Серия «Математика»
Том 1 (2007), № 1, С. 303—307

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.948

Неаналитические решения вырождающегося интегродифференциального уравнения второго порядка

В. Г. Трубин
Институт математики, экономики и информатики ИГУ, Иркутск, Россия

Аннотация. Для вырождающегося интегродифференциального уравнения второго порядка с регулярной особой точкой установлена связь между числом линейно независимых решений и числом необходимых и достаточных условий разрешимости.

Ключевые слова: вырождающиеся уравнения, особая точка, интеграл, регулярная точка, сумма.

В работе рассматривается интегродифференциальное уравнение

$$x^2y''(x) + xa_1y'(x) + a_0y(x) = f(x) + \lambda \int\limits_0^1 K(x,s)y(s)ds, \qquad (1)$$

где $f(x) \in C[0,1], K(x,s) \subset C(\overline{D}), \overline{D} = \{(x,y)|0 \leq x; s \leq 1\}$. Ниже на функции $f(x)$ и $K(x,s)$ будут наложены дополнительные условия.

Ищутся решения $y(x)$ уравнения (1) из класса функций $C^2(0,1) \cap C[0,1]$.

В целях краткости ограничимся изучением основного случая [1], когда все корни определяющего уравнения $\rho(\rho-1) + a_1\rho + a_0 = 0$ вещественны, не являются целыми числами, не отличаются друг от друга на целые числа и не являются кратными. Занумеруем корни определяющего уравнения в порядке возрастания $\rho_0 < \rho_1$. Система функций $y_i = x^{\rho_i},\ i = 0,1$ является фундаментальной для уравнения $x^2y''(x) + xa_1y'(x) + a_0y(x) = 0$. Определитель Вронского, составленный из фундаментальной системы функций, может быть представлен в виде:

$$W(x) = x^{\nu}Q,\ \nu = \sum_{i=0}^{1}\rho_i - 1,\ Q = \rho_1 - \rho_0. \qquad (2)$$

Алгебраическое дополнение $W_i(x)$ элемента $y_i^{(n-1)}$ в $W(x)$ имеет вид

$$W_i(x) = x^{\nu_i} R_i,\ \nu_i = \sum_{k=0}^{i-1} \rho_k + \sum_{k=i+1}^{1} \rho_k,\ R_i = \mp 1,\ i = 0, 1 \tag{3}$$

Введем обозначение

$$F(x) = f(x) + \lambda \int\limits_0^1 K(x,s) y(s) ds, \tag{4}$$

и, считая $F(x)$ известной функцией, рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение $x^2 y''(x) + x a_1 y'(x) + a_0 y(x) = F(x)$. Его решение ищем в виде

$$y(x) = \sum_{i=0}^{1} x^{\rho_i} \left[c_i + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{W_i(t)}{t^2 W(t)} F(t) dt \right], \tag{5}$$

где $x_0 \geq 0, c_i, i = 0, 1$ — произвольные постоянные. Учитывая формулы (2), (3), преобразуем (5)

$$y(x) = \sum_{i=0}^{1} x^{\rho_i} \left[c_i + \alpha_i \int\limits_{x_0}^{x} t^{-\rho_i - 1} F(t) dt \right],$$

где $\alpha_i = \mp \frac{1}{\rho_1 - \rho_0}$. Подставив в это равенство выражение (4) для $F(x)$, получим уравнение

$$y(x) = \sum_{i=0}^{1} x^{\rho_i} \left[c_i + \alpha_i \int\limits_{x_0}^{x} t^{-\rho_i - 1} f(t) dt + \lambda \alpha_i \int\limits_{x_0}^{x} t^{-\rho_i - 1} dt \int\limits_0^1 K(t,s) y(s) ds \right], \tag{6}$$

Для корней определяющего уравнения возможны три случая: оба корня отрицательные, корни разных знаков, оба корня положительные. Рассмотрим самый интересный, второй случай, когда среди корней определяющего уравнения имеется один отрицательный и один положительный корень: $\rho_0 < 0 < \rho_1$. Пусть m — наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $\rho_1 < m$. Дополнительно от функций $f(x)$ и $K(x,s)$ потребуем, чтобы $f(x) \in C^m[0,1]$ и $K(x,s) \in C^m[0,1]$ по x. Тогда $F(x) \in C^m[0,1]$. Функцию $F(x)$, представленную формулой (4), разложим по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме [2] и в остаточном члене сделаем замену переменной интегрирования, положив $t = x\tau$ [3]:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{F^{(i)}(0)}{i!} x^i + x^m F_1(x),$$

где

$$F_1(x) = \frac{1}{(m-1)!}\int\limits_0^1 (1-\tau)^{m-1}F^{(m)}(x\tau)d\tau.$$

Отсюда следует, что

$$f_(x) = \sum_{i=0}^{m-1}\frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i + x^m f_1(x),$$

$$K(x,s) = \sum_{i=0}^{m-1}\frac{K_x^i(0,s)}{i!}x^i + x^m K_1(x,s),$$

где $f_1(x) \in C[0,1], K_1(x,s) \in C(\overline{D})$

$$F_1(x) = f_1(x) + \lambda\int\limits_0^1 K_1(x,s)y(s)ds. \tag{7}$$

Методом неопределенных коэффициентов [4] можно показать, что функция

$$\sum_{i=0}^{m-1}\frac{A_i}{E_i}x^i \tag{8}$$

представляет частное полиномиальное решение уравнения

$$x^2y'' + xa_1y' + a_0y = \sum_{i=0}^{m-1}A_ix^i,$$

где $E(i) = i(i-1) + ia_1 + a_0$, $A_i = \frac{F^{(i)}(0)}{i!}$, постоянные A_i связаны условиями

$$i!A_i = f^{(i)}(0) + \lambda\int\limits_0^1 K^{(i)}(0,s)y(s)ds,\ i = 0,1,\ldots,m-1. \tag{9}$$

Применяя формулу (6) к уравнению

$$x^2y''(x) + xa_1y'(x) + a_0y(x) = x^m\left[f_1(x) + \lambda\int\limits_0^1 K_1(x,s)y(s)ds\right],$$

и, учитывая частное решение (8), уравнение (1) можно записать в виде

$$y(x) = \sum_{i=0}^{m-1}\frac{A_i}{E(i)}x^i + \sum_{i=0}^{1}x^{\rho_i}\left[c_i + \alpha_i\int\limits_{x_0}^{x} t^{-\rho_i-1+m}f_1(t)dt+\right.$$

$$+\lambda\alpha_i \int\limits_{x_0}^{x} t^{-\rho_i-1+m}dt + \int\limits_0^1 K_1(t,s)y(s)ds \Bigg].$$

Так как ищется решение, принадлежащее классу функций $C^2(0,1)\cap C[0,1]$, то в этом равенстве положим $x_0 = 0,\ c_0 = 0$,и в повторном интеграле поменяем порядок интегрирования

$$y(x) = \left[\sum_{i=0}^{m-1} \frac{A_i}{E(i)} x^i + c_1 x^{\rho_1}\right] + g(x) + \lambda \int\limits_0^1 H(x,s)y(s)ds, \qquad (10)$$

где

$$g(x) = \sum_{i=0}^{1} x^{\rho_i}\alpha_i \int\limits_0^x t^{m-\rho_i-1} f_1(t)dt,$$

$$H(x,s) = \sum_{i=0}^{1} x^{\rho_i}\alpha_i \int\limits_0^x t^{m-\rho_i-1} K(t,s)dt,$$

и в силу леммы [1], $g(x)\in C[0,1],\ \ H(x,s)\in C(\overline{D})$. Очевидно , что всякое решение $y(x)\in C^2(0,1)\cap C[0,1]$ уравнения (1) является решением системы (9), (10) и обратно, то есть уравнение (1) эквивалентно системе (9), (10). Считая функции, стоящие в квадратных скобках уравнения (10) известными, можно само уравнение (10) рассматривать как линейное интегральное уравнение фредгольма второго рода. Для общности предположим, что λ является характеристическим числом ядра $H(\tau,s)$ кратности n. Тогда, если выполняются необходимые и достаточные условия разрешимости

$$\int\limits_0^1 \psi_k(x)\left\{\sum_{i=1}^{m-1} \frac{A_i}{E(i)} x^i + c_1 x^{\rho_1} + g(x)\right\} dx = 0, k = 1,2,\ldots,n, \qquad (11)$$

где $\psi_k(x)$— собственные функции сопряженного к (10) уравнения, то решение уравнения (10) имеет вид

$$y(x) = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{A_i}{E(i)} x^i + c_1 x^{\rho_i} + g(x) +$$

$$+\lambda \int\limits_0^1 R(x,s;\lambda)\left\{\sum_{i=1}^{m-1} \frac{A_i}{E(i)} s^i + c_1 s^{\rho_i} + g(s)\right\} ds + \sum_{k=1}^{n} B_k y_k(x), \qquad (12)$$

где $R(x,s;\lambda)$ — обобщенная резольвента ядра $H(x,s)$, а $y_k(x)$ — собственные функции уравнения (10). Для того, чтобы найденная по формуле (12) функция $y(x)\in C^2(0,1)\cap C[0,1]$, в которую входят $m+n+1$

постоянных, была решением уравнения (1), нужно, чтобы выполнялись $m+n$ условий (9) и (11) разрешимости. Таким образом доказана теорема.

Теорема 1. *Для корней разных знаков определяющего уравнения число m, задающее гладкость известных элементов $g(x)$ и $K(x,s)$ уравнения (1), берется как наименьшее целое число, удовлетворяющее условию $\rho_1 < m$. При этом разность между числом линейно независимых функций, входящих в решение уравнения (1), и числом необходимых и достаточных условий для существования такого решения, равна единице.*

Замечание. Вырождающееся интегродифференциальное уравнение первого порядка изучалось в классе неаналитических функций в работе [5] автора.

Список литературы

1. *Ломов С.А.* // Обобщение теоремы Фукса на неаналитический случай. Матем.сб. — 1964. — Т. 65 — С. 498–511.
2. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. — Т. 2 — 1966. — 146 с.
3. Избранные вопросы дифференциальных и интегральных уравнений / Под ред. А.М. Нахушева. — Нальчик, 1972. — 290 с.
4. *Матвеев Н.М.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений: Учеб.пособие. — Спб: Изд-во С.-Петербургского ун.-та,1995. — 314 с.
5. *Трубин В.Г.* Решение одного вырождающегося интегродифференциального уравнения //Дифференциальные и интегральные уравнения, вып.5 / — Иркутск: Иркут.ун.-т, 1978. — С. 94–101.

V. G. Trubin

Nonanalytic solutions of the degenerafed integro-differential equation of the second order

Abstract. The dependency between the number of linearly independent solutions and the number of necessary and sufficient solvability conditions of a degenerated integro-differential equation of the second order with a regular singular point is determined. The bibliography contains five citations.