



Серия «Математика»
2022. Т. 41. С. 121–130

Онлайн-доступ к журналу:
<http://mathizv.isu.ru>

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

Научная статья

УДК 517.957, 517.958, 532.5.032

MSC 76D05, 45K05, 76D45

DOI <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.121>

Двумерное термокапиллярное движение жидкости в открытом канале

Е. Н. Лемешкова¹

¹ Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск, Российская Федерация

✉ elena_cher@icm.krasn.ru

Аннотация. Изучается задача о двумерном термокапиллярном движении жидкости в плоском канале. Температура в жидкости распределена по квадратичному закону, что согласуется с полем скоростей типа Хименца. На дне канала температура зависит от времени, что позволяет управлять движением внутри слоя. В качестве математической модели взяты уравнения Обербека – Буссинеска. Возникающая начально-краевая задача является сильно нелинейной и обратной относительно градиента давления вдоль канала. Для её решения применен модифицированный метод Галёркина, где в качестве базисных функций выбраны полиномы Лежандра. Коэффициенты разложения есть функции времени, на которые была получена система нелинейных ОДУ. В результате применения метода Рунге – Кутты – Фельберга было найдено решение, которое с ростом времени стремится к решению стационарной задачи, если стабилизируется температура на дне канала.

Ключевые слова: свободная граница, термокапиллярность, обратная задача, уравнения Обербека – Буссинеска, метод Галеркина

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-01-00234).

Ссылка для цитирования: Лемешкова Е. Н. Двумерное термокапиллярное движение жидкости в открытом канале // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2022. Т. 41. С. 121–130.

<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.121>

Research article

Two-dimensional Thermocapillary Fluid Motion in an Open Channel

Elena N. Lemeshkova¹

¹ Institute of Computational Modelling SB RAS, Krasnoyarsk, Russian Federation
✉ elena_cher@icm.krasn.ru

Abstract. The problem of two-dimensional thermocapillary fluid motion in a flat channel is studied. The temperature in the liquid is distributed according to the quadratic law, which is consistent with the velocity field of the Himentz type. At the bottom of the channel, the temperature depends on the time, which allows you to control the movement inside the layer. The Oberbeck-Boussinesq equations are taken as a mathematical model. The resulting initial - boundary value problem is highly nonlinear and inverse with respect to the pressure gradient along the channel. To solve it, a modified Galerkin method was used, where Legendre polynomials were chosen as the basis functions. The expansion coefficients are functions of time for which a system of nonlinear ODES was obtained. As a result of the application of the Runge-Kutta-Felberg method, a solution was found that, with increasing time, tends to solve a stationary problem if the temperature at the bottom of the channel stabilizes.

Keywords: free boundary, thermocapillarity, inverse problem, Oberbeck-Boussinesq equations, Galerkin method

Acknowledgements: The study was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research (Project No. 20-01-00234).

For citation: Lemeshkova E. N. Two-dimensional Thermocapillary Fluid Motion in an Open Channel. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2022, vol. 41, pp. 121–130. (in Russian)
<https://doi.org/10.26516/1997-7670.2022.41.121>

1. Введение

В настоящее время появились новые приложения, вызванные необходимостью предсказывать динамику движения жидких сред с поверхностями раздела, в частности, со свободной границей, при пониженной гравитации: рост кристаллов, сварка, пленочные течение и т. д. При этом существенное влияние оказывает зависимость поверхностного натяжения от температуры [11; 13]. Этот важный фактор вызывает многообразие динамики межфазной поверхности при наличии в системе неоднородного поля температур.

В статьях [4; 6] изучена стационарная задача о термокапиллярной конвекции невесомой жидкости со свободной поверхностью и подогреваемым дном в случае квадратичной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры. В результате разделения переменных была получена нелинейная двухточечная краевая задача, описы-

вающая движение жидкости в слое, где постоянная продольный градиент давления играет роль собственного значения, а числа Прандтля и Марангони — параметры. Установлена неединственность решения этой задачи. В случае полупространства подобная задача исследована в [7], только, в отличие от [4; 6], на свободной границе поддерживается линейное распределение температуры.

Отметим, что в большинстве задач, связанных с эффектом Марангони, среда предполагается ньютоновской. В работе [2] исследована задача для пограничного слоя нелинейной обобщенно-ньютоновской вязкой жидкости. Установлена теорема единственности решения. Обобщение теоремы существования и единственности классического решения системы уравнений температурного пограничного слоя для плоскопараллельного течения жидкости в вязкой неньютоновской среде приведено в [3].

Данная работа посвящена исследованию решений начально-краевой задачи, которая возникает при описании двумерного течения вязкой теплопроводной жидкости, находящейся в открытом плоском канале. Температура в слое распределена по квадратичному закону, а коэффициент поверхностного натяжения, в отличие от [4; 6; 7], линейно зависит от температуры. Стационарная задача в такой постановке изучена в работе [10]. Возникающая начально-краевая задача является сильно нелинейной и обратной относительно градиента давления вдоль канала. Для решения нестационарной задачи применяется тау-метод, где в качестве базисных функций выбраны полиномы Лежандра. Коэффициенты разложения есть функции времени, на которые была получена система нелинейных ОДУ. В результате применения метода Рунге – Кутта было найдено решение, которое с ростом времени стремится к решению стационарной задачи, найденному в работе [10], если с ростом времени стабилизируется температура на дне канала. Приведены результаты расчётов, показывающие различные способы управления движением внутри канала с помощью задания температуры на нижней твёрдой стенке.

2. Постановка задачи

Рассматривается плоское движение вязкой теплопроводной жидкости с нижней твёрдой стенкой $y = 0$ и верхней свободной границей $y = l = \text{const} > 0$ в отсутствии массовых сил. Поле скорости и температуры системы уравнений вязкой теплопроводной жидкости в слое будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_1(x, y, t) = w(y, t)x, \quad u_2(x, y, t) = v(y, t), \\ \theta(x, y, t) = a(y, t)x^2 + b(y, t). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Такое представление поля скоростей соответствует известному решению Хименца [8]. Подстановка (2.1) в уравнения движения и переноса

тепла и их анализ на совместность приводит к следующим следствиям: функции $w(y)$, $v(y)$, $a(y)$ и $b(y)$ есть решения нелинейной системы уравнений

$$\begin{aligned} w_t + vw_y + w^2 &= \nu w_{yy} + f, & w + v_y &= 0, \\ a_t + 2wa + va_y &= \chi a_{yy}, \\ b_t + vb_y &= \chi b_{yy} + 2\chi a, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\rho > 0, \nu > 0, \chi > 0$ — постоянные плотность, кинематическая вязкость и температуропроводность жидкости, f — произвольная функция времени. Давление в жидкости распределено по закону

$$\frac{1}{\rho} p = d(y, t) - f \frac{x^2}{2}, \quad d_y = \nu v_{yy} - v_t - \nu v_y, \quad (2.3)$$

так что функция f характеризует градиент давления вдоль оси x .

Будем считать, что на твёрдой стенке $y = 0$ (подложке) задано распределение температуры $\theta(x, 0, t) = a_1(t)x^2 + b_1(t)$. Следовательно, температурное поле имеет в точке $x = 0$ экстремум: при $a_1(t) < 0$ — максимум, а при $a_1(t) > 0$ — минимум. Таким образом, на твёрдой стенке для искомым функций заданы условия

$$w(0, t) = v(0, t) = 0, \quad a(0, t) = a_1(t), \quad b(0, t) = b_1(t). \quad (2.4)$$

с известными функциями $a_1(t), b_1(t)$.

На свободной границе $y = l$ выполнены условия

$$v(l, t) = 0, \quad w_y(l, t) = -2\alpha\mu^{-1}a(l, t) \quad (2.5)$$

$$ka_y(l, t) + \gamma a(l, t) = 0, \quad kb_y(l, t) + \gamma b(l, t) = 0. \quad (2.6)$$

Условия (2.5) есть следствия кинематического и динамического условий, соответственно. В условиях (2.6), которые следуют из условия теплового контакта [1], $k > 0$ — коэффициент теплопроводности, $\gamma = \text{const} \geq 0$ — коэффициент межфазного теплообмена. При выводе условий (2.5) было учтено, что коэффициент поверхностного натяжения σ линейно зависит от температуры: $\sigma(\theta) = \sigma^0 - \alpha(\theta - \theta^0)$, $\sigma^0, \alpha, \theta^0 = \text{const} > 0$. Из условия для нормальных напряжений получается, что свободная поверхность остаётся плоской. Данное предположение может выполняться, например, при действии достаточно большого капиллярного давления (величина σ^0 достаточно велика) [11].

Для полной постановки задачи необходимо добавить начальные условия

$$w(y, 0) = w_0(y), v(y, 0) = v_0(y), a(y, 0) = a_0(y), b(y, 0) = b_0(y). \quad (2.7)$$

Замечание 1. Поставленная задача является обратной, поскольку наряду с функциями w, v, a, b градиент давления вдоль слоя f также неизвестен. Само давление по известным v и f определяется по формуле (2.3).

3. Численные результаты

Учитывая, что из второго уравнения (2.2)

$$v(y, t) = - \int_0^y w(z, t) dz \tag{3.1}$$

выпишем полностью полученную нелинейную начально-краевую задачу (2.2), (2.4)–(2.7) в безразмерном виде для функций $w(y, t)$, $a(y, t)$ и $f(t)$

$$L_1(W, F) \equiv W_t - \text{Pr}W_{\xi\xi} + W_{\xi} \left(\int_0^{\xi} W dz \right) - W^2 + F = 0, \quad 0 < \xi = y/l < 1, \tag{3.2}$$

$$L_2(W, A) \equiv A_t - A_{\xi\xi} + A_{\xi} \left(\int_0^{\xi} W dz \right) - 2AW = 0, \quad 0 < \xi < 1, \tag{3.3}$$

$$W(\xi, 0) = W_0(\xi), \quad A(\xi, 0) = A_0(\xi), \tag{3.4}$$

$$W(0, t) = 0, \quad A(0, t) = A_1(t), \quad W_{\xi}(1, t) = -2MA(1, t), \tag{3.5}$$

$$A_{\xi}(1, t) + \text{Bi}A(1, t) = 0, \quad \int_0^1 W(z, t) dz = 0, \tag{3.6}$$

где $\text{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля, $M = \alpha\tilde{a}l^3/\chi\mu$ — число Марангони, $\text{Bi} = \gamma l/k$ — число Био. В (3.2)–(3.6) в качестве характерных масштабов длины, времени и функций w , a и f взяты величины l , $\frac{l^2}{\chi}$, $\frac{\chi}{l^2}$, \tilde{a} , $\frac{\chi^2}{l^4}$, соответственно, $\tilde{a} = \max_t(a_1(t))$. Интегральное условие в (3.6) получено из первого условия (2.5) с учётом (3.1) и является дополнительным для определения F .

Приближённое решение задачи (3.2)–(3.6) будем искать в виде сумм [5]

$$W_n(\xi, t) = \sum_{k=1}^n W^k(t)R_k(\xi), \quad A_n(\xi, t) = \sum_{k=0}^n A^k(t)R_k(\xi), \tag{3.7}$$

где $R_k(\xi)$ — смещённые полиномы Лежандра. Из интегрального условия (3.6), учитывая ортогональность полиномов Лежандра на отрезке $[0, 1]$ с весом 1 [12], следует, что $W^0(t) = 0$. Неизвестные коэффициенты $W^k(t)$, $A^k(t)$ и градиент давления $F(t)$ находятся из системы галёркинских приближений ($m = 0, \dots, n - 2$)

$$\int_0^1 L_1(W_n, F)R_m(\xi) d\xi = 0, \quad \int_0^1 L_2(W_n, A_n)R_m(\xi) d\xi = 0, \tag{3.8}$$

и преобразованных граничных условий (3.5), (3.6)

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k W^k(t) = 0, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k A^k(t) = A_1(t),$$

$$\sum_{k=0}^n W^k(t) R'_k(1) = -2M \sum_{k=0}^n A^k(t), \quad \sum_{k=0}^n A^k(t) R'_k(1) + \text{Bi} \sum_{k=0}^n A^k(t) = 0. \quad (3.9)$$

В частности, неизвестный градиент давления $F(t)$ определяется по известной W_n из уравнения $\int_0^1 L_1(W_n, F) R_0(\xi) d\xi = 0$, а неизвестные коэффициенты с номерами $n, n-1$, используя граничные условия (3.9), исключаем из уравнений (3.8). Таким образом, уравнения (3.8) образуют замкнутую систему нелинейных ОДУ на коэффициенты $W^k(t), A^k(t), k = 0, \dots, n-2$ и градиент давления $F(t)$. Для её решения был применен метод Рунге – Кутты – Фельберга.

На рис. 1 построены профили безразмерных градиента давления $F(t)$ (рис. 1, а) и вертикальной скорости $V(\xi, t)$ (рис. 1, б) для случая, когда $\text{Pr} = 0.2, \text{Bi} = 2, M = 10, n = 10, A_1(t) = 1 - e^{-0.5t} \sin(5t)$. При этом разность значений полученных при $t = 1000, n = 10$ и 11 для $F(t)$ составляет порядка 10^{-11} . Видно, что с ростом времени решение выходит на стационарный режим, причем градиент давления стремится к стационарному значению $F^s = 4.5359$. Здесь и далее верхний индекс 's' означает стационарное решение. Отметим, что в работе [8] при таких значениях безразмерных параметров и $A^s(0) = 1$ было найдено три различных решения стационарной задачи. На рис. 2 построены профили безразмерных градиента давления $F(t)$ (рис. 2, а) и вертикальной скорости $V(\xi, t)$ (рис. 2, б) для случая, когда $M = -10, A_1(t) = 1 - 2e^{-0.5t} \sin(5t)$. Здесь также наблюдается сходимость к стационарному режиму, причем градиент давления стремится к одному из трех стационарных значений $F^s = -1.3368$, найденных в работе [8]. На рис. 2 видно при $t = 1$ и $t = 2$ градиент давления имеет разный знак, при этом направление движения жидкости вдоль свободной границы также меняется: при $t = 1$ вдоль свободной границы формируется возвратное течение, т. е. жидкость движется в противоположном направлении оси y . Все численные расчёты проводились для случая, когда продольный градиент температуры на нижней твёрдой стенке распределён по закону $A_1(t) = \gamma_1 + \gamma_2 e^{-\gamma_3 t} \sin(\gamma_4 t)$, где коэффициенты γ_2, γ_4 отвечают за амплитуду и частоту колебаний соответственно. Установлено, что, если $A^s(0) = \gamma_1 \neq 0$ и $\gamma_3 > 0$, то будет наблюдаться сходимость решения к стационарному режиму (рис. 1, 2), а при $\gamma_3 \leq 0$ предел функции $A_1(t)$ при $t \rightarrow \infty$ не существует и решение не стремится к стационарному (рис. 3). Следовательно, задавая различный вид градиента температуры на нижней твердой стенке, мы можем управлять движением жидкости в слое.

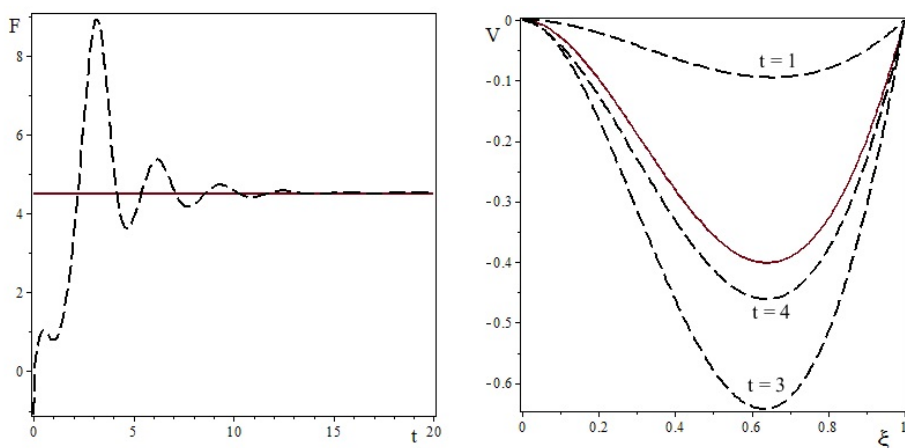


Рис. 1. Профили безразмерных градиента давления $F(t)$ (а) и вертикальной скорости $V(\xi, t)$ (б) при $M = 10$ и $A_1(t) = 1 - e^{-0.5t} \sin(5t)$; стационарное решение (—)

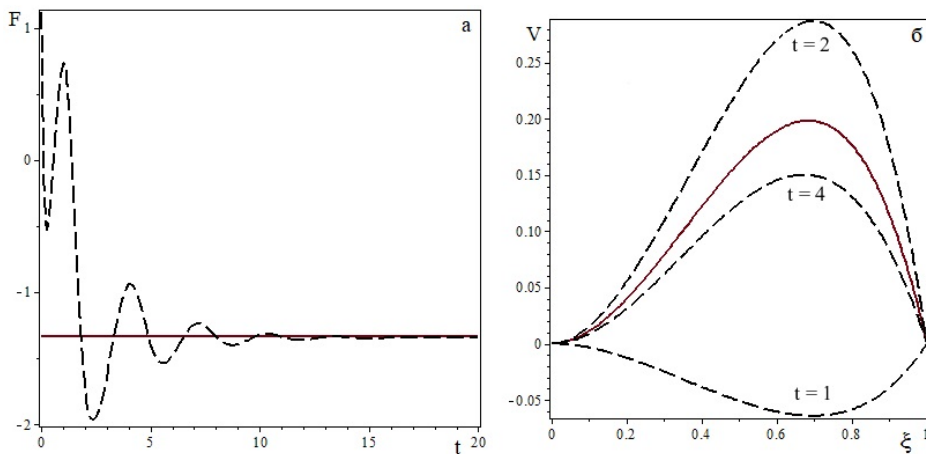


Рис. 2. Профили безразмерных градиента давления $F(t)$ (а) и вертикальной скорости $V(\xi, t)$ (б) при $M = -10$ и $A_1(t) = 1 - 2e^{-0.5t} \sin(5t)$; стационарное решение (—)

В случае теплоизолированной свободной границы ($Bi = 0$) решение нестационарной задачи стремится к единственному решению стационарной задачи $F^s = 3.97$. На рис. 4 изображен случай, когда $A_1(t) = 2e^{-0.5t} \sin(5t)$. Здесь решение с ростом времени выходит на единственное стационарное решение — покой.

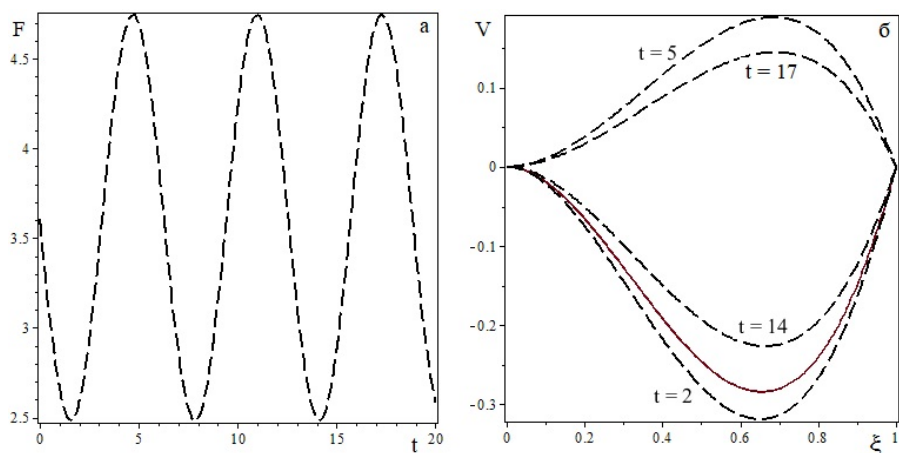


Рис. 3. Профили безразмерных градиента давления $F(t)$ (а) и вертикальной скорости $V(\xi, t)$ (б) при $M = 10$, $A_1(t) = \sin(t)$; стационарное решение (—)

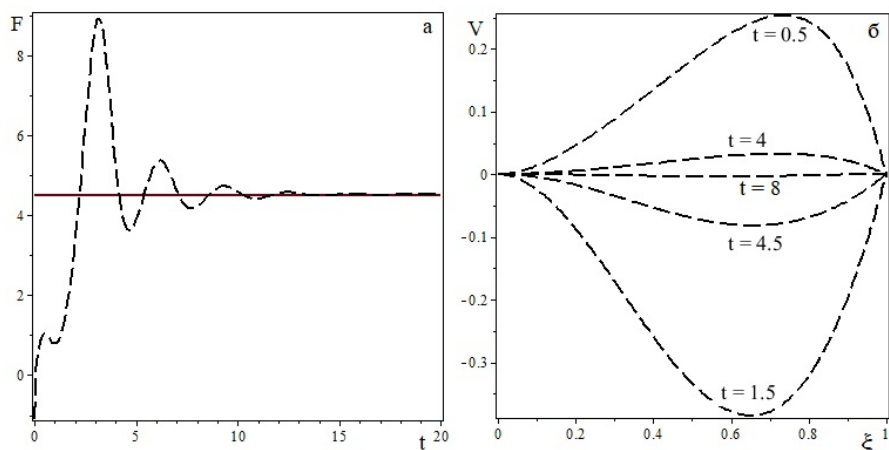


Рис. 4. Профили безразмерных градиента давления $F(t)$ (а) и вертикальной скорости $V(\xi, t)$ (б) при $M = 10$, $Bi = 0$ и $A_1(t) = e^{-0.5t} \sin(5t)$

4. Заключение

Изучена начально-краевая задача о двумерном движении жидкости в плоском канале, на дне которого поддерживается заданное распределение температуры, а верхняя стенка — свободная граница. Численно установлено, что если продольный градиент температуры со временем стабилизируется, то решение нестационарной задачи выходит на стационарный режим. Приведены результаты расчётов, показывающие различные способы управления движением внутри канала с помощью задания температуры на нижней твёрдой стенке.

Список источников

1. Андреев В. К., Захватаев В. Е., Рябицкий Е. А. Термокапиллярная неустойчивость. Новосибирск : Наука, 2000. 279 с.
2. Кисатов М. А. Система уравнений пограничного слоя Марангони в среде с реологическим законом О. А. Ладыженской // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2021. Т. 498. С. 41–44. <https://doi.org/10.31857/S2686954321030097>
3. Кисатов М. А., Самохин В. Н., Чечкин Г. А. О температурном пограничном слое в вязкой неньютоновской среде // Доклады РАН. Математика, информатика, процессы управления. 2022. Т. 502. С. 28–33. <https://doi.org/10.31857/S2686954322010076>
4. Bobkov N. N., Gupalo Yu. P. The flow pattern in a liquid layer and the spectrum of the boundary-value problem when the surface tension depends non-linearly on the temperature // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 1996. Vol. 60, N 6. P. 999–1005. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(96\)00122-0](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(96)00122-0)
5. Fletcher C. A. J. Computational Galerkin methods. Berlin ; Heidelberg ; New York : Tokyo Springer-Verlag, 1984. 302 p.
6. Gupalo Y. P., Ryazantsev Y. S. Thermocapillary motion of a liquid with a free surface with nonlinear dependence of the surface tension on the temperature // Fluid Dynamics. 1988. Vol. 23. P. 752–757. <https://doi.org/10.1007/BF02614155>
7. Gupalo Y. P., Ryazantsev Y. S., Skvortsova A. V. Effect of thermocapillary forces on free-surface fluid motion // Fluid Dynamics. 1989. Vol. 24. P. 657–661. <https://doi.org/10.1007/BF01051714>
8. Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder // Dinglers Polytech J. 1911. Vol. 326. P. 321–440.
9. Legros J. C., Limbourg-Fontaine M. C., Petre G. Influence of a surface tension minimum as a function of temperature on the marangoni convection // Acta Astronautica. 1984. Vol. 11. P. 143–147. [https://doi.org/10.1016/0094-5765\(84\)90005-5](https://doi.org/10.1016/0094-5765(84)90005-5)
10. Lemeshkova E. N. Two-Dimensional Plane Steady-State Thermocapillary Flow // Fluid Dynamics. 2019. Vol. 54. P. 33–41. <https://doi.org/10.1134/S0015462819010087>
11. Narayanan R., Schwabe D. Interfacial fluid Dynamics and Transport Processes. Springer, 2003. 372 p.
12. Sege G. Orthogonal Polynomials American Mathematical Society Providence. Rhode Island, 1939. 440 p.
13. Zeytounian R. Kh. The Benard–Marangoni thermocapillary-instability problem // Physics-Uspexhi. 1998. Vol. 41, N 3. P. 241–267. <http://dx.doi.org/10.1070/PU1998v041n03ABEH000374>

References

1. Andreev V.K., Ryabitskiy E.A., Zachvataev. V.E. *Thermocapillary instability*. Novosibirsk, Nauka Publ., 2000, 279 p. (in Russian)
2. Kisatov M.A. System of equations for the Marangoni boundary layer in media with rheological law og O.A. Ladyzhenskaya. *Doklady Mathematics*, 2021, vol. 103, no. 3, pp. 130–132. <https://doi.org/10.1134/S1064562421030091>

3. Kisatov M.A., Samokhin V.N., Chechkin G.A. On thermal Boundary layer in a viscous non-newtonian medium. *Doklady Mathematics*, 2022, vol. 105, pp. 23–27. <https://doi.org/10.1134/S1064562422010070>
4. Bobkov N.N., Gupalo Yu.P. The flow pattern in a liquid layer and the spectrum of the boundary-value problem when the surface tension depends non-linearly on the temperature. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1996, vol. 60, no. 6, pp. 999–1005. [https://doi.org/10.1016/S0021-8928\(96\)00122-0](https://doi.org/10.1016/S0021-8928(96)00122-0)
5. Fletcher C.A.J. *Computational Galerkin methods*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984, 302 p.
6. Gupalo Y.P., Ryazantsev Y.S. Thermocapillary motion of a liquid with a free surface with nonlinear dependence of the surface tension on the temperature. *Fluid Dynamics*, 1988, vol. 23, pp. 752–757. <https://doi.org/10.1007/BF02614155>
7. Gupalo Y.P., Ryazantsev Y.S., Skvortsova A.V. Effect of thermocapillary forces on free-surface fluid motion. *Fluid Dynamics*, 1989, vol. 24, pp. 657–661. <https://doi.org/10.1007/BF01051714>
8. Hiemenz K. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder. *Dinglers Polytech J*, 1911, vol. 326, pp. 321–440.
9. Legros J.C., Limbourg-Fontaine M.C., Petre G. Influence of a surface tension minimum as a function of temperature on the marangoni convection. *Acta Astronautica*, 1984, vol. 11, pp. 143–147. [https://doi.org/10.1016/0094-5765\(84\)90005-5](https://doi.org/10.1016/0094-5765(84)90005-5)
10. Lemeshkova E.N. Two-Dimensional Plane Steady-State Thermocapillary Flow. *Fluid Dynamics*, 2019, vol. 54, pp. 33–41. <https://doi.org/10.1134/S0015462819010087>
11. Narayanan R., Schwabe D. *Interfacial fluid Dynamics and Transport Processes*. Springer, 2003, 372 p.
12. Sege G. *Orthogonal Polynomials American Mathematical Society Providence*. Rhode Island, 1939, 440 p.
13. Zeytounian R.Kh. The Benard–Marangoni thermocapillary-instability problem. *Physics-Uspeski*, 1998, vol. 41, no. 3, pp. 241–267. <http://dx.doi.org/10.1070/PU1998v041n03ABEH000374>

Об авторах

Лемешкова Елена Николаевна,
канд. физ.-мат. наук, науч. сотр.,
Институт вычислительного
моделирования СО РАН, Российская
Федерация, 630036, г. Красноярск,
elena_cher@icm.krasn.ru,
<https://orcid.org/0000-0002-9059-2876>

About the authors

Elena N. Lemeshkova, Cand. Sci.
(Phys.-Math.), Researcher, Institute of
Computational Modelling SB RAS,
Krasnoyarsk, 630036, Russian
Federation, elena_cher@icm.krasn.ru,
<https://orcid.org/0000-0002-9059-2876>

Поступила в редакцию / Received 18.03.2022
Поступила после рецензирования / Revised 13.05.2022
Принята к публикации / Accepted 20.05.2022