Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 3. С. 2—20

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 517.97

О методах экстраградиентного типа для решения задачи оптимального управления с линейными ограничениями *

А. С. Антипин
Вычислительный центр Российской академии наук

Е. В. Хорошилова
Московский государственный университет

Аннотация. В статье рассмотрен метод для решения задачи оптимального управления со свободным правым концом и линейной дифференциальной системой. Предлагается итеративный процесс экстраградиентного типа, сформулированный в функциональном подпространстве кусочно-непрерывных управлений пространства L_2^r. Доказывается его сходимость.

Ключевые слова: оптимальное управление; функция Лагранжа; экстраградиентный метод; сходимость.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача оптимального управления на фиксированном интервале времени $[0, T]$ со свободным правым концом и линейной дифференциальной системой. На множестве достижимости, порожденном свободным правым концом $x(T)$ управляемой траектории $x[u(t)] = x(t)$, рассматривается квадратичный функционал с симметричной положительно полуопределенной матрицей A и вектором b

$$f(u) = \frac{1}{2}\langle Ax(T), x(T)\rangle - \langle b, x(T)\rangle. \tag{1.1}$$

Кроме того, траектория $x(t)$ и управление $u(t)$ как элементы функционального пространства подчинены системе линейных ограничений,

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта РФФИ 09-01-00388) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ НШ–4096.2010.1

которые задаются системой линейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t) + B(t)u(t),\ x(0) = 0, \tag{1.2}$$

где $D(t), B(t)$ – непрерывные функциональные матрицы размерности $n\times n$ и $n\times r$ соответственно. В ([9], с. 526) показано, что эти ограничения задают линейный оператор, который каждому кусочно-непрерывному управлению $u(t)$ ставит в соответствие единственную траекторию $x(t)$, принимающую на правом конце единственное значение $x(T)$. Совокупность всех управлений подчиним двусторонним ограничениям в каждый момент времени

$$u_i(t) \in [u_i^-, u_i^+],\ t \in [t_0, t_1],\ i = 1, .., r. \tag{1.3}$$

Ставится задача минимизации квадратичного функционала (1.1) в условиях (1.2),(1.3).

Поскольку правые части дифференциальных уравнений могут иметь конечные скачки разрывов, то понятие решения уравнений требует уточнения. Рассмотрим в пространстве $L_2^n[0,T]$ линейное подпространство $\check{C}^n[0,T]$ непрерывных функций-траекторий $x(t)$ с кусочно-непрерывными производными, удовлетворяющих начальному условию $x(0) = 0$, а также линейное подпространство $\check{C}_0^r[0,T]$ кусочно-непрерывных функций-управлений $u(t)$. Множество $U \subset \check{C}_0^r[0,T]$.

Будем называть решением (траекторией) системы (1.2), соответствующим начальному условию $x(0) = 0$ и управлению $u(t) \in U$, непрерывную функцию $x(t)$, удовлетворяющую тождественно условию

$$x(t) = x(0) + \int_0^t (D(\tau)x(\tau) + B(\tau)u(\tau))d\tau,\ 0 \le t \le T. \tag{1.4}$$

Интеграл здесь понимается в смысле Римана, и этого достаточно, чтобы выполнялась формула Ньютона–Лейбница.

Например, функция $x(t) = |t - \frac{T}{2}|$ не имеет производную в точке $t = \frac{T}{2}$ и поэтому не является решением уравнения (1.2) в классическом понимании. Однако такая функция удовлетворяет условию (1.4) и, следовательно, мы будем рассматривать ее как обобщенное решение уравнения (1.2). При этом производная функция $\frac{d}{dt}x(t)$ в точке $t = \frac{T}{2}$ будет терпеть разрыв.

В дальнейшем предполагается, что траектория $x^*(t)$, являющаяся решением задачи (1.1)–(1.3), принадлежит линейному (отметим – не замкнутому) подпространству $\check{C}^n[0,T] \subset L_2^n[0,T]$.

Правые концы $x(T)$ траекторий $x(t)$ описывают в пространстве R^n множество достижимости, которое будем обозначать как $X(T)$. Множество достижимости есть конечномерный образ множества управлений U при отображении последнего линейным оператором, определяемым системой (1.2).

Подчеркнем еще раз, что конечные значения $x(T)$ траекторий определяются не только управлениями $u(t)$ в момент T, но и поведением этих управлений на всем промежутке $[0,T]$ (посредством системы (1.2)). Итак, в зависимости от выбора управлений $u(t)$ из U вектор $x(T)$ принимает те или иные значения на множестве $X(T)$. Таким образом, смысл задачи (1.1)–(1.3) сводится к вычислению оптимального управления $u^*(t)$, которому отвечает терминальное значение $x^*(T)$ на множестве достижимости, минимизирующее целевую функцию (1.1). Для вычисления оптимального решения задачи будем использовать экстраградиентные и экстрапроксимальные подходы, развитые в теории равновесного программирования [3, 4].

Задача (1.1)–(1.3) представляет собой задачу квадратичного программирования, сформулированную в бесконечномерном функциональном пространстве на ограниченном множестве управлений. В ([9], с. 511) показано, что такая задача всегда имеет решение и сводится к вычислению седловой точки функции Лагранжа

$$L(\psi(t),x(t),u(t)) =$$

$$= \frac{1}{2}\langle Ax(T),x(T)\rangle - \langle b,x(T)\rangle + \int_0^T \langle \psi(t), D(t)x(t)+B(t)u(t)-\frac{d}{dt}x(t)\rangle dt, \tag{1.5}$$

порожденной этой задачей и определенной для всех $x(t)\in \check{C}^n[0,T]$, $\psi(t)\in \check{C}^n_*[0,T]$, $u(t)\in U$, где $\check{C}^n_*[0,T]$ – сопряженное пространство для линейного подпространства $\check{C}^n[0,T]$. Седловая точка $(\psi^*(t),x^*(t),u^*(t))$ функции Лагранжа, образованная прямым $(x^*(t),u^*(t))$ и двойственным $\psi^*(t)$ решениями задачи (1.1)–(1.3), по определению седла удовлетворяет системе неравенств

$$\frac{1}{2}\langle Ax^*(T),x^*(T)\rangle - \langle b,x^*(T)\rangle +$$

$$+\int_0^T \langle \psi(t), D(t)x^*(t)+B(t)u^*(t)-\frac{d}{dt}x^*(t)\rangle dt \le$$

$$\le \frac{1}{2}\langle Ax^*(T),x^*(T)\rangle - \langle b,x^*(T)\rangle +$$

$$+\int_0^T \langle \psi^*(t), D(t)x^*(t)+B(t)u^*(t)-\frac{d}{dt}x^*(t)\rangle dt \le$$

$$\le \frac{1}{2}\langle Ax(T),x(T)\rangle - \langle b,x(T)\rangle + \int_0^T \langle \psi^*(t), D(t)x(t)+B(t)u(t)-\frac{d}{dt}x(t)\rangle dt \tag{1.6}$$

для всех $\psi(t)\in \check{C}^n_*[0,T], x(t)\in \check{C}^n[0,T], u(t)\in U$.

Левое неравенство этой системы представляет собой задачу максимизации линейной функции по переменной $\psi(t)$ на всем пространстве

$\check{C}^n_*[0,T]$ определения этой функции. Из этого неравенства имеем

$$\int_0^T \langle \psi(t)-\psi^*(t), D(t)x^*(t)+B(t)u^*(t)-\frac{d}{dt}x^*(t)\rangle dt \le 0,\ \psi(t)\in \check{C}^n_*[0,T]. \tag{1.7}$$

В силу произвольности элемента $\psi(t)\in \check{C}^n_*[0,T]$, последнее неравенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$\frac{d}{dt}x^*(t) = D(t)x^*(t)+B(t)u^*(t),\ x^*(0)=0. \tag{1.8}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно положить в (1.7) сначала $\psi(t)\equiv 0$, а затем $\psi(t)\equiv 2\psi^*(t)$. Сравнивая полученное уравнение с (1.2), видим, что функции $x^*(t)$ и $u^*(t)$ являются решением уравнения (1.2).

Правое неравенство системы (1.6) представляет собой задачу минимизации по переменным $x(t), u(t)$. Покажем, что набор $x^*(t), u^*(t)$ доставляет минимум целевой функции. С учетом (1.8) из правого неравенства системы (1.6) имеем

$$\frac{1}{2}\langle Ax^*(T), x^*(T)\rangle - \langle b, x^*(T)\rangle \le$$

$$\le \frac{1}{2}\langle Ax(T), x(T)\rangle - \langle b, x(T)\rangle + \int_0^T \langle \psi^*(t), D(t)x(t)+B(t)u(t)-\frac{d}{dt}x(t)\rangle dt \tag{1.9}$$

для всех $x(t)\in \check{C}^n[0,T]$ и $u(t)\in U$. Рассмотрим полученное неравенство (1.9) при условии

$$\int_0^T \langle \psi^*(t), D(t)x(t)+B(t)u(t)-\frac{d}{dt}x(t)\rangle dt = 0.$$

Так как точка $(x^*(t), u^*(t))$ согласно (1.8) подчинена этому условию, то из (1.9) получим

$$\frac{1}{2}\langle Ax^*(T), x^*(T)\rangle - \langle b, x^*(T)\rangle \le \frac{1}{2}\langle Ax(T), x(T)\rangle - \langle b, x(T)\rangle \tag{1.10}$$

для всех $x(t)\in \check{C}^n[0,T], u(t)\in U$, удовлетворяющих ограничению

$$\frac{d}{dt}x(t) = D(t)x(t)+B(t)u(t), \quad x(0)=0. \tag{1.11}$$

Другими словами, седловая точка функции Лагранжа (1.5) является решением исходной задачи (1.1)–(1.3). Можно доказать, что в условиях регулярности исходной задачи верно и обратное утверждение.

Далее, перепишем правое неравенство системы (1.6), используя преобразование перехода к сопряженному оператору вида

$$\langle \psi(t), D(t)x(t)\rangle = \langle D^T(t)\psi(t), x(t)\rangle,\ \langle \psi(t), B(t)u(t)\rangle = \langle B^T(t)\psi(t), u(t)\rangle$$

и тождество дифференцирования произведения функций по частям

$$\frac{d}{dt}\langle\psi(t), x(t)\rangle = \langle\frac{d}{dt}\psi(t), x(t)\rangle + \langle\psi(t), \frac{d}{dt}x(t)\rangle.$$

Интегрируя тождество на отрезке $[0, T]$, получим

$$\langle\psi(T), x(T)\rangle - \langle\psi(0), x(0)\rangle = \int_0^T \langle\frac{d}{dt}\psi(t), x(t)\rangle dt + \int_0^T \langle\psi(t), \frac{d}{dt}x(t)\rangle dt. \tag{1.12}$$

Используя это тождество, с учетом $x(0) = 0$ из правого неравенства (1.6) имеем

$$\frac{1}{2}\langle Ax^*(T), x^*(T)\rangle - \langle b, x^*(T)\rangle + \int_0^T \langle\psi^*(t), D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t)\rangle dt+$$
$$+\int_0^T \langle\frac{d}{dt}\psi^*(t), x^*(t)\rangle dt - \langle\psi^*(T), x^*(T)\rangle \le$$
$$\le \frac{1}{2}\langle Ax(T), x(T)\rangle - \langle b, x(T)\rangle + \int_0^T \langle\psi^*(t), D(t)x(t) + B(t)u(t)\rangle dt+$$
$$+\int_0^T \langle\frac{d}{dt}\psi^*(t), x(t)\rangle dt - \langle\psi^*(T), x(T)\rangle,$$

или

$$\frac{1}{2}\langle Ax^*(T), x^*(T)\rangle - \langle b, x^*(T)\rangle + \int_0^T \langle D^T(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt}\psi^*(t), x^*(t)\rangle dt+$$
$$+\int_0^T \langle B^T(t)\psi^*(t), u^*(t)\rangle dt - \langle\psi^*(T), x^*(T)\rangle \le$$
$$\le \frac{1}{2}\langle Ax(T), x(T)\rangle - \langle b, x(T)\rangle + \int_0^T \langle D^T(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt}\psi^*(t), x(t)\rangle dt+$$
$$+\int_0^T \langle B^T(t)\psi^*(t), u(t)\rangle dt - \langle\psi^*(T), x(T)\rangle \tag{1.13}$$

для всех $x(t) \in \check{C}^n[0, T], u(t) \in U$.

Из (1.13) следует, что точка с координатами $(x^*(t), u^*(t))$ является точкой минимума квадратичного функционала, который в силу сепарабельности распадается на два независимых функционала, зависящих только от своих переменных $x(t)$ и $u(t)$:

$$\frac{1}{2}\langle Ax^*(T), x^*(T)\rangle - \langle b + \psi^*(T), x^*(T)\rangle+$$
$$+\int_0^T \langle\frac{d}{dt}\psi^*(t) + D^T(t)\psi^*(t), x^*(t)\rangle dt \le$$

$$\leq \frac{1}{2}\langle Ax(T), x(T)\rangle - \langle b + \psi^*(T), x(T)\rangle + \int_0^T \langle \frac{d}{dt}\psi^*(t) + D^T(t)\psi^*(t), x(t)\rangle dt \tag{1.14}$$

для всех $x(t) \in \check{C}^n[0,T]$ и

$$\int_0^T \langle B^T(t)\psi^*(t), u^*(t)\rangle dt \leq \int_0^T \langle B^T(t)\psi^*(t), u(t)\rangle dt \tag{1.15}$$

для всех $u(t) \in U$.

Неравенство (1.14) означает, что квадратичный функционал

$$f_0[x(t)] = \frac{1}{2}\langle Ax(T), x(T)\rangle - \langle b + \psi^*(T), x(T)\rangle +$$
$$+ \int_0^T \langle \frac{d}{dt}\psi^*(t) + D^T(t)\psi^*(t), x(t)\rangle dt,$$

определенный на всем подпространстве $\check{C}^n[0,T]$, в точке $x^*(t) \in \check{C}^n[0,T]$ достигает минимума. Как известно, его градиент в этой точке равен нулю, т. е.

$$(Ax^*(T) - b - \psi^*(T)) + (\frac{d}{dt}\psi^*(t) + D^T(t)\psi^*(t)) = 0. \tag{1.16}$$

Здесь предполагается, что матрица A – симметричная и положительно полуопределенная.

Рассмотрим неравенство (1.14) на подпространстве функций $x(t)$ таких, что $x(t)|_{t=T} = x^*(T)$. На нем неравенство (1.14) принимает вид

$$\int_0^T \langle \frac{d}{dt}\psi^*(t) + D^T(t)\psi^*(t), x^*(t)\rangle dt \leq \int_0^T \langle \frac{d}{dt}\psi^*(t) + D^T(t)\psi^*(t), x(t)\rangle dt$$

для всех $x(t) \in \check{C}^n[0,T]$ с граничным условием на правом конце $x(t)|_{t=T} = x^*(T)$.

Полученное неравенство возможно при всех $x(t) \in \check{C}^n[0,T]$, только если градиент линейной функции равен нулю, т. е.

$$\frac{d}{dt}\psi^*(t) + D^T(t)\psi^*(t) = 0. \tag{1.17}$$

Тогда из (1.16) имеем

$$Ax^*(T) - b - \psi^*(T) = 0. \tag{1.18}$$

Собирая вместе (1.8),(1.15) и (1.17),(1.18), получим систему

$$\frac{d}{dt}x^*(t) = D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t),\ x^*(0) = 0, \tag{1.19}$$

$$\frac{d}{dt}\psi^*(t) + D^T(t)\psi^*(t) = 0,\ \psi^*(T) = Ax^*(T) - b, \tag{1.20}$$

$$\int_0^T \langle B^T(t)\psi^*(t), u(t) - u^*(t)\rangle dt \geq 0,\ \ u(t) \in U. \tag{1.21}$$

Система (1.19)–(1.21) представляет собой следствие из (1.6).

Пара дифференциальных уравнений (1.19),(1.20) для любого фиксированного управления $u(t) \in U$ позволяет однозначно вычислить сопряженную функцию $\psi(t) \in \check{C}^n_*[0,T]$. Заметим, что эту функцию можно рассматривать как образ некоторого оператора $F[u(t)] = \psi(t)$, определенного для каждого элемента $u(t) \in U$. В этом случае решение системы (1.19)–(1.21) сводится к решению одного вариационного неравенства

$$\int_0^T \langle B^T(t)F[u^*(t)], u(t) - u^*(t)\rangle dt \geq 0,\ \ u(t) \in U, \tag{1.22}$$

где $F[u^*(t)] = \psi^*(t)$. Нетрудно видеть, что это вариационное неравенство представляет собой выражение известного принципа максимума Понтрягина, который для линейных дифференциальных систем принимает форму (1.22) (с точностью до замены операции min на max).

2. Допустимый процесс экстраградиентного типа

В предыдущем параграфе исходная задача оптимального управления (1.1)–(1.3) была сведена к решению седловой системы (1.6), которая была редуцирована к решению системы дифференциальных уравнений и одного вариационного неравенства (1.19)–(1.21). Было отмечено, что полученная система уравнений, в свою очередь, может трактоваться как решение вариационного неравенства (1.22), поскольку дифференциальные уравнения играют вспомогательную роль и используются для вычисления сопряженной функции $\psi(t)$.

Представим вариационное неравенство (1.21) в эквивалентной форме операторного уравнения с оператором проектирования, тогда система (1.19)–(1.21) принимает форму

$$\frac{d}{dt}x^*(t) = D(t)x^*(t) + B(t)u^*(t),\ \ x^*(0) = 0, \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dt}\psi^*(t) + D^T(t)\psi^*(t) = 0,\ \ \psi^*(T) = Ax^*(T) - b, \tag{2.2}$$

$$u^*(t) = \pi_U(u^*(t) - \alpha B^T(t)\psi^*(t)), \tag{2.3}$$

где $\pi_U(s(t))$ – оператор проектирования вектора

$$s(t) = u^*(t) - \alpha B^T(t)\psi^*(t)$$

на множество U [9], $\alpha > 0$. Этот вектор, вообще говоря, не принадлежит множеству U, и поэтому возникает необходимость в использовании оператора проектирования. Поскольку множество U интервального типа (1.3), то операция проектирования $s(t)$ на множество сводится к «срезке» тех значений компонент этого вектора, которые выходят за пределы промежутков $[u_i^-, u_i^+]$.

Таким образом, если тройка $\psi^*(t), x^*(t), u^*(t)$ есть решение системы (1.19)–(1.21), то эта тройка удовлетворяет системе (2.1)–(2.3). Если же взять произвольное управление $u(t) \neq u^*(t)$ и решить систему (2.1)–(2.2), то получим некоторое приближение, которое не будет решением системы (2.1)–(2.3) и, соответственно, системы (1.19)–(1.21).

Однако в этом случае полученное приближение можно рассматривать как шаг итеративного процесса вида

$$\frac{d}{dt}x^n(t) = D(t)x^n(t) + B(t)u^n(t),\ x^n(0) = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{d}{dt}\psi^n(t) + D^T(t)\psi^n(t) = 0,\ \psi^n(T) = Ax^n(T) - b, \tag{2.5}$$

$$u^{n+1}(t) = \pi_U(u^n(t) - \alpha B^T(t)\psi^n(t)). \tag{2.6}$$

Здесь, если $u^n(t)$ вычислено, то, используя эту итерацию по управлениям, решаем дифференциальное уравнение (2.4) и находим траекторию $x^n(t)$. Затем вычисляем терминальное значение $x^n(T)$ этой траектории в момент времени $t = T$. Используя этот вектор как терминальное условие, решаем сопряженную (двойственную) систему уравнений (2.5). С помощью сопряженной траектории $\psi^n(t)$ формируем направление движения (градиент $B^T(t)\psi^n(t)$) и делаем итеративный шаг (2.6). Получили $u^{n+1}(t)$, $0 \leq t \leq T$. Таким образом, проведение каждой очередной итерации фактически сводится к решению двух систем дифференциальных уравнений (2.4),(2.5).

Процесс (2.4)–(2.6) относится к методам простой итерации и является наиболее простым из известных вычислительных процессов. В случае, если выполняются условия строго сжимающего отображения, такой процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии [12]. Однако в нашем случае мы имеем дело с седловой задачей, про которую известно, что методы типа простой итерации не сходятся, вообще говоря, к седловой точке этой задачи [5] (сходятся только их аналоги в оптимизации – методы проекции градиента). Поэтому для решения задачи мы используем экстрапроксимальный (в линейном случае – экстраградиентный) подход, развитый в [2, 1]. Другие подходы градиентного типа рассматривались многими авторами, в частности отметим [9],[10]–[11].

Экстраградиентный метод для решения поставленной задачи (2.1)–(2.3) представляет собой управляемый процесс (2.4)–(2.6), каждая итерация которого распадается на два полушага. Формулы этого итеративного метода имеют вид:

1) прогнозный полушаг

$$\frac{d}{dt}x^n(t) = D(t)x^n(t) + B(t)u^n(t),\ \ x^n(0) = 0, \tag{2.7}$$

$$\frac{d}{dt}\psi^n(t) + D^T(t)\psi^n(t) = 0,\quad \psi^n(T) = Ax^n(T) - b, \tag{2.8}$$

$$\bar{u}^n(t) = \pi_U(u^n(t) - \alpha B^T(t)\psi^n(t)); \tag{2.9}$$

2) основной полушаг

$$\frac{d}{dt}\bar{x}^n(t) = D(t)\bar{x}^n(t) + B(t)\bar{u}^n(t),\ \ \bar{x}^n(0) = 0, \tag{2.10}$$

$$\frac{d}{dt}\bar{\psi}^n(t) + D^T(t)\bar{\psi}^n(t) = 0,\ \ \bar{\psi}^n(T) = A\bar{x}^n(T) - b, \tag{2.11}$$

$$u^{n+1}(t) = \pi_U(u^n(t) - \alpha B^T(t)\bar{\psi}^n(t)). \tag{2.12}$$

Здесь на каждом полушаге решается два дифференциальных уравнения и осуществляется итеративный шаг по управлениям. Отметим, что в этом процессе итерации по прямым переменным $x^n(t), u^n(t)$ при всех n всегда принадлежат допустимым множествам, т. е. удовлетворяют ограничениям (1.2)–(1.3).

Из формул этого процесса видно, что дифференциальные уравнения (2.7),(2.8) и (2.10),(2.11) используются только для вычисления сопряженных функций $\psi^n(t)$ и $\bar{\psi}^n(t)$, поэтому процесс можно записать в более компактном виде

$$\bar{u}^n(t) = \pi_U(u^n(t) - \alpha B^T(t)\psi^n(t)), \tag{2.13}$$

$$u^{n+1}(t) = \pi_U(u^n(t) - \alpha B^T(t)\bar{\psi}^n(t)), \tag{2.14}$$

где $\psi^n(t)$ и $\bar{\psi}^n(t)$ вычисляются как в (2.7),(2.8) и (2.10),(2.11).

Для получения вспомогательных оценок представим операторные уравнения (2.13),(2.14) в форме вариационных неравенств

$$\int_0^T \langle \bar{u}^n(t) - u^n(t) + \alpha B^T(t)\psi^n(t), u(t) - \bar{u}^n(t)\rangle dt \geq 0, \tag{2.15}$$

$$\int_0^T \langle u^{n+1}(t) - u^n(t) + \alpha B^T(t)\bar{\psi}^n(t), u(t) - u^{n+1}(t)\rangle dt \geq 0 \tag{2.16}$$

для всех $u(t) \in U$.

Из операторных уравнений (2.13),(2.14), очевидно, следуют оценки

$$\|\bar{u}^n(t) - u^{n+1}(t)\| \leq \alpha\|B^T(t)(\psi^n(t) - \bar{\psi}^n(t))\| \leq \alpha\|B\|\|\psi^n(t) - \bar{\psi}^n(t)\|, \tag{2.17}$$

где $\|B\| = \max\|B(t)\|$ для всех $t \in [0, T]$, $\alpha > 0$.

Покажем, что процесс (2.7)–(2.12) сходится монотонно по норме пространства управлений к одному из решений исходной задачи.

Теорема 1. *Если множество решений задачи (2.1)–(2.3) не пусто и принадлежит подпространству* $\check{C}^n[0,T] \subset L_2^n[0,T]$, *то последовательность* $\|u^n(t) - u^*(t)\|_{L_2^r}$, *порожденная методом (2.7)–(2.12) с выбором параметра* α *из условия* $0 < \alpha < 1/(\sqrt{2}\|B\|\|F\|)$, *монотонно убывает по норме пространства. При этом любая слабо сходящаяся подпоследовательность управлений* $u^{n_i}(t)$ *слабо сходится к оптимальному управлению* $u^*(t)$, *а отвечающая ей подпоследовательность траекторий* $x^{n_i}(t)$ *сходится к оптимальной траектории* $x^*(t)$ *в равномерной норме* $C^n[0,T]$. *Если же последовательность управлений* $u^n(t)$ *имеет при* $n \to +\infty$ *сильный предел, то процесс* $(x^n(t), u^n(t))$ *сходится к решению задачи* $(x^*(t), u^*(t))$ *монотонно по норме пространства* $L_2^n \times L_2^r$.

Доказательство. **1.** Из (2.11) имеем

$$\langle A\bar{x}^n(T) - b - \bar{\psi}^n(T), x^*(T) - \bar{x}^n(T)\rangle +$$
$$+ \int_0^T \langle D^T(t)\bar{\psi}^n(t) + \frac{d}{dt}\bar{\psi}^n(t), x^*(t) - \bar{x}^n(t)\rangle dt \geq 0. \qquad (2.18)$$

Из (2.2) имеем

$$-\langle Ax^*(T) - b - \psi^*(T), x^*(T) - \bar{x}^n(T)\rangle -$$
$$- \int_0^T \langle D^T(t)\psi^*(t) + \frac{d}{dt}\psi^*(t), x^*(t) - \bar{x}^n(t)\rangle dt \geq 0.$$

Сложим полученные неравенства

$$\langle A(\bar{x}^n(T) - x^*(T)) - (\bar{\psi}^n(T) - \psi^*(T)), x^*(T) - \bar{x}^n(T)\rangle +$$
$$+ \int_0^T \langle D^T(t)(\bar{\psi}^n(t) - \psi^*(t)) + \frac{d}{dt}(\bar{\psi}^n(t) - \psi^*(t)), x^*(t) - \bar{x}^n(t)\rangle dt \geq 0. \quad (2.19)$$

Используя формулу интегрирования по частям (1.12)

$$\int_0^T \langle \frac{d}{dt}(\bar{\psi}^n(t) - \psi^*(t)), x^*(t) - \bar{x}^n(t)\rangle dt = -$$
$$- \int_0^T \langle \bar{\psi}^n(t) - \psi^*(t), \frac{d}{dt}(x^*(t) - \bar{x}^n(t))\rangle dt +$$
$$+ \langle \bar{\psi}^n(T) - \psi^*(T), x^*(T) - \bar{x}^n(T)\rangle,$$

преобразуем дифференциальный член левой части (2.19) (это преобразование означает переход к сопряженному дифференциальному оператору)

$$\langle A(\bar{x}^n(T) - x^*(T)), x^*(T) - \bar{x}^n(T)\rangle - (\bar{\psi}^n(T) - \psi^*(T)), x^*(T) - \bar{x}^n(T)\rangle +$$

$$+\int_0^T \langle \bar{\psi}^n(t)-\psi^*(t), D(t)(x^*(t)-\bar{x}^n(t))-\frac{d}{dt}(x^*(t)-\bar{x}^n(t))\rangle dt+$$
$$+\langle \bar{\psi}^n(T)-\psi^*(T), x^*(T)-\bar{x}^n(T)\rangle \geq 0. \qquad (2.20)$$

Сокращая подобные члены и учитывая, что $\langle A\bar{x}^n(T)-x^*(T)), \bar{x}^n(T)-x^*(T)\rangle \geq 0$ в силу положительной полуопределенности симметричной матрицы A, приведем неравенство (2.20) к виду

$$\int_0^T \langle \bar{\psi}^n(t)-\psi^*(t), D(t)(x^*(t)-\bar{x}^n(t))-\frac{d}{dt}(x^*(t)-\bar{x}^n(t))\rangle dt \geq 0. \qquad (2.21)$$

2. Положим $u(t)=u^{n+1}(t)$ в (2.15)

$$\int_0^T \langle \bar{u}^n(t)-u^n(t)+\alpha B^T(t)\psi^n(t), u^{n+1}(t)-\bar{u}^n(t)\rangle dt \geq 0.$$

Преобразуем полученное неравенство

$$\int_0^T \langle \bar{u}^n(t)-u^n(t), u^{n+1}(t)-\bar{u}^n(t)\rangle dt-$$
$$-\alpha\int_0^T \langle B^T(t)(\bar{\psi}^n(t)-\psi^n(t)), u^{n+1}(t)-\bar{u}^n(t)\rangle dt+$$
$$+\alpha\int_0^T \langle B^T(t)\bar{\psi}^n(t), u^{n+1}(t)-\bar{u}^n(t)\rangle dt \geq 0. \qquad (2.22)$$

Положим $u=u^*(t)$ в (2.16)

$$\int_0^T \langle u^{n+1}(t)-u^n(t)+\alpha B^T(t)\bar{\psi}^n(t), u^*(t)-u^{n+1}(t)\rangle dt \geq 0. \qquad (2.23)$$

Сложим (2.22) и (2.23), тогда

$$\int_0^T \langle \bar{u}^n(t)-u^n(t), u^{n+1}(t)-\bar{u}^n(t)\rangle dt+$$
$$+\int_0^T \langle u^{n+1}(t)-u^n(t), u^*(t)-u^{n+1}(t)\rangle dt-$$
$$-\alpha\int_0^T \langle B^T(t)(\bar{\psi}^n(t)-\psi^n(t)), u^{n+1}(t)-\bar{u}^n(t)\rangle+$$
$$+\alpha\int_0^T \langle B^T(t)\bar{\psi}^n(t), u^*(t)-\bar{u}^n(t)\rangle dt \geq 0. \qquad (2.24)$$

Из (1.21) при $u(t)=\bar{u}^n(t)$ имеем

$$\int_0^T \langle B^T(t)\psi^*(t), \bar{u}^n(t)-u^*(t)\rangle dt \geq 0. \qquad (2.25)$$

Суммируем (2.24) и (2.25)

$$\int_0^T \langle \bar{u}^n(t) - u^n(t), u^{n+1}(t) - \bar{u}^n(t)\rangle dt+$$
$$+\int_0^T \langle u^{n+1}(t) - u^n(t), u^*(t) - u^{n+1}(t)\rangle dt-$$
$$-\alpha\int_0^T \langle \bar{\psi}^n(t) - \psi^n(t), B(t)(u^{n+1}(t) - \bar{u}^n(t))\rangle+$$
$$+\alpha\int_0^T \langle \bar{\psi}^n(t) - \psi^*(t), B(t)(u^*(t) - \bar{u}^n(t))\rangle dt \geq 0. \tag{2.26}$$

3. Суммируя (2.21) и (2.26), получим

$$\int_0^T \langle \bar{u}^n(t) - u^n(t), u^{n+1}(t) - \bar{u}^n(t)\rangle dt+$$
$$+\int_0^T \langle u^{n+1}(t) - u^n(t), u^*(t) - u^{n+1}(t)\rangle dt+$$
$$+\alpha\int_0^T \langle \bar{\psi}^n(t) - \psi^*(t), D(t)(x^*(t) - \bar{x}^n(t))-$$
$$-\frac{d}{dt}(x^*(t) - \bar{x}^n(t)) + B(t)(u^*(t) - \bar{u}^n(t))\rangle dt-$$
$$-\alpha\int_0^T \langle \bar{\psi}^n(t) - \psi^n(t), B(t)(u^{n+1}(t) - \bar{u}^n(t))\rangle dt \geq 0. \tag{2.27}$$

4. Оценки, полученные в пунктах **1–3** этой теоремы, следуют из правого неравенства системы (1.6). Получим аналогичную оценку из левого неравенства этой системы. Из (2.10) имеем

$$\int_0^T \langle \frac{d}{dt}\bar{x}^n(t) - D(t)\bar{x}^n(t) - B(t)\bar{u}^n(t), \psi^*(t) - \bar{\psi}^n(t)\rangle dt \geq 0. \tag{2.28}$$

Из (2.1) имеем

$$-\int_0^T \langle \frac{d}{dt}x^*(t) - D(t)x^*(t) - B(t)u^*(t), \psi^*(t) - \bar{\psi}^n(t)\rangle dt \geq 0. \tag{2.29}$$

Сложим (2.28) и (2.29)

$$\int_0^T \langle \psi^*(t) - \bar{\psi}^n(t), \frac{d}{dt}(\bar{x}^n(t) - x^*(t)) - D(t)(\bar{x}^n(t) - x^*(t))+$$
$$-B(t)(\bar{u}^n(t) - u^*(t))\rangle dt \geq 0. \tag{2.30}$$

5. Наконец, сложим (2.27) и (2.30)

$$\int_0^T \langle \bar{u}^n(t) - u^n(t), u^{n+1}(t) - \bar{u}^n(t)\rangle dt +$$
$$+ \int_0^T \langle u^{n+1}(t) - u^n(t), u^*(t) - u^{n+1}(t)\rangle dt -$$
$$-\alpha \int_0^T \langle \bar{\psi}^n(t) - \psi^n(t), B(t)(u^{n+1}(t) - \bar{u}^n(t))\rangle dt \geq 0. \tag{2.31}$$

С учетом (2.17) оценим последнее слагаемое из левой части (2.31)

$$\int_0^T \langle \bar{u}^n(t) - u^n(t), u^{n+1}(t) - \bar{u}^n(t)\rangle dt +$$
$$+ \int_0^T \langle u^{n+1}(t) - u^n(t), u^*(t) - u^{n+1}(t)\rangle dt +$$
$$+(\alpha\|B\|)^2 \int_0^T |\bar{\psi}^n(t) - \psi^n(t))|^2 dt \geq 0. \tag{2.32}$$

6. Используя тождество

$$|y_1 - y_2|^2 = |y_1 - y_3|^2 + 2\langle y_1 - y_3, y_3 - y_2\rangle + |y_3 - y_2|^2,$$

разложим скалярные произведения из (2.32) в сумму (разность) квадратов, и после упрощения получим

$$\int_0^T |u^n(t) - u^*(t)|^2 dt - \int_0^T |u^n(t) - \bar{u}^n(t)|^2 dt - \int_0^T |\bar{u}^n(t) - u^{n+1}(t)|^2 dt -$$
$$- \int_0^T |u^{n+1}(t) - u^*(t)|^2 dt + 2(\alpha\|B\|)^2 \int_0^T |\bar{\psi}^n(t) - \psi^n(t))|^2 dt \geq 0. \tag{2.33}$$

Перепишем (2.33) в форме

$$\int_0^T |u^{n+1}(t) - u^*(t)|^2 dt + \int_0^T |u^n(t) - \bar{u}^n(t)|^2 dt + \int_0^T |\bar{u}^n(t) - u^{n+1}(t)|^2 dt -$$
$$-2(\alpha\|B\|)^2 \int_0^T |\bar{\psi}^n(t) - \psi^n(t))|^2 dt \leq \int_0^T |u^n(t) - u^*(t)|^2 dt. \tag{2.34}$$

7. Наконец, оценим последнее слагаемое из левой части (2.34). С этой целью введем оператор $P_1 u = x[u(t)]|_{t=T} = x(T)$, который каждому управлению $u(t) \in U$ ставит в соответствие правый конец траектории. Этот оператор изучен в ([9], с. 512). Отметим его основные свойства.

Во-первых, оператор P_1 – однозначный и линейный, это следует из линейности и единственности решения задачи Коши дифференциального уравнения (2.1). Действительно, в силу линейности для любых $u_1(t), u_2(t) \in U$ и отвечающих им $x_1(t), x_2(t) \in \check{C}^n[0,T]$ из

$$\frac{d}{dt}\alpha x_1(t) = D(t)\alpha x_1(t) + B(t)\alpha u_1(t), \ x_1(0) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\beta x_2(t) = D(t)\beta x_2(t) + B(t)\beta u_2(t),\ x_2(0) = 0,$$

следует

$$\frac{d}{dt}(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) = D(t)(\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)) + B(t)(\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)),$$

где $\alpha x_1(0) + \beta x_2(0) = 0$. Получили, что $P_1(\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)) = \alpha P_1 u_1(t) + \beta P_1 u_2(t)$ для любых $u_1(t), u_2(t) \in U$.

Во-вторых, оператор P_1 – ограниченный (см. в [9], с. 512). Действительно, из (1.4) имеем

$$|x[u(t)]| = \left|\int_0^t (D(\tau)x[u(\tau)] + B(\tau)u(\tau))d\tau\right| \leq$$

$$\leq D_{\max}\int_0^t |x[u(\tau)]|d\tau + B_{\max}\int_0^T |u(\tau)|d\tau,$$

где $D_{\max} = \|D(t)\|_{L_\infty}, B_{\max} = \|B(t)\|_{L_\infty}$. Отсюда, пользуясь леммой Гронуолла ([9], с.406) и неравенством Коши–Буняковского, получаем оценку

$$|x[u(t)]| \leq e^{D_{\max}\cdot T}\cdot B_{\max}\int_0^T |u(\tau)|d\tau \leq K_0\left(\int_0^T |u(\tau)|^2 d\tau\right)^{1/2}$$

для всех $u(t) \in U$, $t \in [0, T]$. Здесь $K_0 = e^{D_{max}\cdot T}B_{max}\sqrt{T}$. В частности, полученная оценка верна при $t = T$. Имеем

$$|x[u(t)]|_{t=T}| = \|P_1 u\| \leq \|P_1\||u(t)|,$$

где $\|P_1\| \leq K_0$. Отметим, что из последнего неравенства следует также ограниченность множества достижимости $X(T)$.

Наряду с оператором P_1 введем оператор P_2. Этот оператор порождается задачей Коши для сопряженного дифференциального уравнения (2.2) с переменными терминальными условиями. Он для любого терминального значения $\psi(T) = Ax(T) - b$ находит соответствующую ему сопряженную траекторию $\psi(t)$, являющуюся решением задачи Коши (2.2), т. е. $P_2\psi(T) = \psi(t)$. Этот оператор известен в математике как оператор сдвига по траекториям дифференциального уравнения [7]. В нашем случае оператор P_2, как и оператор P_1, также линейный. Это следует из линейности дифференциального уравнения (2.2).

Действительно, в силу линейности из

$$\frac{d}{dt}\alpha\psi_1(t) + D^T(t)\alpha\psi_1(t) = 0,\ \alpha\psi_1(T) = \alpha(Ax_1(T) - b),$$

$$\frac{d}{dt}\beta\psi_2(t) + D^T(t)\beta\psi_2(t) = 0,\ \beta\psi_2(T) = \beta(Ax_2(T) - b)$$

следует

$$\frac{d}{dt}(\alpha\psi_1(t) + \beta\psi_2(t)) + D^T(t)(\alpha\psi_1(t) + \beta\psi_2(t)) = 0,$$

где $\alpha\psi_1(T)+\beta\psi_2(T) = \alpha(Ax_1(T)-b)+\beta(Ax_2(T)-b)$. Последнее означает

$$P_2(\alpha\psi_1(T) + \beta\psi_2(T)) = \alpha P_2\psi_1(T) + \beta P_2\psi_2(T).$$

Нетрудно видеть, что оператор P_2 отображает ограниченное множество снова в ограниченное. Этот факт следует из теорем о непрерывной зависимости решения задачи Коши (2.2) от начальных данных, т. е. $\psi(t)$ от $\psi(T)$ [6].

Таким образом, оператор $\psi(t) = F[u(t)]$ из (1.22) представляет собой суперпозицию двух линейных ограниченных операторов $F[u(t)] = P_2P_1(u(t))$ и является линейным и ограниченным оператором с нормой $\|F\| = \|P_2\|\|P_1\|$.

8. Используя представление $\psi(t) = F[u(t)]$, оценим последнее слагаемое из левой части (2.34)

$$\int_0^T |\bar{\psi}^n(t) - \psi^n(t))|^2 dt = \int_0^T |F[\bar{u}^n(t)] - F[u^n(t)]|^2 dt \leq$$

$$\leq \|F\|^2 \int_0^T |\bar{u}^n(t) - u^n(t)|^2 dt.$$

С учетом полученной оценки перепишем неравенство (2.34)

$$\int_0^T |u^{n+1}(t) - u^*(t)|^2 dt + \gamma \int_0^T |u^n(t) - \bar{u}^n(t)|^2 dt +$$

$$+ \int_0^T |\bar{u}^n(t) - u^{n+1}(t)|^2 dt \leq \int_0^T |u^n(t) - u^*(t)|^2 dt, \tag{2.35}$$

где $\gamma = 1 - 2\alpha^2(\|B\|\|F\|)^2 > 0$.

9. Просуммируем полученное неравенство от $n = 0$ до $n = N$:

$$\int_0^T |u^{N+1}(t) - u^*(t)|^2 dt + \gamma \sum_{n=0}^{N} \int_0^T |u^n(t) - \bar{u}^n(t)|^2 dt +$$

$$+ \sum_{n=0}^{N} \int_0^T |\bar{u}^n(t) - u^{n+1}(t)|^2 dt \leq \int_0^T |u^0(t) - u^*(t)|^2 dt. \tag{2.36}$$

Из полученного неравенства следует ограниченность траектории

$$\int_0^T |u^{N+1}(t) - u^*(t)|^2 dt \leq \int_0^T |u^0(t) - u^*(t)|^2 dt, \tag{2.37}$$

а также сходимость рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^T |u^n(t)-\bar u^n(t)|^2dt<\infty,\ \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^T |\bar u^n(t)-u^{n+1}(t)|^2dt<\infty$$

и, следовательно, стремление к нулю величин

$$\int_0^T |u^n(t)-\bar u^n(t)|^2dt\to 0,\ \int_0^T |\bar u^n(t)-u^{n+1}(t)|^2dt\to 0,$$

когда $n\to\infty$.

Поскольку последовательность $u^n(t)$ ограничена, то она слабо компактна, т. е. существует элемент $u^{'}(t)\in U$ такой, что последовательность $u^{n_i}(t)$ сходится слабо к $u^{'}(t)$, т. е. $u^{n_i}(t)\rightharpoonup u^{'}(t)$. Кроме того,

$$|u^{n_i}(t)-\bar u^{n_i}(t)|\to 0,\ |\bar u^{n_i}(t)-u^{n_i+1}(t)|\to 0, \tag{2.38}$$

когда $n_i\to\infty$. В ([9], с. 511) показано, что линейный ограниченный оператор переводит слабо сходящуюся последовательность снова в слабо сходящуюся, поэтому последовательности $x^{n_i}(t)$, $\psi^{n_i}(t)$ как образы отображений линейных операторов $x^{n_i}(t)=x[u^{n_i}(t)]$, $\psi^{n_i}(t)=P_2\psi^{n_i}(T)$ слабо сходятся:

$$x^{n_i}(t)\rightharpoonup x^{'}(t),\ \psi^{n_i}(t)\rightharpoonup \psi^{'}(t).$$

10. Рассмотрим систему (2.7)–(2.9) (аналогично (2.10)–(2.12)) на элементах подпоследовательности $\psi^{n_i}(t)$, $x^{n_i}(t)$, $u^{n_i}(t)$, которая сходится к своему слабому пределу $\psi^{'}(t),x^{'}(t)$, $u^{'}(t)$ при $n_i\to\infty$, и покажем, что слабый предел является решением этой системы. Используя понятие сопряженного оператора и, в частности, формулу интегрирования по частям (1.12) для дифференциального оператора, последовательно рассмотрим каждое из уравнений системы. Представим (2.7) как

$$\int_0^T\langle D(t)x^{n_i}(t)+B(t)u^{n_i}(t)-\frac{d}{dt}x^{n_i}(t),\psi(t)\rangle dt=0,$$

$$\int_0^T\langle x^{n_i}(t),D^T(t)\psi(t)\rangle dt+\int_0^T\langle u^{n_i}(t),B^T(t)\psi(t)\rangle dt+$$
$$+\int_0^T\langle x^{n_i}(t),\frac{d}{dt}\psi(t)\rangle dt-\langle x^{n_i}(T),\psi(T)\rangle=0,$$

где $\psi(t)$ – произвольный элемент из $\check C^n_*[0,T]$. Перейдем к слабому пределу

$$\int_0^T\langle x^{'}(t),D^T(t)\psi(t)\rangle dt+\int_0^T\langle u^{'}(t),B^T(t)\psi(t)\rangle dt+$$
$$+\int_0^T\langle x^{'}(t),\frac{d}{dt}\psi(t)\rangle dt-\langle x^{'}(T),\psi(T)\rangle=0.$$

Отсюда

$$\int_0^T \langle D(t)x^{'}(t), \psi(t)\rangle dt + \int_0^T \langle B(t)u^{'}(t), \psi(t)\rangle dt - \int_0^T \langle \frac{d}{dt}x^{'}(t), \psi(t)\rangle dt = 0$$

Поскольку $\psi(t) \in \check{C}^n_*[0,T]$ – произвольный элемент пространства, то имеем

$$D(t)x^{'}(t) + B(t)u^{'}(t) - \frac{d}{dt}x^{'}(t) = 0,$$

т. е. слабая предельная точка $(x'(t), u'(t))$ является решением дифференциального уравнения (2.7). Так как терминальное условие сформулировано в конечномерном пространстве, то при $n_i \to \infty$ мы имеем $Ax^{'}(T) - b = \psi^{'}(T)$. Рассмотрим (2.8)

$$\int_0^T \langle D^T(t)\psi^{n_i}(t) + \frac{d}{dt}\psi^{n_i}(t), x(t)\rangle dt = 0,$$

$$\int_0^T \langle \psi^{n_i}(t), D(t)x(t)\rangle dt - \int_0^T \langle \psi^{n_i}(t), \frac{d}{dt}x(t)\rangle dt + \langle \psi^{n_i}(T), x(T)\rangle = 0,$$

где $x(t) \in \check{C}^n[0,T]$. Перейдем к слабому пределу

$$\int_0^T \langle \psi^{'}(t), D(t)x(t)\rangle dt - \int_0^T \langle \psi^{'}(t), \frac{d}{dt}x(t)\rangle dt + \langle \psi^{'}(T), x(T)\rangle = 0,$$

или

$$\int_0^T \langle D^T(t)\psi^{'}(t), x(t)\rangle dt + \int_0^T \langle \frac{d}{dt}\psi^{'}(t), x(t)\rangle dt = 0.$$

Отсюда $D^T(t)\psi^{'}(t) + \frac{d}{dt}\psi^{'}(t) = 0$, т. е. слабый предел $\psi'(t)$ удовлетворяет уравнению (2.8). И, наконец, рассмотрим (2.9) в форме вариационного неравенства (2.15) при $n = n_i$

$$\int_0^T \langle \bar{u}^{n_i}(t) - u^{n_i}(t) + \alpha B^T(t)\psi^{n_i}(t), u(t) - \bar{u}^{n_i}(t)\rangle dt \geq 0, \ u(t) \in U. \quad (2.39)$$

Используя утверждения, что $\psi^{n_i}(t) \rightharpoonup \psi^{'}(t)$, где $\psi(t) = F[u(t)] = P_2P_1[u(t)]$ – линейный оператор, а также $u^{n_i}(t) \rightharpoonup u^{'}(t)$ и $|\bar{u}^{n_i}(t) - u^{n_i}(t)| \to 0$ при $n_i \to \infty$, перейдем к пределу в (2.39), тогда получим

$$\int_0^T \langle B^T(t)\psi^{'}(t), u(t) - u^{'}(t)\rangle dt \geq 0, \ u(t) \in U. \quad (2.40)$$

Выпишем полученные предельные уравнения и вариационное неравенство

$$\frac{dx^{'}(t)}{dt} = D(t)x^{'}(t) + B(t)u^{'}(t), \quad x^{'}(0) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\psi^{'}(t) = -D^T(t)\psi^{'}(t), \quad \psi^{'}(T) = A^T x^{'}(T) - b,$$

$$\int_0^T \langle B^T(t)\psi^{'}(t), u(t) - u^{'}(t)\rangle dt \geq 0, \quad u(t) \in U.$$

Полученные соотношения совпадают с (2.1)–(2.3), поэтому $x^{'}(t) = x^*(t) \in \check{C}^n[0,T], u^{'}(t) = u^*(t) \in U$, $\psi'(t) = \psi^*(t) \in \check{C}_*^n[0,T]$, т. е. любая слабо предельная точка управлений $u^n(t)$ является оптимальным управлением исходной задачи. В ([9], с. 518) показано, что если последовательность управлений слабо сходится к оптимальному управлению, то последовательность соответствующих траекторий сходится к оптимальной траектории в равномерной норме. Тем более, эта последовательность будет сходиться к решению по норме пространства $L_2^n[0,T]$. Учитывая этот факт, можно утверждать следующее: процесс (2.7)–(2.12) сходится к решению задачи в смысле подпоследовательностей: по управлениям – в слабой топологии, по траекториям – в равномерной норме, и, тем самым, по норме пространства $L_2^n[0,T]$. Другими словами, любая слабо предельная точка процесса (2.7)–(2.12) является решением исходной задачи.

Для многих регулярных задач слабо сходящаяся последовательность управлений может содержать сильно сходящуюся подпоследовательность. Если выполняется это условие, тогда последовательность $\psi^n(t), x^n(t), u^n(t)$, порожденная методом (2.7)–(2.12), будет иметь сильно предельные точки. Учитывая условие монотонности убывания

$$\int_0^T |u^{n+1}(t) - u^*(t)|^2 dt \leq \int_0^T |u^n(t) - u^*(t)|^2 dt,$$

нетрудно доказать единственность предельной точки, т. е. сильную сходимость последовательности в целом по управлениям и траекториям. Теорема доказана.

Список литературы

1. Антипин А. С. Итеративные методы прогнозного типа для вычисления неподвижных точек экстремальных отображений / А. С. Антипин // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 11. – С. 17–27.
2. Антипин А. С. О дифференциальных градиентных методах прогнозного типа для вычисления неподвижных точек экстремальных отображений / А. С. Антипин // Дифференц. уравнения. – 1995. – Т. 31, № 11. – С. 1786–1795.
3. Антипин А. С. Равновесное программирование: методы градиентного типа / А. С. Антипин // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 8. – С. 1337–1347.
4. Антипин А. С. Равновесное программирование: проксимальные методы / А. С. Антипин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1997. – Т. 37, № 11. – С. 1327–1339.
5. Антипин А. С. Управляемые проксимальные дифференциальные системы для решения седловых задач / А. С. Антипин // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 11. – С. 1846–1861.

6. Босс В. Лекции по математике. Дифференциальные уравнения / В. Босс. – М. : Едиториал УРСС, 2004. – 208 с.
7. Босс В. Лекции по математике. Нелинейные операторы и неподвижные точки / В. Босс. – М. : Кн. дом ЛИБРОКОМ, 2010. – 224 с.
8. Васильев О. В. Методы оптимизации в задачах и упражнениях / О. В. Васильев, А. В. Аргучинцев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 1999. – 208 с.
9. Васильев Ф. П. Методы оптимизации / Ф. П. Васильев. – М. : Факториал Пресс, 2002. – 824 с.
10. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации / Ю. Г. Евтушенко. – М. : Наука, 1982. – 432 с.
11. Срочко В. А. Итерационные методы решения задач оптимального управления / В. А. Срочко. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 160 с.
12. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 488 с.

A. S. Antinin, E. V. Horoshilova

Extragradient methods for optimal control problems with linear restrictions

Abstract. This paper contains the method for the optimal control problem regarding linear dynamic system. The iterative extragradient process is constructed. Convergence of the method is proved.

Keywords: optimal control, Lagrange function, extragradient method, convergence.

Антипин Анатолий Сергеевич, доктор физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник, Вычислительный Центр РАН, 119333, Москва, ул. Вавилова 40, ВЦ РАН, тел.: (499) 135-81-61, (antipin@ccas.ru)

Хорошилова Елена Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доцент, факультет Вычислительной математики и кибернетики, Московский государственный университет, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ, 1, ВМК, тел.: (499) 939-30-10, (antipin@ccas.ru)

Anatoly Antipin, Doctor, Professor, Principal Researcher, Computing Center of RAS, 19333, Russia, Moscow, Vavilov str., 40, Phone: (499) 135-81-61, (antipin@ccas.ru)

Horoshilova Elena, Moscow State University, 19333, Russia, Moscow, Leninskie gory, 1, Phone: (499) 939-30-10, (antipin@ccas.ru)