изучаться пространственно-нелокальная задача с обобщенным условием Самарского – Ионкина для дифференциальных ура-

внений
$$\frac{\partial}{\partial t}(u - u_{xx}) + b(x,t)u_{xx} + c(x,t)u = f(x,t). \tag{1.1}$$

Данные уравнения в последнее время называют уравнениями соболевского типа [2; 13; 26], или же псевдопараболическими [2; 26] или же уравнениями составного типа [24]. В названных монографиях, а также в многочисленных статьях достаточно хорошо изучена разрешимость начально-краевых задач для уравнений (1.1). Менее изученными представляются нелокальные — именно нелокальные по пространственным переменным — задачи для подобных уравнений. Здесь можно назвать работы [6; 15], в которых изучались задачи с нелокальным условием типа частного случая условия Самарского, а также работы [7; 11; 19–21] в которых для уравнений (1.1) изучалась разрешимость некоторых задач с интегральными условиями. Уточним, что задачи, в которых нелокальным условием является условие Самарского –Ионкина с интегральным возмущением (а исследование именно таких задач и будет целью настоящей работы), для уравнений (1.1) ранее не изучались.

Все рассуждения и построения в работе будут вестись на основе пространств Лебега L_p и Соболева W_p^l. Необходимые определения, описания свойств функций из этих пространств можно найти в монографиях [8; 14; 27].

Целью настоящей работы будет доказательство существования и единственности регулярных решений той или иной задачи — решений, имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение. В конце статьи будут указаны некоторые усиления и обобщения полученных в основной части работы результатов.

2. Постановка задач

Пусть Ω есть интервал $(0,1)$ оси Ox, Q есть прямоугольник $\Omega\times(0,T)$ переменных (x,t), $0 < T < +\infty$, $b(x,t)$, $c(x,t)$, $f(x,t)$, $\gamma(t)$ и $N(x)$ — заданные функции, определенные при $x \in \overline{\Omega}$, $t \in [0,T]$, L — дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством
$$Lv = v_t - v_{xxt} + b(x,t)v_{xx} + c(x,t)v.$$

<u>*Нелокальная задача I.*</u> Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения
$$Lu = f(x,t) \tag{2.1}$$
и такую, что для нее выполняются условия
$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2.2}$$

$$u(0,t) = \gamma(t)u(1,t) + \int_0^1 N(y)u(y,t)dy, \quad t \in (0,T), \tag{2.3}$$

$$u_x(1,t) = 0. \tag{2.4}$$

Нелокальная задача II. Найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (2.1) и такую, что для нее выполняется условие (2.2), а также условия

$$u_x(0,t) = \gamma(t)u_x(1,t) + \int_0^1 N(y)u(y,t)dy, \quad t \in (0,T), \tag{2.5}$$

$$u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{2.6}$$

Именно нелокальная задача II в случае $\gamma(t) \equiv 1$, $N(y) \equiv 0$ дает собственно задачу Ионкина, условие же (2.5) в целом дает обобщенное условие Самарского – Ионкина с интегральным возмущением. Условие (2.3) в нелокальной задаче I также представляет собой частный случай условия Самарского, но с дополнительным интегральным слагаемым. Можно сказать, что нелокальные задачи I и II являются объединением задач, изученных в работах [15] и [19]. Уточним, что метод, используемый в настоящей работе, будет существенно отличаться от методов [15] и [19].

В настоящей работе существование и единственность регулярных решений нелокальных задач I и II будут установлены в случаях, дающих как задачу Ионкина с интегральным возмущением, так и задачу, в которой нелокальное условие Ионкина задается на некотором подмножестве из отрезка $[0,T]$, на оставшейся же части отрезка $[0,T]$ задается условие интегрального типа или же обычное локальное условие первой или второй начально-краевых задач.

3. Разрешимость нелокальной задачи I

Определим линейное пространство V:

$$V = \{v(x,t) : v(x,t) \in L_\infty(0,T; W_2^2(\Omega)), v_t(x,t) \in L_2(0,T; W_2^2(\Omega))\},$$

(здесь и далее все производные понимаются как обобщенные по С.Л. Соболеву производные). Определим норму

$$\|v\|_V = \left(\|v\|^2_{L_\infty(0,T;W_2^2(\Omega))} + \|v_t\|^2_{L_2(0,T;W_2^2(\Omega))} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что пространство V, снабженное данной нормой, будет банаховым пространством.

Для функции $\gamma(t)$ будет далее выполняться условие: существуют числа γ_0 и γ_1, такие, что $0 \le \gamma_0 \le 1 \le \gamma_1$ и при $t \in [0,T]$ имеют место неравенства

$$\gamma_0 \le \gamma(t) \le \gamma_1. \tag{3.1}$$

Положим

$N_0 = \int_0^1 (x^2-2x)N(x)dx, \quad N_1 = \left(\int_0^1 x^{-1}N^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}},$

$\alpha_1 = 3-\gamma_1^2-\gamma_1 N_1, \quad \beta_1 = 5-3\gamma_1^2-4\gamma_1 N_1 - N_1^2.$

Теорема 1. *Пусть выполняются условие (3.1), а также условия*

$\gamma(t) \in C^1([0,T]), \quad b(x,t) \in C(\overline{Q}), \quad c(x,t) \in C(\overline{Q});$

$x^{-\frac{1}{2}}N(x) \in L_2(\Omega);$

$N_0 \le 0, \quad \alpha_1 > 0, \quad \beta_1 > 0.$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ из пространства $L_2(Q)$ нелокальная задача I имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V, причем это решение единственно.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $\gamma_0 > 0$. Воспользуемся методом продолжения по параметру.

Пусть λ есть число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (2.1) и такую, что для нее выполняются условия (2.2) и (2.4), а также условие

$$u(0,t)-\gamma_0 u(1,t) = \lambda\left\{[\gamma(t)-\gamma_0]u(1,t)+\int_0^1 N(y)u(y,t)dy\right\}, \quad t\in(0,T). \tag{3.2}$$

Заметим, что без ограничения общности можно считать, что $\gamma_0 \in (0,1)$. В этом случае краевая задача (2.1), (2.2), (3.2), (2.4) при $\lambda = 0$ и при выполнении условий теоремы будет разрешима в пространстве V (см.: [6]). Покажем, что и для остальных чисел λ из отрезка $[0,1]$ задача (2.1), (2.2), (3.2), (2.4) будет разрешима в пространстве V.

По функции $u(x,t)$ определим функцию $w(x,t)$:

$$w(x,t) = u(x,t) - \frac{\lambda(x^2-2x)}{\gamma_0}\left\{[\gamma(t)-\gamma_0]u(1,t)+\int_0^1 N(y)u(y,t)dy\right\}.$$

Если функция $u(x,t)$ является решением краевой задачи (2.1), (2.2), (3.2), (2.4), то для функции $w(x,t)$ будут выполняться условия

$$w(0,t)-\gamma_0 w(1,t) = 0 \quad w_x(1,t) = 0, \quad t\in(0,T). \tag{3.3}$$

Далее, имеют место равенства

$$\left\{1+\frac{\lambda}{\gamma_0}[\gamma(t)-\gamma_0]\right\}u(1,t)+\frac{\lambda}{\gamma_0}\int_0^1 N(y)u(y,t)dy = w(1,t), \tag{3.4}$$

$$-\frac{\lambda N_0}{\gamma_0}[\gamma(t)-\gamma_0]u(1,t)+\left(1-\frac{\lambda N_0}{\gamma_0}\right)\int_0^1 N(y)u(y,t)dy=\int_0^1 N(x)w(x,t)dx. \tag{3.5}$$

Положим

$d_0(t,\lambda)=1-\frac{\lambda N_0}{\gamma_0}+\frac{\lambda}{\gamma_0}[\gamma(t)-\gamma_0].$

Равенства (3.4) и (3.5) можно трактовать как линейную алгебраическую систему относительно функций $u(1,t)$ и $\int_0^1 N(y)u(y,t)dy$. Определитель этой системы есть функция $d_0(t,\lambda)$. Согласно условиям теоремы и согласно предположению $\gamma(t)\geq\gamma_0>0$, функция $d_0(t,\lambda)$ будет строго положительной при $t\in[0,T]$. Следовательно, от равенств (3.4) и (3.5) можно перейти к равенствам

$$u(1,t)=d_{11}(x,t,\lambda)w(1,t)+d_{12}(x,t,\lambda)\int_0^1 N(y)w(y,t)dy,$$

$$\int_0^1 N(y)u(y,t)dy=d_{21}(x,t,\lambda)w(1,t)+d_{22}(x,t,\lambda)\int_0^1 N(y)w(y,t)dy$$

с некоторыми вполне определенными функциями $d_{ij}(x,t,\lambda), i,j=1,2.$

Эти равенства означают, что функция $u(x,t)$ имеет представление

$$u(x,t)=w(x,t)+d_1(x,t,\lambda)w(1,t)+d_2(x,t,\lambda)\int_0^1 N(y)w(y,t)dy. \tag{3.6}$$

Рассмотрим краевую задачу: найти функцию $w(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$\begin{gathered}
w_t-w_{xxt}+bw_{xx}+cw+[d_1(x,t,\lambda)-d_{1xx}(x,t,\lambda)]w_t(1,t)+\\
+[d_2(x,t,\lambda)-d_{2xx}(x,t,\lambda)]\int_0^1 N(y)w_t(y,t)dy+\\
+[d_{1t}(x,t,\lambda)-d_{1xxt}(x,t,\lambda)+b(x,t)d_{1xx}(x,t,\lambda)+c(x,t)d_1(x,t,\lambda)]w(1,t)+\\
+[d_{2t}(x,t,\lambda)-d_{2xxt}(x,t,\lambda)+b(x,t)d_{2xx}(x,t,\lambda)+\\
+c(x,t)d_2(x,t,\lambda)]\int_0^1 N(y)w(y,t)dy=f(x,t)
\end{gathered} \tag{3.7}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2.2) и (3.3). В этой задаче уравнение (3.7) получено подстановкой функции $u(x,t)$ в виде (3.6) в уравнение (2.1). С другой стороны, уравнение (3.7) представляет собой «нагруженное» [3; 10] псевдопараболическое уравнение с параметром λ в младших членах. Поскольку каждое слагаемое в уравнении (3.7) с параметром λ оценивается сверху величиной $C\|w\|_V$ (C — постоянная, для каждого слагаемого своя), то, согласно теореме о методе продолжения по параметру ([17], гл. III, §14), краевая задача (3.7), (2.2), (3.3) будет разрешима в пространстве V для всех чисел λ из отрезка [0,1], если, во-первых, эта задача резрешима в пространстве V при $\lambda = 0$ и, во-вторых, если для всевозможных решений $w(x,t)$ краевой задачи (3.7), (2.2), (3.1) выполняется равномерная по λ априорная оценка

$$\|w\|_V \leq M_0 \|f\|_{L_2(Q)}. \tag{3.8}$$

При λ имеет место равенство $w(x,t) = u(x,t)$, и при этом функция $u(x,t)$ является решением задачи (2.1), (2.2), (3.2), (2.4) в случае $\lambda = 0$. Как уже говорилось выше, задача (2.1), (2.2), (3.2), (2.4) при $\lambda = 0$ будет действительно разрешима в пространстве V, и тем самым и задача (3.7), (2.2), (3.3) будет разрешима при $\lambda = 0$ в пространстве V.

Заметим, что требуемая оценка (3.8) будет выполняться, если для всевозможных решений $u(x,t)$ из пространства V краевой задачи (2.1), (2.2), (3.2), (2.4) имеет место аналогичная оценка

$$\|u\|_V \leq M_0' \|f\|_{L_2(Q)}. \tag{3.9}$$

Покажем, что искомая оценка действительно имеет место.

Положим

$R(x,t,\tau) = [c(x,\tau) - b(x,\tau)] e^{\int_0^\tau b(x,\zeta)d\zeta - \int_0^t b(x,\tau)d\tau}$,

$f_1(x,t) = -e^{-\int_0^t b(x,\tau)d\tau} \int_0^t e^{\int_0^\tau b(x,\zeta)d\zeta} f(x,\tau)d\tau$.

Уравнение (2.1) на функциях из пространства V можно записать в виде

$$u_{xx}(x,t) - u(x,t) = \int_0^t R(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau + f_1(x,t). \tag{3.10}$$

Умножим уравнение (3.10) на функцию $-xu$ и проинтегрируем по переменной x от 0 до 1 и по временной переменной от 0 до текущей точки. Получим равенство

$$\int_0^t \int_0^1 x u_x^2 dx d\tau + \int_0^t \int_0^1 x u^2 dx d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t u^2(1,\tau) d\tau =$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ [\lambda\gamma(\tau) + (1-\lambda)\gamma_0] u(1,\tau) + \lambda \int_0^1 N(y) u(y,\tau) dy \right\}^2 d\tau -$$
$$- \int_0^t \int_0^1 x u(x,\tau) \left(\int_0^\tau R(x,t,\zeta) u(x,\zeta) d\zeta \right) dx d\tau - \int_0^t \int_0^1 x u f_1 dx d\tau. \tag{3.11}$$

Введем обозначения:

$I_1 = \left(\int_0^t \int_0^1 x u_x^2 dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}}, \quad I_2 = \left(\int_0^t \int_0^1 x u^2 dx d\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$

Имеют место неравенства

$$u^2(1,\tau) \leq 3 \int_0^1 x u^2(x,\tau) d\tau + \int_0^1 x u_x^2 dx,$$

$$\Big|[\lambda\gamma(\tau)+(1-\lambda)\gamma_0]u(1,\tau)+\lambda\int_0^1 N(y)u(y,\tau)dy\Big|\le\gamma_1|u(1,\tau)|+$$
$$+N_1\left(\int_0^1 yu^2(y,\tau)dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Эти неравенства и равенство (3.11) позволяют оценить величину $I_1^2+I_2^2$:

$$2I_1^2+2I_2^2\le-\int_0^1 u^2(1,\tau)d\tau+\gamma_1^2\int_0^t u^2(1,\tau)d\tau+$$
$$+2\gamma_1N_1\int_0^t|u(1,\tau)|\left(\int_0^1 yu^2(y,\tau)dy\right)d\tau+N_1^2I_2^2+$$
$$+\Big|\int_0^t\int_0^1 xu(x,\tau)\left(\int_0^\tau R(x,\tau,\zeta)u(x,\zeta\right)dxd\tau\Big|+|\int_0^t\int_0^1 xuf_1dxd\tau|\le$$
$$\le\left(\gamma_1^2-1+\gamma_1N_1\right)\int_0^t u^2(1,\tau)d\tau+\left(\gamma_1N_1+N_1^2\right)I_2^2+$$
$$+\Big|\int_0^t\int_0^1 xu(x,\tau)\left(\int_0^\tau R(x,\tau,\zeta)u(x,\zeta)d\zeta\right)dxd\tau\Big|+\Big|\int_0^t\int_0^1 xuf_1dxd\tau\Big|\le$$
$$\le\left[3\left(\gamma_1^2-1+\gamma_1N_1\right)+\gamma_1N_1+N_1^2\right]+\left(\gamma_1^2-1+\gamma_1N_1\right)I_1^2+$$
$$+\Big|\int_0^t\int_0^1 xu(x,\tau)\left(\int_0^\tau R(x,\tau,\zeta)u(x,\zeta)d\zeta\right)dxd\tau\Big|+\Big|\int_0^t\int_0^1 xuf_1dxd\tau\Big|.$$

Отсюда

$$\alpha_1I_1^2+\beta_1I_2^2\le\Big|\int_0^t\int_0^1 xu(x,\tau)\left(\int_0^\tau R(x,\tau,\zeta)u(x,\zeta)d\zeta\right)dxd\tau\Big|+$$
$$+\Big|\int_0^t\int_0^1 xuf_1dxd\tau\Big|.\quad(3.12)$$

Учитывая положительность чисел α_1 и β_1, применяя далее к каждому из слагаемых в правой части (3.12) неравенство Юнга и затем используя лемму Гронуолла, получим, что для функции $u(x,t)$ выполняется априорная оценка

$$\int_0^t\int_0^1\left(xu^2+xu_x^2\right)dxd\tau\le M_1\int_Q f^2dxdt,\quad(3.13)$$

постоянная M_1 в которой определяется функциями $b(x,t)$, $c(x,t)$ и $\gamma(t)$, а также числом T.

Очевидным следствием оценки (3.13) является оценка функций $u(0,t)$ и $u(1,t)$:

$$\int_0^t\left[u^2(0,\tau)+u^2(1,\tau)\right]d\tau\le M_2\int_Q f^2dxdt;\quad(3.14)$$

постоянная M_2 в этой оценке вновь определяется лишь функциями $b(x,t)$, $c(x,t)$ и $\gamma(t)$, а также числом T.

На функциях из пространства V уравнение (2.1) можно записать в виде

$$u_{xxt} - u_t = R(x,t,t)u + \int_0^t R_t(x,t,\tau)u(x,\tau)d\tau + f_{1t}(x,t). \tag{3.15}$$

Умножая (3.15) на функцию $-xu_t$, интегрируя, повторяя предыдущие рассуждения и дополнительно используя неравенства (3.13) и (3.14), получим, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (2.1), (2.2), (3.2), (2.4) выполняется оценка

$$\int_0^t \int_0^1 \left(xu_\tau^2 + xu_{x\tau}^2\right) dxd\tau + \int_0^t \left[u_\tau^2(0,\tau) + u_\tau^2(1,\tau)\right] d\tau \leq M_3 \int_Q f^2 dxdt \tag{3.16}$$

с постоянной M_3, определяющейся лишь функциями $b(x,t)$, $c(x,t)$ и $\gamma(t)$, а также числом T.

На следующем шаге умножим уравнение (3.15) на фукнцию u_{xxt}. Интегрируя по прямоугольнику Q, используя оценки (3.13), (3.14) и (3.15), нетрудно получить, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (2.1), (2.2), (3.2), (2.4) выполняется оценка

$$\int_Q u_{xxt}^2 dxdt \leq M_4 \int_Q f^2 dxdt \tag{3.17}$$

с постоянной M_4, определяющейся функциями $b(x,t)$, $c(x,t)$ и $\gamma(t)$, а также числом T.

Оценки (3.13), (3.14), (3.16) и (3.17) дают оценку (3.9), представление же функции $w(x,t)$ через функцию $u(x,t)$ дает далее требуемую оценку (3.8). Как уже говорилось выше, наличие оценки (3.8) означает, что краевая задача (3.7), (2.2), (3.1) будет иметь решение $w(x,t)$, принадлежащее пространству V, при всех λ из отрезка $[0,1]$. Но тогда и краевая задача (2.1), (2.2), (3.2), (2.4) будет разрешима в пространстве V при всех λ из отрезка $[0,1]$. А это и означает, что в случае $\gamma_0 > 0$ нелокальная задача I имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству V.

Пусть теперь выполняется $\gamma_0 = 0$. Для положительного числа ε обозначим $\gamma_\varepsilon(t) = \gamma(t) + \varepsilon$, $\gamma_{1\varepsilon} = \gamma_1 + \varepsilon$, $\alpha_{1\varepsilon} = 3 - \gamma_{1\varepsilon}^2 - \gamma_{1\varepsilon}N_1$, $\beta_{1\varepsilon} = 5 - 3\gamma_{1\varepsilon}^2 - 4\gamma_{1\varepsilon}N_1 - N_1^2$. Определим положительное число ε_0 так, чтобы при $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ выполнялось $\alpha_{1\varepsilon} \geq \alpha_{10} > 0$, $\beta_{1\varepsilon} \geq \beta_{10} > 0$ с некоторыми положительными числами α_{10} и β_{10} (в качестве искомых чисел α_{10} и β_{10} можно взять, например, числа $\frac{1}{2}\alpha_1$ и $\frac{1}{2}\beta_1$). Согласно доказанному выше, краевая задача I с функцией $\gamma_\varepsilon(t)$ в условии (2.3) будет иметь решение $u_\varepsilon(x,t)$, принадлежащее пространству V. Очевидно, что для семейства $\{u_\varepsilon(x,t)\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)}$ будут иметь место априорные оценки (3.13), (3.14), (3.16) и (3.17) с соотвествующими постоянными, не зависящими от ε. Эти оценки позволят стандартным образом организовать процедуру предельного перехода — взяв вначале последовательность чисел $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ из интервала $(0,\varepsilon_0)$, сходящуюся к нулю, затем с помощью свойства рефлексивности гильбертова пространства [17] выбрать последовательность $\{u_{m_k}(x,t)\}_{k=1}^{\infty}$ решений краевой задачи I с функцией $\gamma_{\varepsilon_{m_k}}(t)$, слабо сходящуюся в пространстве $L_2(Q)$ вместе со всеми производными, входящими в уравнение (2.1); предельная функция $u(x,t)$ и будет решением нелокальной краевой задачи I в случае γ_0.

Итак, как в случае $\gamma_0>0$, так и в случае $\gamma_0=0$ нелокальная задача I при выполнении условий теоремы будет разрешима в пространстве V. Единственность в пространстве V очевидна — вытекает, например, из первой априорной оценки.

Теорема полностью доказана. $\square$

4. Разрешимость нелокальной задачи II

Техника доказательства резрешимости нелокальной задачи II подобна технике доказательства теоремы 1.

Положим

$$h(y)=-\frac{y^3}{3}+y^2-\frac{2}{3},\quad N_2=\int_0^1 h(y)N(y)dy.$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условие (3.1), а также условия*
$\gamma(t)\in C^1([0,T]), b(x,t)\in C^1(\overline{Q}),\quad c(x,t)\in C^1(\overline{Q})$;
$x^{-\frac{1}{2}}N(x)\in L_2(\Omega)$;
$N_2\le 0,\quad \alpha_1>0,\quad \beta_1>0.$
Тогда, если $f(x,t)\in L_2(Q)$, $f_x(x,t)\in L_2(Q)$, $f(1,t)=0$ при $t\in[0,T]$, то нелокальная задача II имеет решение $u(x,t)$, такое, что $u(x,t)\in V$, $u_x(x,t)\in V$, причем в пространстве V это решение единственно.

Доказательство. Для краткости через B будем обозначать оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$ определяется равенством

$$(Bv)(t)=-\int_0^1 N(x)\left(\int_x^1 v(y,t)dy\right)dx.$$

Вновь пусть вначале выполняется условие $\gamma_0\in(0,1)$, и вновь воспользуемся методом продолжения по параметру.

Пусть $g(x,t)$ есть заданная функция из пространства $L_2(Q)$, λ есть число из отрезка $[0,1]$. Рассмотрим задачу: найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения

$$v_t-v_{xxt}+b(x,t)v_{xx}+c(x,t)v+\lambda\left[b_x(x,t)v_x-c_x(x,t)\int_x^1 v(y,t)dy\right]=g(x,t) \tag{4.1}$$

и такую, что для нее выполняются условие

$$v(0,t)-\gamma_0 v(1,t)=\lambda\left\{[\gamma(t)-\gamma_0]\,v(1,t)+(Bv)(t),\right\} \tag{4.2}$$

а также условия (2.2) и (2.4). При $\lambda=0$ данная краевая задача разрешима в пространстве V [6], если же $\lambda\neq 0$, то она несущественным образом отличается от задачи (2.1), (2.2), (3.2), (2.4). Другими словами, от задачи (4.1), (4.2), (2.2), (2.4) можно перейти к задаче для функции $w(x,t)$, имеющей вид

$$w(x,t)=v(x,t)-\frac{\lambda(x^2-2x)}{\gamma_0}\left\{[\gamma(t)-\gamma_0]\,v(1,t)+(Bv)(t)\right\},$$

и при этом функции $v(1,t)$ и $(Bv)(t)$ вычисляются через функции $w(1,t)$ и $(Bw)(t)$. Метод продолжения по параметру при наличии равномерной по λ априорной оценки вида (3.8) даст разрешимость краевой задачи для функции $w(x,t)$ в пространстве V при всех λ. Требуемую оценку нетрудно получить, возвращаясь к функции $v(x,t)$ и далее используя технику получения оценки (3.9). Следовательно, при $\gamma_0\in(0,1)$ краевая задача (4.1), (4.2), (2.2), (2.4) будет разрешима в пространстве V при всех λ из отрезка $[0,1]$. Далее, в случае $\gamma_0=0$ вновь нетрудно организовать процедуру предельного перехода (выбирая последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ из интервала $(0,1)$, используя априорные оценки и учитывая свойство рефлексивности гильбертова пространства) и тем самым получить разрешимость в пространстве V краевой задачи (4.1), (4.2), (2.2), (2.4) при $\lambda=1$ и при $\gamma_0=0$.

Итак, краевая задача (4.1), (4.2), (2.2), (2.4) имеет решение $v(x,t)$, принадлежащее пространству V. Положим $g(x,t)=f_x(x,t)$, $u(x,t)=-\int_x^1 v(y,t)dy$. Очевидно, что для функции $u(x,t)$ выполняются условия (2.2), (2.3) и (2.4); кроме того, для функции $u(x,t)$ при $t\in(0,T)$ выполняется равенство $u_{xx}(1,t)=0$. Вследствие специального выбора функции $g(x,t)$ уравнение (4.1) можно записать в виде

$$u_t(x,t)-u_{xxt}(x,t)+b(x,t)u_{xx}+c(x,t)u(x,t)=f(x,t)-f(1,t)+\\+u_{xxt}(1,t)-b(1,t)u_{xx}(x,t). \tag{4.3}$$

Поскольку $f(1,t)=u_{xx}(1,t)=0$ при $t\in[0,T]$, то тем самым уравнение (4.3) преобразуется в уравнение (2.1). Другими словами, определенная по функции $v(x,t)$ функция $u(x,t)$ и будет искомым решением краевой задачи II.

Единственность решений краевой задачи II в пространстве V очевидна. Теорема доказана. □

5. Комментарии и дополнения

5.1. Как было сказано во введении, настоящую работу можно трактовать как исследование задач, объединяющих задачи работ [15] и [19]. Вместе с тем заметим, что в настоящей работе получены существенно новые результаты как по сравнению с [15], так и по сравнению с [19]. Так, в [15] показано, что задача I будет корректна при $N(x) \equiv 0$ в случае $|\gamma(t)| \leq 1$, в настоящей же работе установлено, что корректность сохранится при выполнении условия $\gamma^2(t) < \frac{5}{3}$. Что же касается работы [19], то в ней задачи с условием Ионкина не рассматривались вообще.

5.2. С другой стороны, представляется, что функция $\gamma(t)$ не может быть произвольно большой. Так, если в уравнении (1) выполняется $b(x,t) \equiv 0$, $c(x,t) \equiv 0$, $\gamma = const$, $N(x) \equiv 0$, то в случае $\gamma = \frac{1}{2}\left(e + e^{-1}\right)$ нелокальная задача I будет в случае $f(x,t) \equiv 0$ иметь ненулевые решения, т. е. будет некорректной (заметим, что в данном примере выполняется $\gamma^2 > \frac{5}{3}$).

5.3. Используемые методы позволяют получить разрешимость нелокальных задач I и II и в более общих, чем рассмотренные в работе, случаях. Например, уравнение (1) можно заменить уравнением

$$u_t - a(x,t)u_{xxt} + b_1(x,t)u_{xx} + b_2(x,t)u_x + c(x,t)u = f(x,t)$$

с положительной функцией $a(x,t)$, функция N может зависеть и от переменной t и т. д.

5.4. Уравнение (2.1), как и обычное уравнение теплопроводности, возникает при математическом моделировании некоторых тепловых и диффузионных процессов — см. [9; 10; 23; 25].

Список источников

1. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады Академии наук СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.
2. Демиденко Г. В., Успенский С. В. Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск : Науч. Кн., 1998.
3. Дженалиев М. Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы : Ин-т теорет. и прикл. математики.1995.
4. Ионкин Н. И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13, № 2. С. 294–304.
5. Камынин Л. И. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1964, Т. 4, № 6. С. 1006-1024. https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90080-1
6. Кожанов А. И. Об одной нелокальной краевой задаче с переменными коэффициентами для уравнений теплопроводности и Аллера

// Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 6. С. 769–774. https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000046860.84156.f0

7. Кожанов А. И., Попов Н. С. О разрешимости некоторых задач со смещением для псевдопараболических уравнений // Вестник НГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 40, вып. 6. С. 63–75. https://doi.org/10.1007/s10958-012-0998-6
8. Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М. : Наука, 1973.
9. Нахушев А. М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М. : Наука, 2006.
10. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения и их применение. М. : Наука, 2012.
11. Попов Н.С. О разрешимости пространственно-нелокальных краевых задач для одномерных псевдопараболических и псевдогиперболических уравнений // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. 2015. Т. 125, № 3. С. 29–42.
12. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16, № 11. С. 1925–1935.
13. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. М. : Физматлит, 2007.
14. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М. :Наука, 1988.
15. Солдатов А. П., Шхануков М. Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболического уравнения высокого порядка // Доклады АН СССР. 1987. Т. 297, № 3. С. 547-552.
16. Стеклов В. А. Задача об охлаждении неоднородного твердого тела // Сообщения Харьковского математического общества. Сер. 2. 1897. Т. 5, № 3-4. С. 136-181.
17. Треногин В. А. Функциональный анализ. М. : Наука, 1980. 495 с.
18. Юрчук Н. И. Смешанная задача с интегральным условием для некоторых параболических уравнений // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2117–2126.
19. Юсубов Ш. Ш., Мамедова Дж. Дж. О разрешимости уравнения с доминирующей смешанной производной с интегральными граничными условиями // Вестник Бакинского госуниверситета. Серия Математика. 2012. № 3. С. 57–62.
20. Bouziani A. Initial-boundary value problems for a class of pseudoparabolic equations with integral boundary conditions // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2004. Vol. 291, N 2. P. 371–386. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00590-0
21. Bouziani A. Solution to a semilinear pseudoparabolic problem with integral condition // Electronic J. of Diff. Equat. 2006. Vol. 2006, N 115. P. 1–18.
22. Cannon J. R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math. 1963. N 21. P. 155–160. https://doi.org/10.1090/qam/160437
23. Chen P. J., Gurtin M. E. On a theory of heat condition involving two temperatures // Z. Angew. Math. Phys. 1968. Vol. 19. P. 614–627. http://dx.doi.org/10.1007/BF01594969
24. Kozhanov A. I. Composite Type Equations and Inverse Problems. Utrecht, Netherlands : VSP, 1999.
25. Rundell W. The Stefan Problem for a Pseudo-Heat Equarion // Indiana University Math. Journal. 1978. Vol. 27, N 5. P. 739–750.
26. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. Utrecht, the Netherlands : VSP, 2003. http://dx.doi.org/10.1515/9783110915501

27. Triebel H. Interpolation Theory. Functional Spaces. Differetial Operators. Berlin : VEB Duetschen Verlag der Wissenschaften, 1978.

References

1. Bitsadze A.V., Samarskiy A.A. On some simplest generalizations of linear elliptic boundary value problems. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1969, vol. 185, no. 4, pp. 739–740. (in Russian)
2. Demidenko G.V., Upsenskii S.V. *Partial Differential Equations and Systems Not Solvable with Respect to the Highest-Order Derivative.* CRC, 2003.
3. Dzhenaliev M.T. *On the theory of boundary value problems for loaded differential equations.* Almaty, Institute of Theoretical and Applied Mathematics Publ., 1995, 269 p. (in Russian)
4. Ionkin N.I. Solution of nonlocal problems for one-dimensional oscillations of a medium. *Differential Equations*, 1977, vol. 12, no. 4. pp. 294–304. (in Russian)
5. Kamynin L.I. On certain boundary problem of head conduction with nonclassical boundary conditions. *J. of Comp. and Math. Physics*, 1964, vol. 4, no. 6, pp. 1006–1024. https://doi.org/10.1016/0041-5553(64)90080-1(in Russian)
6. Kozhanov A. I. On a Nonlocal Boundary Value Problem with Variable Coefficients for the Heat Equation and the Aller Equation. *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 6, pp. 815–826. https://doi.org/10.1023/B:DIEQ.0000046860.84156.f0 (in Russian)
7. Kozhanov A.I., Popov N.S. On the solvability of some tasks with offset for pseudoparabolic equations. *Vestnik NGU. Seriia: Matematika, mekhanika, informatika* [Vestnik of NGU. Series: Mathematics, Mechanics, Informatics], 2010, vol. 10, no.3, pp. 63–75. https://doi.org/10.1007/s10958-012-0998-6(in Russian)
8. Ladyzhenskaya O.A., Uraltseva N.N. *Linear and quasi-linear equations of elliptic type.* New York, London, Academic Press, 1968.
9. Nakhushev A.M. *Zadachi so smeshheniem dlja uravnenij v chastnyh proizvodnyh.* Moscow, Nauka Publ., 2006. (in Russian)
10. Nakhushev A.M. *Nagruzhennye uravnenija i ih primenenie.* Moscow, Nauka Publ., 2012. (in Russian)
11. Popov N.S. On the solvability of spatial nonlocal boundary value problems for one-dimensional pseudoparabolic and pseudohyperbolic equations. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvenno-Nauchnaya Seriya*, 2015, vol. 125, no. 3, pp. 29–43. (in Russian)
12. Samarskii A. A. Some problems of the theory of differential equations. *Differ. Uravn.*, 1980, vol. 16. no. 11. pp. 1925–1935. (In Russian)
13. Sveshnikov A.G., Alshin A.B., Korpusov M.O., Pletner U.D. *Linear and Non-Linear Sobolev-Type.* Moscow, Phizmatlit Publ., 2007. (in Russian)
14. Sobolev C.L. *Some applications of functional analysis in mathematical physics.* Moscow, Nauka Publ., 1988.
15. Soldatov A.P., Shhanukov M.H. Boundary value problems with A. A. Samarskii general nonlocal condition for higher-order pseudoparabolic equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1987, vol. 297, no. 3, pp. 547–552. (in Russian)
16. Steklov V.A. A problem jn Cooling of a Solid. *Comm. of Khakov Math. Society*, 1897, vol. 5, no. 3-4. pp. 136–181. (in Russian)
17. Trenogin V.A. *Funkcional'nyj analiz* [Functional analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1980. (in Russian)

18. Yurchuk N.J. A mixed problem with an integral condition for some parabolic equations. *Differ. Uravn.*., 1986, vol. 22, no. 12, pp. 2117–2126. (in Russian)
19. Yusubov Sh.Sh., Mammadova J.J. On solvability of an equation with dominating mixed derivative with integral boundary conditions. *Vestnik Bakinskogo Gos. Universiteta. Seriya Matematika*, 2012, no. 3, pp. 57–62. (in Russian)
20. Bouziani A. Initial-boundary value problems for a class of pseudoparabolic equations with integral boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2004, no. 291(2), pp. 371–386. https://doi.org/10.1016/S0022-247X(03)00590-0
21. Bouziani A. Solution to a semilinear pseudoparabolic problem with integral condition. *Electronic J. of Diff. Equat.*, 2006, vol. 2006, no. 115, pp. 1–18.
22. Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy. *Quart. Appl. Math.*, 1963, no. 21, pp. 155–160. https://doi.org/10.1090/qam/160437
23. Chen P.J., Gurtin M.E. On a theory of heat condition involving two temperatures. *Z. Angew. Math. Phys.*, 1968, vol. 19, pp. 614–627. http://dx.doi.org/10.1007/BF01594969
24. Kozhanov A.I. *Composite Type Equations and Inverse Problems.* Utrecht, Netherlands, VSP, 1999.
25. Rundell W. The Stefan Problem for a Pseudo-Heat Equarion. *Indiana University Math. Journal*, 1978, vol. 27, no. 5, pp. 739–750.
26. Sviridyuk G.A., Fedorov V.E. *Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators.* Utrecht, Netherlands, VSP, 2003. http://dx.doi.org/10.1515/9783110915501
27. Triebel H. *Interpolation Theory. Functional Spaces. Differetial Operators.* Berlin, VEB Duetschen Verlag der Wissenschaften, 1978.

Об авторах

Кожанов Александр Иванович, д-р физ.-мат. наук, проф., Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Российская Федерация, 630090, г. Новосибирск, kozhanov@math.nsc.ru, https://orcid.org/0000-0003-4376-4003

Тарасова Галина Ивановна, канд. физ.-мат. наук, Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова, Российская Федерация, 677000, г. Якутск, gi-tarasova@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-3460-4884

About the authors

Alexander I. Kozhanov, Dr. Sci. (Phys.–Math.), Prof., Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, Novosibirsk, 630090, Russian Federation, kozhanov@math.nsc.ru, https://orcid.org/0000-0003-4376-4003

Galina I. Tarasova, Cand. Sci. (Phys.Math.), North-Eastern Federal University, Yakutsk, 677000, Russian Federation, gi-tarasova@mail.ru, https://orcid.org/0000-0003-3460-4884

Поступила в редакцию / Received 26.06.2022
Поступила после рецензирования / Revised 18.08.2022
Принята к публикации / Accepted 01.09.2022