Серия «Математика»
2020. Т. 34. С. 77—92

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.983.5, 517.968.7
MSC 34G10, 45K05, 45N05
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.34.77

О разрешимости в классе распределений вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах*

М. В. Фалалеев
Иркутский государственный университет, Иркутск, Российская Федерация

Аннотация. В статье представлен новый подход к построению обобщенных решений вырожденных интегро-дифференциальных уравнений сверточного типа в банаховых пространствах. Главная идея предлагаемой методики состоит в отказе от условия существования полного жорданова набора для фредгольмова оператора при старшей производной относительно операторного пучка, образованного остальными операторными коэффициентами дифференциальной части и операторным ядром интегральной составляющей уравнения. Условия накладываются на значения специально построенной оператор-функции на базисных элементах ядра фредгольмова оператора. При таком подходе дифференциальная часть уравнения кроме старшей производной может включать любую комбинацию младших производных, что позволяет с единых позиций рассматривать сверточные интегро-дифференциальные уравнения без специального учета структуры его операторного пучка. Предложенный метод является обобщением способа, основанного на использовании жордановых наборов фредгольмовых операторов, а в случае существования последних совпадает с ним. Обобщенные решения строятся в виде свертки фундаментальной оператор-функции, соответствующей исследуемому уравнению, и функции, включающей в себя правую часть уравнения и начальные данные. Условия, при которых такое обобщенное решение не содержит сингулярной составляющей, а регулярная составляющая обращает исходное уравнение в тождество и удовлетворяет начальным данным и будут обеспечивать разрешимость исходной задачи в классе функций соответствующей гладкости. При этом построенное обобщенное решение окажется классическим. Доказана теорема о виде фундаментальной оператор-функции, абстрактные результаты проиллюстрированы на примерах начально-краевых задач

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 20–07–00407 А.

прикладного характера из теории электромагнитных полей, теории колебаний в вязко-упругих средах, теории колебаний термоупругих пластин.

Ключевые слова: банаховы пространства, фредгольмов оператор, обобщенная функция, фундаментальное решение, свертка, резольвента, задача Коши – Дирихле.

Посвящается 80-летию профессора
Николая Александровича Сидорова

1. Введение

В данной работе исследуется задача Коши вида

$$Bu^{(N)}(t) - \sum_{i=1}^{l} A_{m_i} u^{(m_i)}(t) - \int\limits_0^t k(t-s)u(s)ds = f(t), \tag{1.1}$$

$$u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1,\ \ldots,\ u^{(N-1)}(0) = u_{N-1}, \tag{1.2}$$

где $N \geq 2$, $0 \leq m_1 < m_2 < \ldots < m_l < N$, B, $A_{m_l}, \ldots A_{m_1}$, $k(t)$ — замкнутые линейные операторы с плотными областями определения, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, оператор B — фредгольмов [1], $f(t)$ — достаточно гладкая функция со значениями в E_2.

Интерес к задачам (1.1)-(1.2) продиктован, как минимум, двумя причинами. Во-первых, это наиболее общая постановка в абстрактном виде целого ряда начально-краевых задач прикладного характера (см., например, п. 4 настоящей работы). Во-вторых, задача (1.1)-(1.2) разрешима в классе $C^N(t \geq 0; E_1)$ только при выполнении жестких условий связи между начальными условиями (1.2) и правой частью уравнения (1.1) функцией $f(t)$. Этот эффект наблюдали многие исследователи см. библиографический обзор в [11] или в [9]. Так в работе [5] в терминах жордановых наборов нетеровых операторов связи между начальными условиями (1.2) и функцией $f(t)$ были выписаны в явном виде для дифференциального уравнения 1-го порядка ($N = 1$ и $k(t) \equiv 0$). Отказ от условий связи привел к постановке задачи (1.1)-(1.2) в классе $K'_+(E_1)$ обобщенных функций с ограниченным слева носителем и в работе [6] такое решение было построено в виде суммы сингулярной составляющей с точечным носителем и регулярной составляющей. Однако при этом остался открытым вопрос о единственности построенного таким образом (покомпонентно) решения. Полностью решить вопрос об однозначной разрешимости задачи (1.1)-(1.2) в классе $K'_+(E_1)$ удалось с помощью конструкции $\mathcal{E}_N(t)$ фундаментальной оператор-функции (аналога фундаментального решения дифференциального оператора [2]). При этом требовалось, чтобы в уравнении (1.1) все операторные коэффициенты $A_i \neq 0$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$ были ненулевыми и фредгольмов оператор B имел полный жорданов набор относительно оператор-функции

$$A_{N-1} + A_{N-2}t + \cdots + A_0 \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} + \frac{t^{N-1}}{(N-1)!}\theta(t) * k(t)\theta(t)$$

(см. [7] теор. 4, стр. 76). В этом случае искомое единственное обобщенное решение восстанавливается в виде свертки $\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * F(t)$, здесь

$$F(t) = f(t)\theta(t) + Bu_{N-1}\delta(t) + Bu_{N-2}\delta'(t) + \cdots + Bu_0\delta^{(N-1)}(t). \quad (1.3)$$

Отказ хотя бы от части условий $A_i \neq 0$, $i = 0, 1, \ldots, N-1$ приводит к невозможности построения жорданова набора и, как следствие, ставит задачу поиска альтернативы этому условию. В данной работе предложен такой подход.

2. Вспомогательные сведения и основные обозначения

Далее будем предполагать выполненным следующее условие:

A) $D(A) = \bigcap\limits_{i=1}^{l} D(A_{m_i})$, $D(k) \equiv D(k(t))$ – не зависит от времени t, $\overline{D(A)} = \overline{D(B)} = \overline{D(k)} = E_1$, $D(B) \subset D(A)$, $D(B) \subset D(k)$, $\overline{R(B)} = R(B)$, $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n \geq 1$.

Обозначим через: $\{\varphi_i\} \in E_1$ – базис ядра $N(B)$ оператора B, через $\{\psi_i\} \in E_2^*$ – базис ядра $N(B^*)$ сопряженного оператора B^*, здесь $i = 1, \ldots, n$, $\{\gamma_i\} \in E_1^*$ и $\{z_i\} \in E_2$ – соответствующие этим базисам биортогональные системы элементов, т.е. $\langle \varphi_i, \gamma_j \rangle = \langle z_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$, δ_{ij} — символы Кронекера. Как показано в работе [1], при этих предположениях существует ограниченный оператор Треногина-Шмидта вида

$$\Gamma = \left(\tilde{B}\right)^{-1} = \left(B + \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i\right)^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1).$$

Введем рекуррентное семейство ограниченных операторов:

$$L_0 = I,\ L_{-1} = L_{-2} = \cdots = L_{-(N-1)} \equiv 0,$$

$$L_k = A_{m_l}\Gamma L_{k-(N-m_l)} + \cdots + A_{m_2}\Gamma L_{k-(N-m_2)} + A_{m_1}\Gamma L_{k-(N-m_1)},\ k \geq 1.$$

Индукцией по k доказывается свойство псевдокоммутирования

$$L_k = L_{k-(N-m_l)} A_{m_l}\Gamma + \cdots + L_{k-(N-m_2)} A_{m_2}\Gamma + L_{k-(N-m_1)} A_{m_1}\Gamma.$$

С помощью этого семейства построим следующую оператор-функцию ограниченных операторов

$$\mathcal{U}_N(t) = \sum_{k=0}^{\infty} L_k \frac{t^{k+N-1}}{(k+N-1)!}.$$

Замечание 1. Для введённой оператор-функции $\mathcal{U}_N(t)$ справедливо иное (интегральное) представление через операторную резольвенту

$$\tilde{\mathcal{R}}_N(\lambda; A_{m_l}\Gamma, \ldots, A_{m_2}\Gamma, A_{m_1}\Gamma) =$$

$$= \Big(\lambda^N I - \lambda^{m_l} A_{m_l}\Gamma - \cdots - \lambda^{m_2} A_{m_2}\Gamma - \lambda^{m_1} A_{m_1}\Gamma\Big)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L_k}{\lambda^{k+N}}$$

в виде контурного интеграла

$$\mathcal{U}_N(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_\rho} \tilde{\mathcal{R}}_N(\lambda; A_{m_l}\Gamma, \ldots, A_{m_2}\Gamma, A_{m_1}\Gamma) e^{\lambda t} d\lambda,$$

здесь C_ρ — окружность комплексной плоскости с центром в начале координат и радиусом $\rho > R$, где

$$\frac{\|A_{m_l}\Gamma\|}{R^{N-m_l}} + \ldots + \frac{\|A_{m_2}\Gamma\|}{R^{N-m_2}} + \frac{\|A_{m_1}\Gamma\|}{R^{N-m_1}} < 1.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости утверждения

Лемма 1. *Оператор-функция $\mathcal{U}_N(t)\theta(t)$ является фундаментальной для дифференциального оператора*

$$I\delta^{(N)}(t) - \sum_{i=1}^{l} A_{m_i}\Gamma\delta^{(m_i)}(t).$$

Обозначим через $\mathcal{R}(t)$ резольвенту ядра $k(t)\Gamma\theta(t) * \mathcal{U}_N(t)\theta(t)$, тогда справедлива следующая

Лемма 2. *Обобщенная оператор-функция*

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t) = \mathcal{U}_N(t)\theta(t) * \Big(I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)$$

является фундаментальной для интегро-дифференциального оператора

$$\tilde{\mathcal{L}}_N(\delta(t)) = I\delta^{(N)}(t) - \sum_{i=1}^{l} A_{m_i}\Gamma\delta^{(m_i)}(t) - k(t)\Gamma\theta(t),$$

причем, очевидно, $k(t)\Gamma\theta(t) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) \equiv \mathcal{R}(t)$.

Пусть $G(t) = \frac{d^N}{dt^N}\tilde{\mathcal{E}}_N(t)$, построим оператор-функцию (регулярную)

$$\mathcal{M}(t) = G(t) - I\delta(t) = \mathcal{R}(t)\theta(t) + \mathcal{U}_N^{(N)}(t)\theta(t) * \Big(I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)\Big)$$

и введем проектор в пространстве E_2

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i,$$

здесь и далее везде через $\frac{d^N}{dt^N}$ будем обозначать дифференцирование в обобщенном смысле, а через $\mathcal{U}_N^{(N)}(t)$ — классическое дифференцирование.

Для каждого элемента $z_i \in E_2$, $i = 1, \dots, n$ обозначим $l_k(\varphi_i) = \mathcal{M}^{(k)}(0)z_i$, причем $\langle l_k(\varphi_i), \psi_j \rangle = 0$, $j = 1, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots, p_i - 1$, однако не все числа $\langle l_{p_i}(\varphi_i), \psi_j \rangle$, $j = 1, \dots, n$ равны нулю. Поскольку при $m_l \leq N-2$, $\mathcal{M}^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, N-m_l-2$ и $\mathcal{M}^{(N-m_l-1)}(0) = A_{m_l}\Gamma$, то $p_i \geq 1$.

Замечание 2. Приведенные здесь условия означают разрешимость (см. [1]) уравнений $B\varphi_i^{(k+1)} = \mathcal{M}^{(k)}(0)z_i$, $k = 0, 1, \dots, p_i - 1$, при этом частное решение имеющее вид $\varphi_i^{(k+1)} = \Gamma\mathcal{M}^{(k)}(0)z_i$ можно назвать *формальным $(k+1)$-присоединенным элементом* к φ_i. Совокупность элементов $\{\varphi_i^{(k)}\}$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots . p_i$, в которой $\varphi_i^{(k+1)} = \varphi_i$, если $\mathcal{M}^{(k)}(0)z_i = 0$, можно назвать *набором формально присоединенных элементов*, а совокупность $\{\varphi_i^{(k)}\}$, $k = 1, \dots . p_i$ — *цепочкой формально присоединенных элементов*, параметр p_i — *длиной* цепочки формально присоединенных элементов. Очевидно, что так построенный набор $\{\varphi_i^{(k)}\}$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots . p_i$ в общем случае не будет являться линейно независимой системой элементов.

Далее занумеруем базисные элементы ядра $\{\varphi_i\} \in N(B)$ в порядке возрастания параметров p_i, т. е. $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$. Набор формально присоединенных элементов $\{\varphi_i^{(k)}\}$ назовем *полным*, если выполнено условие $\det \|\langle l_{p_i}(\varphi_i), \psi_j \rangle\| \neq 0$, в этом случае базис ядра сопряженного оператора $\{\psi_i\} \in N(B^*)$ можно перестроить таким образом (см. [1]), чтобы выполнялись равенства $\langle l_{p_i}(\varphi_i), \psi_j \rangle = \delta_{ij}$. Поэтому далее будем считать набор $\{\varphi_i^{(k)}\}$ полным, а базис $\{\psi_i\}$ перестроенным.

Итак, будем предполагать выполненным следующее условие:

B)

$$\langle l_k(\varphi_i), \psi_j \rangle = \begin{cases} 0, & k = 0, 1, \dots, p_i - 1, \\ \delta_{ij}, & k = p_i, \end{cases} \quad i, j = 1, \dots, n,$$

причем

$$\langle l_{p_i+k}(\varphi_i), \psi_j\rangle = 0,\ i = 1, \ldots, n-1,\ j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p_n - p_i.$$

Замечание 3. В случае «полного» дифференциального оператора (т. е. $A_i \neq 0,\ i = 0, 1, \ldots, N-1$) в уравнении (1.1) условие **B)** превращается в условие существования полного обобщенного жорданова набора из работы [3]. Именно в таком смысле условие **B)** использовалось в работах [7] и [8].

Замечание 4. В силу предположения $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$ сгруппируем базисные элементы ядра $N(B)$ следующим образом: в первую группу объединим l_1 первых элементов базиса с минимальной длиной цепочек формально присоединенных элементов p_1; во вторую группу объединим следующие l_2 элементов базиса с длиной цепочек $p_2 > p_1$ и т.д. в последнюю группу объединим последние l_m элементов базиса с максимальной длиной цепочек p_n. Таким образом сформируется m блоков и $l_1+l_2+\ldots+l_m = n$, в этом случае для проектора Q получается разложение вида

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{j=1}^{m} \tilde{Q}_j,\ \text{здесь}\ \tilde{Q}_j = \sum_{i=l_1+l_2+\ldots+l_{j-1}+1}^{l_1+l_2+\ldots+l_j} Q_i,$$

причем в силу условия **B)**

$$\tilde{Q}_j \mathcal{M}^{(k)}(0)\tilde{Q}_i = \begin{cases} \delta_{ij}\tilde{Q}_i, & k = p_i, \\ 0, & k < p_i. \end{cases} \tag{2.1}$$

Очевидно длины цепочек элементов φ_i, попавших в один j-й блок, одинаковы и поэтому будем их обозначать p_j.

Обозначим через $\mathcal{M}_1(t)$ резольвенту ядра

$$-\sum_{i=1}^{n} Q_i \mathcal{M}^{(p_i+1)}(t)\theta(t) = -\sum_{j=1}^{m} \tilde{Q}_j \mathcal{M}^{(p_j+1)}(t)\theta(t),$$

тогда в силу её построения $Q\delta(t) * \mathcal{M}_1(t) = \mathcal{M}_1(t)$ и в соответствии с правилом дифференцирования свертки обобщенных функций см. [2] справедливо свойство псевдокоммутирования

$$\tilde{\mathcal{E}}_N(t) * \Big(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t)\Big) * \sum_{j=1}^{m} \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * G(t) =$$

$$= G(t) * \Big(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t)\Big) * \sum_{j=1}^{m} \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t)$$

Выполнены также следующие вспомогательные операторно-сверточные равенства

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* **A)** *и* **B)**, *тогда*

$$\Big(I\delta(t)+\mathcal{M}_1(t)\theta(t)\Big)*\sum_{j=1}^{m}\tilde{Q}_j\delta^{(p_j+1)}(t)*\mathcal{M}(t)\theta(t)*Q\delta(t)=Q\delta(t); \quad (2.2)$$

$$Q\delta(t)+\Big(I\delta(t)+\mathcal{M}_1(t)\theta(t)\Big)*\sum_{j=1}^{m}\tilde{Q}_j\delta^{(p_j+1)}(t)*\Big\{Q\delta(t)+G(t)*(I-Q)\delta(t)\Big\}=$$

$$=\Big(I\delta(t)+\mathcal{M}_1(t)\theta(t)\Big)*\sum_{j=1}^{m}\tilde{Q}_j\delta^{(p_j+1)}(t)*G(t); \quad (2.3)$$

$$\mathcal{F}_k(t)=Q\delta(t)*$$

$$*\left[\mathcal{M}^{(p_k+1)}(t)\theta(t)+\frac{d^{p_k+1}}{dt^{p_k+1}}\Big(\mathcal{M}(t)\theta(t)\Big)*Q\delta(t)*\mathcal{M}_1(t)\theta(t)\right]* \quad (2.4)$$

$$*\tilde{Q}_k\delta(t)\equiv 0,\ k=1,\dots,m.$$

3. Теорема о виде фундаментальной оператор-функции

Справедлива следующая теорема

Теорема 1. *Если выполнены условия* **A)** *и* **B)**, *то интегро-дифференциальный оператор* $\mathcal{L}_N(\delta(t))=B\delta^{(N)}(t)-\sum\limits_{i=1}^{l}A_{m_i}\delta^{(m_i)}(t)-k(t)\theta(t)$ *имеет на классе распределений с ограниченным слева носителем* $K'_+(E_1)$ *фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t)=\Gamma\delta(t)*\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*$$

$$*\left[I\delta(t)-\Big(I\delta(t)+\mathcal{M}_1(t)\theta(t)\Big)*\sum_{j=1}^{m}\tilde{Q}_j\delta^{(p_j+1)}(t)*G(t)\right] \quad (3.1)$$

или (в силу свойства псевдокоммутирования)

$$\mathcal{E}_N(t)=\Gamma\delta(t)*$$

$$*\left[I\delta(t)-G(t)*\Big(I\delta(t)+\mathcal{M}_1(t)\theta(t)\Big)*\sum_{j=1}^{m}\tilde{Q}_j\delta^{(p_j+1)}(t)\right]*\tilde{\mathcal{E}}_N(t). \quad (3.2)$$

Доказательство. В соответствии с определением фундаментальной оператор-функции [11] покажем, что выполняются два операторно-сверточных равенства:

$$\mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) * u(t) = u(t),\ \forall u(t) \in K'_+(E_1), \tag{3.3}$$

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) * v(t) = v(t),\ \forall v(t) \in K'_+(E_2). \tag{3.4}$$

Для доказательства тождества (3.3) воспользуемся представлением (3.2) для $\mathcal{E}_N(t)$

$$\mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) = \mathcal{E}_N(t) * \mathcal{L}_N(\delta(t)) * \Gamma\delta(t) * \tilde{B}\delta(t) =$$

$$= \mathcal{E}_N(t) * \Big(\tilde{\mathcal{L}}_N(\delta(t)) - Q\delta^{(N)}(t)\Big) * \tilde{B}\delta(t) =$$

$$= \Gamma\delta(t) * \left[I\delta(t) - G(t) * \Big(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t)\Big) * \sum_{j=1}^{m} \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t)\right] *$$

$$* \Big[I\delta(t) - G(t) * Q\delta(t)\Big] * \tilde{B}\delta(t).$$

Доказав равенство

$$\mathcal{F}(t) = \left[I\delta(t) - G(t) * \Big(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t)\Big) * \sum_{j=1}^{m} \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t)\right] *$$

$$* \Big[I\delta(t) - G(t) * Q\delta(t)\Big] = I\delta(t),$$

получим требуемое утверждение. Действительно

$$\mathcal{F}(t) = I\delta(t) - G(t) * Q\delta(t) - G(t) * \Big(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t)\Big) *$$

$$* \sum_{j=1}^{m} \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * \Big[I\delta(t) - G(t)\Big] * Q\delta(t).$$

В силу построения $G(t) = \frac{d^N}{dt^N}\tilde{\mathcal{E}}_N(t)$ и тождества (2.3) имеем

$$\mathcal{F}(t) = I\delta(t) - G(t) * Q\delta(t) + G(t) * Q\delta(t) = I\delta(t).$$

Таким образом равенство (3.3) полностью доказано.

Для доказательства тождества (3.4) воспользуемся представлением (3.1) для $\mathcal{E}_N(t)$:

$$\mathcal{L}_N(\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) = \Big(\tilde{\mathcal{L}}_N(\delta(t)) - Q\delta^{(N)}(t)\Big) * \tilde{\mathcal{E}}_N(t) *$$

$$*\left[I\delta(t) - \Big(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t)\Big) * \sum_{j=1}^{m} \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * G(t)\right] =$$

$$= \Big(I\delta(t) - Q\delta(t) * G(t)\Big) *$$

$$*\left[I\delta(t) - \Big(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t)\Big) * \sum_{j=1}^{m} \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) * G(t)\right] =$$

$$= I\delta(t) - \Bigg[Q\delta(t) + \Big(I\delta(t) - Q\delta(t) * G(t)\Big) *$$

$$*\Big(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t)\Big) * \sum_{j=1}^{m} \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t)\Bigg] * G(t).$$

Для завершения доказательства равенства (3.4) осталось убедиться, что

$$\mathcal{N}(t) = Q\delta(t) +$$

$$+\Big(I\delta(t) - Q\delta(t) * G(t)\Big) * \Big(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t)\Big) * \sum_{j=1}^{m} \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) \equiv 0.$$

В силу свойств проекторов имеем

$$\Big(I\delta(t) - Q\delta(t) * G(t)\Big) * \Big(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t)\Big) * \sum_{j=1}^{m} \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) =$$

$$= \Big(I\delta(t) - Q\delta(t) * G(t)\Big) * Q\delta(t) * \Big(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t)\Big) * Q\delta(t) *$$

$$* \sum_{j=1}^{m} \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) =$$

$$= \Big(Q^2\delta(t) - Q\delta(t) * G(t) * Q\delta(t)\Big) * \Big(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t)\Big) * \sum_{j=1}^{m} \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) =$$

$$= -Q\delta(t) * \mathcal{M}(t)\theta(t) * Q\delta(t) * \Big(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t)\Big) * \sum_{j=1}^{m} \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t) =$$

$$= -\sum_{j=1}^{m} \frac{d^{p_j+1}}{dt^{p_j+1}} \Big(Q\mathcal{M}(t)\tilde{Q}_j\theta(t)\Big) - \sum_{j=1}^{m} Q\mathcal{M}(t)Q\theta(t) * \mathcal{M}_1(t)\theta(t) * \tilde{Q}_j \delta^{(p_j+1)}(t).$$

Однако в силу соотношений (2.1) и правил дифференцирования обобщенных функций

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{d^{p_j+1}}{dt^{p_j+1}}\Big(Q\mathcal{M}(t)\tilde{Q}_j\theta(t)\Big)=\sum_{j=1}^{m}\Big(\tilde{Q}_j\delta(t)+Q\mathcal{M}^{(p_j+1)}(t)\tilde{Q}_j\theta(t)\Big)=$$

$$=Q\delta(t)+\sum_{j=1}^{m}Q\mathcal{M}^{(p_j+1)}(t)\theta(t)*\tilde{Q}_j\delta(t).$$

Таким образом в обозначениях леммы 3 (см. соотношение (2.4))

$$\mathcal{N}(t)=Q\delta(t)-Q\delta(t)-Q\delta(t)*\sum_{j=1}^{m}\Big(\mathcal{M}^{(p_j+1)}(t)\theta(t)+$$

$$+\frac{d^{p_j+1}}{dt^{p_j+1}}\Big(\mathcal{M}(t)\theta(t)\Big)*Q\delta(t)*\mathcal{M}_1(t)\theta(t)\Big)*\tilde{Q}_j\delta=-\sum_{j=1}^{m}\mathcal{F}_j(t)\equiv 0.$$

□

Замечание 5. С помощью представленного здесь метода доказательства теоремы 1 можно получить более компактные доказательства основных утверждений работ [11], [7] и [8].

В силу соотношения (2.3) леммы 3 получаем следующую (альтернативную) форму записи для $\mathcal{E}_N(t)$, а именно,

Теорема 2. *Если выполнены условия* **A)** *и* **B)**, *то интегро-дифференциальный оператор* $\mathcal{L}_N(\delta(t))=B\delta^{(N)}(t)-\sum\limits_{i=1}^{l}A_{m_i}\delta^{(m_i)}(t)-k(t)\theta(t)$ *имеет на классе распределений с ограниченным слева носителем* $K'_+(E_1)$ *фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t)=\Gamma\delta(t)*\tilde{\mathcal{E}}_N(t)*\Bigg[(I-Q)\delta(t)-$$

$$-\Big(I\delta(t)+\mathcal{M}_1(t)\theta(t)\Big)*\sum_{j=1}^{m}\tilde{Q}_j\delta^{(p_j+1)}(t)*\{Q\delta(t)+G(t)*(I-Q)\delta(t)\}\Bigg].$$

Как было сказано ранее, с помощью фундаментальной оператор-функции можно проводить полное исследование задачи Коши (1.1)-(1.2). В обобщенных функциях задачу (1.1)-(1.2) можно переписать в виде

$$\mathcal{L}_N(\delta(t))*\tilde{u}(t)=F(t),\ \text{ где } F(t) \text{ см. в } (1.3),$$

тогда обобщенная функция

$$\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * F(t) \in K'_+(E_1)$$

является решением этого уравнения (см. (3.4)), причем в силу (3.3) единственным в классе $K'_+(E_1)$.

Анализируя структуру решения $\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * F(t) \in K'_+(E_1)$, можно получить утверждение о разрешимости задачи Коши (1.1)-(1.2) в классе $C^N(t \geq 0, E_1)$. В частности, если оператор B не имеет присоединенных элементов (см. [1]) относительно оператора A_{m_l} (следующего после B ненулевого операторного коэффициента в уравнении (1.1)), то все $p_i = N - m_l - 1$, $i = 1, \ldots, n$ и формула для фундаментальной оператор-функции приобретает вид

$$\mathcal{E}_N(t) = \Gamma\delta(t) *$$

$$* \left[\tilde{\mathcal{E}}_N(t) - G(t) * \Big(I\delta(t) + \mathcal{M}_1(t)\theta(t) \Big) * Q \frac{t^{m_l - 1}}{(m_l - 1)!} \theta(t) * G(t) \right].$$

Обобщенное решение $\tilde{u}(t) = \mathcal{E}_N(t) * F(t) \in K'_+(E_1)$ в этом случае окажется регулярной обобщенной функцией, обращающей уравнение (1.1) в тождество. Потребовав выполнения начальных условий, получим утверждение о разрешимости задачи Коши (1.1)-(1.2) в классе $C^N(t \geq 0, E_1)$.

Следствие 1. *Если в условиях теоремы 1* $N = 4$, $l = 2$, $m_l = 2$, $m_1 = 0$, $p_i = 1$, *то задача Коши (1.1)-(1.2) разрешима в классе* $C^4(t \geq 0, E_1)$. *тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$Q(A_2 u_2 + A_0 u_0 + f(0)) = 0,$$

$$Q(A_2 u_3 + A_0 u_1 + k(0) u_0 + f'(0)) = 0.$$

Следствие 2. *Если в условиях теоремы 1* $N = 3$, $l = 1$, $m_l = 1$, $p_i = 1$, *то задача Коши (1.1)-(1.2) разрешима в классе* $C^3(t \geq 0, E_1)$. *тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$Q(A_1 u_1 + f(0)) = 0,$$

$$Q(A_1 u_2 + k(0) u_0 + f'(0)) = 0.$$

4. Приложения

С помощью теоремы 1 исследуем следующие начально-краевые задачи.

Пример 1. Рассмотрим задачу Коши – Дирихле для обобщенного потенциала электрического поля [4]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\alpha\right)(\Delta u-\beta u)+\gamma\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta u+\alpha\gamma\frac{\partial^2}{\partial x_N^2}+$$

$$+\int\limits_0^t g(t-s)\Delta^2 u(s,\bar{x})ds = div f(t,\bar{x}) \tag{4.1}$$

$$u_t^{(i)}\Big|_{t=0}=u_i(\bar{x}),\;\; i=0,1,2,3,\;\; \bar{x}\in\Omega;\;\; u\Big|_{\bar{x}\in\partial\Omega}=0,\;\; t\geq 0, \tag{4.2}$$

Здесь $g(t),\ f(t,\bar{x})$ – заданные функции, $u=u(t,\bar{x})$ – искомая функция, $\bar{x}\in\Omega\subset R^m$ – ограниченная область с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega,\ \Delta$ – оператор Лапласа, $u=u(t,\bar{x})$ определена на цилиндре $R_+\times\Omega,\ \beta\in\sigma(\Delta)$. Здесь в обозначениях теоремы 1 $N=4,\, l=2,\, m_l=2,\, m_1=0$.

Для задачи Коши – Дирихле (4.1)-(4.2) банаховы пространства и операторы зададим следующим образом

$$E_1\equiv\left\{v(\bar{x})\in W_2^{k+4}(\Omega):\ v|_{\partial\Omega}=0\right\},\ E_2\equiv W_2^k(\Omega),$$

$$B=\Delta-\beta,\ A_2=-(\alpha+\gamma)\Delta+\alpha\beta,\ A_0=-\alpha\gamma\frac{\partial^2}{\partial x_N^2},$$

где $W_2^{k+4}(\Omega)$ и $W_2^k(\Omega)$ пространства Соболева; пусть $\varphi_i(\bar{x}),\ i=1,\dots,n$ ортонормированный базис пространства решений однородной задачи: $\beta\varphi_i=\Delta\varphi_i,\ \varphi_i|_{\bar{x}\in\partial\Omega}=0$, т.е. оператор B фредгольмов, а в силу соотношений $\langle A_2\varphi_i,\varphi_j\rangle=\gamma\beta\delta_{ij}$ у него нет A_2-присоединенных элементов. Следовательно, в соответствии со следствием 1 получаем следующее утверждение

Теорема 3. *Задача Коши – Дирихле (4.1)-(4.2) однозначно разрешима в классе $C^4(t\geq 0,E_1)$ тогда и только тогда, когда*

$$\left\langle\gamma\beta u_3(\bar{x})+\alpha\gamma\frac{\partial^2 u_1(\bar{x})}{\partial x_N^2}-div f_t'(0,\bar{x})+g(0)\beta^2u_0(\bar{x}),\varphi_i(\bar{x})\right\rangle=0,$$

$$\left\langle\gamma\beta u_2(\bar{x})+\alpha\gamma\frac{\partial^2 u_0(\bar{x})}{\partial x_N^2}-div f(0,\bar{x}),\varphi_i(\bar{x})\right\rangle=0,\ i=1,\dots,n.$$

Аналогично рассматривается следующий

Пример 2. Рассмотрим задачу Коши – Дирихле для уравнения из теории колебаний термоупругих пластин [10] (при $k = 0$)

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}(\Delta u - \beta u) + \gamma \frac{\partial}{\partial t}\Delta^2 u + \int\limits_0^t g(t-s)\Delta^3 u(s,\bar{x})ds = f(t,\bar{x}), \tag{4.3}$$

$$u_t^{(i)}\Big|_{t=0} = u_i(\bar{x}), \;\; i = 0,1,2, \;\; \bar{x} \in \Omega; \;\; u\Big|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0, \;\; t \geq 0, \tag{4.4}$$

Здесь, как и выше, $g(t)$, $f(t,\bar{x})$ — заданные функции, $u = u(t,\bar{x})$ — искомая функция, $\bar{x} \in \Omega \subset R^m$ – ограниченная область с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$, Δ — оператор Лапласа, $u = u(t,\bar{x})$ определена на цилиндре $R_+ \times \Omega$, $\beta \in \sigma(\Delta)$. Здесь в обозначениях теоремы 1 $N = 3$, $l = 1$, $m_l = 1$.

Для задачи Коши – Дирихле (4.3)-(4.4) банаховы пространства и операторы зададим следующим образом

$$E_1 \equiv \left\{ v(\bar{x}) \in W_2^{k+6}(\Omega) : \; v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \; E_2 \equiv W_2^k(\Omega),$$

$$B = \Delta - \beta, \; A_1 = -\gamma\Delta^2,$$

где $W_2^{k+6}(\Omega)$ и $W_2^k(\Omega)$ пространства Соболева; пусть $\varphi_i(\bar{x})$, $i = 1,\ldots,n$ ортонормированный базис пространства решений однородной задачи: $\beta\varphi_i = \Delta\varphi_i$, $\varphi_i|_{\bar{x}\in\partial\Omega} = 0$, т. е. оператор B фредгольмов, а в силу соотношений $\langle A_1\varphi_i, \varphi_j\rangle = -\gamma\beta^2\delta_{ij}$ у него нет A_1-присоединенных элементов. Следовательно, в соответствии со следствием 2 получаем следующее утверждение

Теорема 4. *Задача Коши – Дирихле (4.3)-(4.4) однозначно разрешима в классе $C^3(t \geq 0, E_1)$ тогда и только тогда, когда*

$$\left\langle \gamma\beta^2 u_2(\bar{x}) - f_t'(0,\bar{x}) + g(0)\beta^3 u_0(\bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \gamma\beta^2 u_1(\bar{x}) - f(0,\bar{x}), \varphi_i(\bar{x}) \right\rangle = 0, \; i = 1,\ldots,n.$$

5. Заключение

Представленный в данной статье метод исследования позволяет с единых позиций решать вопросы однозначной разрешимости вырожденных задач Коши как в классах распределений, так и в пространствах функций конечной гладкости. При этом не накладывается никаких дополнительных ограничений на структуру операторного пучка уравнения в виде подчинения одной его части другой. Полученные на этом пути абстрактные результаты применимы к исследованию различных математических моделей, в которых на текущее состояние процесса опосредованно влияет вся предыстория наблюдений.

Список литературы

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М. : Наука, 1969. 520 с.
2. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М. : Наука, 1979. 512 с.
3. Логинов Б. В., Русак Ю. Б. Обобщенные жордановы структуры в теории ветвления // Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных и их приложения. Ташкент : ФАН, 1978. С. 133–148.
4. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшин , М. О. Корпусов , Ю. Д. Плетнер. М. : Наука, 2007. 736 с.
5. Сидоров Н. А., Романова О. А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением // Дифференциальные уравнения. 1983. Т. 19, № 9. С. 1516–1526.
6. Сидоров Н. А., Фалалеев М. В. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, № 4. С. 726–728.
7. Фалалеев М. В., Орлов С. С. Вырожденные интегро-дифференциальные операторы в банаховых пространствах и их приложения // Известия вузов. Математика. 2011. № 10. С. 68–79.
8. Фалалеев М. В., Орлов С. С. Интегро-дифференциальные уравнения с вырождением в банаховых пространствах и их приложения в математической теории упругости // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2011. Т. 4, № 1. С. 118–134.
9. Фалалеев М. В., Орлов С. С. Обобщенные решения вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и их приложения // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 286–297.
10. Rivera J. E. M., Fatori L. H. Regularizing Properties and Propagations of Singularities for Thermoelastic Plates // Math. Meth. Appl. Sci. 1998. Vol. 21. P. 797–821.
11. Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2002. 540 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2122-6

Михаил Валентинович Фалалеев, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики и информационных технологий, Иркутский государственный университет, Российская Федерация, 664003, г. Иркутск, ул. К. Маркса, 1, тел.: +7(3952)521279,
email: mvfalaleev@gmail.com,
ORCID iD https://orcid.org/0000-0003-1770-172X.

Поступила в редакцию 25.10.2020

On Solvability in the Class of Distributions of Degenerate Integro-Differential Equations in Banach Spaces

M. V. Falaleev

Irkutsk State University, Irkutsk, Russian Federation

Abstract. The paper considers a new approach to constructing generalized solutions of degenerate integro-differential equations convolution type in Banach spaces. The principal idea of the method proposed implies the refusal of the condition of existence of the full Jordan set for the Fredholm operator of the higher derivative with respect to the operator bundle formed by the rest of operator coefficients of the differential part and by the operator kernel of the integral component of the equation. The conditions are superimposed upon the values of the operator function specially constructed on the basis elements of the Fredholm operator kernel. Under such an approach, the differential part of the equation may include not only the higher derivative but also any combination lower derivatives, what allows one to consider the convolution integral-differential equations from universal positions, without any special account of the structure of the structure of the operator bundle. The method proposed represents a form of generalization of the technique based on the application of Jordan sets of Fredholm operators, and in the case of existence of the latter the method coincides with this technique. The generalized solutions are constructed in the form of a convolution of the fundamental operator function, which corresponds to the equation under investigation, and a function, which includes the right-hand side of the equation and the initial data. The conditions, under which such a generalized solution does not contain any singular component, and the regular component converts the initial equation into an identity and satisfies the initial data, and the result will provide for the resolvability of the initial problem in the class of functions of characterized by the respective smoothness. In this case, the generalized solution constructed will be classical. The theorem on the form of fundamental operator function has been proved, the abstract results have been illustrated via examples of initial-boundary value problems of applied character from the theory electromagnetic fields, the theory of oscillations in visco-elastic media, the theory of vibrations of thermal-elastic plates.

Keywords: Banach spaces, Fredholm operator, generalized function, fundamental solution, convolution, resolvent, Cauchy-Dirichlet problem.

References

1. Weinberg M.M., Trenogin V.A. *Theory of branching solutions of nonlinear equations*. Moscow, Nauka Publ., 1969. 520 p. (in Russian)
2. Vladimirov V.S. *Generalized functions in mathematical physics*. Moscow, Nauka Publ., 1979. 512 p. (in Russian)
3. Loginov B.V., Rusak Y.B. The Generalized Jordanova structure in branching theory. *Direct and inverse problems for partial differential equations and their applications*. Tashkent, FAN, 1978, pp. 133-148. (in Russian)
4. Sveshnikov A.G., Alshin A.B., Korpusov M.O., Pletner Yu.D. *Linear and nonlinear Sobolev type equations*. Moscow, Nauka Publ., 2007. 736 p. (in Russian)
5. Sidorov N.A., Romanova O.A. On the application of some results of the branch theory in solving differential equations with degeneracy. *Differential equations*, 1983, vol. 19, no. 9. pp. 1516-1526. (in Russian)

6. Sidorov N.A., Falaleev M.V. Generalized solutions of differential equations with a Fredholm operator for a derivative. *Differential equations*, 1987, vol. 23, no. 4, pp. 726-728. (in Russian)
7. Falaleev M.V., Orlov S.S. Degenerate integro-differential operators in Banach spaces and their applications. *Izvestiya vuzov. Mathematics*, 2011, no. 10, pp. 68-79. (in Russian)
8. Falaleev M.V., Orlov S.S. Integro-differential equations with degeneracy in Banach spaces and their applications in the mathematical theory of elasticity. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2011, vol. 4, no. 1, pp. 118-134. (in Russian)
9. Falaleev M.V., Orlov S.S. Generalized solutions of degenerate integro-differential equations in Banach spaces and their applications. *Proceedings of the Institute of mathematics and mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 286-297. (in Russian)
10. Rivera J.E.M., Fatori L.H. Regularizing Properties and Propagations of Singularities for Thermoelastic Plates. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 1998, vol. 21, pp. 797-821.
11. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A. and Falaleev M. *Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications*. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2002, 540 p. https://doi.org/10.1007/978-94-017-2122-6

Mikhail Falaleev, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, Irkutsk State University, 1, K. Marx st., Irkutsk, 664003, Russian Federation, tel.: +7(3952)521279, email: mvfalaleev@gmail.com, ORCID iD https://orcid.org/0000-0003-1770-172X.

Received 25.10.2020