Серия «Математика»
2010. Т. 3, № 1. С. 104—125

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 518.517

Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа

Г. А. Свиридюк
Южно-Уральский государственный университет

С. А. Загребина
Южно-Уральский государственный университет

Аннотация. Статья имеет обзорный характер. Она содержит: 1. Подход Р.Е. Шоуолтера; 2. Подход Н.А. Сидорова; 3. Применения задачи Шоуолтера – Сидорова; 4. Обобщение задачи Шоуолтера-Сидорова.

Ключевые слова: задача Коши; задача Шоуолтера – Сидорова; начально-конечная задача; уравнения соболевского типа.

Семидесятилетнему юбилею
Н.А. Сидорова посвящается

Уравнения соболевского типа [14], известные также как вырожденные уравнения [41], уравнения неразрешенные относительно старшей производной [40], псевдопараболические уравнения [51] и даже уравнения не типа Коши-Ковалевской [15, 19] составляют ныне обширную область среди неклассических уравнений математической физики [2]. Число публикаций, посвященных им, растет в настоящее время лавинообразно, и упомянуть их все в нашем обзоре не представляется возможным. Всех интересующихся мы отправляем к обстоятельным историческим обзорам в [14, 40, 41, 49]. Здесь же отметим, что первым уравнения такого рода получил А. Пуанкаре в конце позапрошлого века, однако систематическое их исследование началось с середины прошлого века в работах С.Л. Соболева. Термин «уравнения соболевского типа» ввел в обиход Р.Е. Шоуолтер [46].

В настоящем обзоре мы рассмотрим только несколько видов таких уравнений. Во-первых, это линейные уравнения соболевского типа вида

$$L\dot{u} = Mu, \tag{0.1}$$

прообразом которого служит уравнение Баренблатта – Желтова – Кочиной [1]

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u, \tag{0.2}$$

моделирующее динамику давления жидкости, фильтрующейся в трещинновато-пористой среде. Кроме того, уравнение (0.2) является моделью процесса влагопереноса в почве [42] и процесса теплопроводности в среде с двумя температурами [38]. Наконец, еще одним прообразом уравнения (0.1) служит линейное уравнение Девиса [39]

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta u - \beta\Delta^2 u, \tag{0.3}$$

которое описывает эволюцию свободной поверхности жидкости, фильтрующейся в пласте ограниченной мощности.

Во-вторых, мы рассмотрим полулинейные уравнения соболевского типа следующих видов:

$$L\dot{u} = Mu + N(u), \tag{0.4}$$

$$L\dot{u} = M(u). \tag{0.5}$$

Прообразом уравнения (0.4) служат

– уравнение Хоффа [43]

$$(\lambda + \Delta)u_t = \alpha u + \beta u^3, \tag{0.6}$$

моделирующее выпучивание двутавровой балки;

– система уравнений Осколкова [18]

$$(\lambda - \nabla^2)u_t = \nu\nabla u - (u \cdot \nabla)u - \nabla p,\ \nabla \cdot u = 0, \tag{0.7}$$

моделирующая динамику скорости и давления вязкоупругой несжимаемой жидкости;

– уравнение Корпусова – Плетнера – Свешникова [12]

$$(\lambda - \nabla^2)u_t = \alpha\nabla^2 u - \beta\nabla(u\nabla u), \tag{0.8}$$

моделирующее квазистационарные процессы в токопроводящих средах без дисперсии, и многие другие (см. внушительный список таких уравнений в [14]). Среди многочисленных прообразов уравнения (0.5) мы выберем только два:

$$(\lambda - \Delta)u_t = \alpha\Delta(|u|^{p-2}u), \tag{0.9}$$

$$(\lambda - \nabla^2)u_t = \alpha\nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u), \tag{0.10}$$

которые (как и их многочисленные обобщения и упрощения) в зависимости от ситуации моделируют различные процессы диффузии или фильтрации. В ходе дальнейшего повествования мы дадим необходимые пояснения.

Стандартной задачей для всех динамических и эволюционных уравнений [25] является задача Коши

$$u(0) = u_0. \tag{0.11}$$

Наряду с задачей (0.11) мы будем рассматривать задачу Шоуолтера – Сидорова

$$L(u(0) - u_0) = 0. \tag{0.12}$$

Обе задачи в зависимости от методов исследования могут пониматься в различных смыслах (классическом, обобщенном, ослабленном, сильном и т.д.), однако очевидно, что задача (0.12) более общая, нежели (0.11). В тривиальном случае (существование обратного оператора L) обе задачи совпадают, а значит, совпадают и их решения. Цель данного обзора – показать, что задача Шоуолтера – Сидорова для уравнений соболевского типа более естественна, нежели задача Коши.

К настоящему времени выделены два класса операторов M, так называемых (L,p)-ограниченных и сильно (L,p)-секториальных, для которых доказано совпадение задач (0.11), (0.12) (значит, и решений) для уравнений вида (0.1). Оба класса оказались достаточно широкими, чтобы вместить (в подходящих функциональных пространствах) все уравнения вида (0.2), (0.3), причем даже в случае $\ker L \neq \{0\}$. Более того, этот результат получен и для более общей, чем (0.12) задачи

$$((\alpha L - M)^{-1} L)^{p+1}(u(0) - u_0) = 0. \tag{0.13}$$

По всему кругу затронутых здесь вопросов, к которым в дальнейшем мы еще вернемся, отсылаем к [50].

Задачу (0.12) в явном виде впервые поставил Р.Е. Шоуолтер [47] в 1975 г. Для ее исследования ему пришлось создать весьма изысканную математическую конструкцию – "полугильбертовы пространства с нехаусдорфовой метрикой". В дальнейшем этот оригинальный подход был развит в монографии [48]. В п.1 данной статьи мы изложим в очень сокращенном виде подход Р.Е. Шоуолтера.

Независимо и другим способом пришел к задаче (0.12) Н.А. Сидоров [21] в 1984 г. Его простой и естественный подход заключается в следующем. Если формально проинтегрировать на промежутке $(0,t)$ уравнение, скажем (0.5), то получим

$$L(u(t) - u_0) = \int_0^t M(u(s))ds,$$

откуда очевидным образом вытекает задача (0.12). В п. 2 мы дадим краткий обзор этого подхода, развитого Н.А. Сидоровым совместно с его учениками [23, 24]. Здесь же, и тоже очень кратко, осветим несколько иной подход, предложенный в [26].

В п.3 мы приводим несколько приложений задачи Шоуолтера – Сидорова, подобранных таким образом, чтобы показать ее эффективность. В первую очередь это касается задач оптимального управления для линейных и полулинейных уравнений соболевского типа. Кроме того, здесь же содержится объяснение феномена неединственности задачи (0.12) для полулинейных уравнений соболевского типа, впервые отмеченном в [26].

Заключительный п.4 статьи содержит весьма краткий обзор сравнительно нового направления в теории линейных уравнений соболевского типа – исследование начально-конечных задач, обобщающих задачу Шоуолтера – Сидорова. Обзор сделан в основном по работам авторов [6, 7, 31], но содержит также обзор результатов одного из родоначальников таких задач С.Г. Пяткова [45].

В заключение несколько слов о библиографической базе статьи. Статья, как было объявлено выше, носит обзорный характер. Однако к сожалению, ее объем ограничен, и потому мы лишены возможности упомянуть всех, кто явно или неявно использует задачу Шоуолтера – Сидорова в своих работах. Сошлемся здесь на классический пример. Стандартная начально-краевая задача для уравнений Осколкова (0.7) или уравнений Навье – Стокса (см. например, [13, 35]) в действительности тоже является задачей Шоуолтера – Сидорова, как показано в [28]. Подобным примерам несть числа, и потому авторы приносят извинения всем, кого они обошли своим вниманием.

1. Подход Р.Е. Шоуолтера

Пусть $\mathfrak{H}$ – гильбертово пространство со скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle$, отождествленное со своим сопряженным и оснащенное парой рефлексивных банаховых пространств $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{U}'$ так, что имеют место непрерывные и плотные вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{U}'$. Пусть $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$ – линейный, а $M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$ – возможно, нелинейный операторы. Рассмотрим полулинейное уравнение соболевского типа вида

$$L\dot{u} + M(u) = 0. \tag{1.1}$$

Абсолютно непрерывную (т.е. почти всюду на $[0,\tau)$ дифференцируемую) вектор-функцию $u : [0,\tau) \to \mathfrak{U}$ назовем *решением уравнения (1.1)*, если она почти всюду на $[0,\tau)$ обращает его в тождество. Решение $u = u(t)$ уравнения (1.1) назовем *решением задачи Шоуолтера – Сидорова*, если

$$L(u(0) - u_0) = 0 \tag{1.2}$$

для некоторого $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Определение 1. Оператор $A : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$ называется *монотонным*, если $\langle A(u) - A(v), u - v\rangle \geq 0$ при всех $u, v \in \mathfrak{U}$, и *строго монотонным*, если $\langle A(u) - A(v), u - v\rangle = 0$ точно тогда, когда $u = v$. Линейный оператор $A : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$ называется *симметрическим*, если $\langle Au, v\rangle = \langle u, Av\rangle$ при всех $u, v \in \mathfrak{U}$.

Теорема 1. *Пусть $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$ – линейный симметрический монотонный оператор, $M : \mathfrak{U} \to \mathfrak{U}'$ – непрерывный монотонный оператор. Тогда при любых $u_0 \in \mathfrak{U}$ и $\tau \in \mathbb{R}_+$ существует решение задачи (1.1), (1.2). Если оператор $L+M$ строго монотонен, то это решение единственно.*

Заметим, что Р.Е. Шоуолтер формулирует и доказывает эту теорему при более общем условии *хеминепрерывности* оператора M, т.е. непрерывности на любом промежутке любой прямой в $\mathfrak{U}$. Мы ограничимся, простоты ради, требованием непрерывности, тем более, что в приложениях оно выполняется. Для нас бо́льший интерес представляет доказательство теоремы потому, что именно в нем возникает условие (1.2). Все доказательство мы приводить не будем, покажем лишь ту его часть, где возникает (1.2).

Итак, сначала формулой $[\cdot,\cdot] = \langle L\cdot,\cdot\rangle$ зададим на $\mathfrak{U}$ *полускалярное произведение*, которое естественным образом задает на $\mathfrak{U}$ (возможно, нехаусдорфову) топологию. Получившуюся структуру предлагается называть *полунормированным векторным пространством* и обозначать символом $\mathfrak{V}$, причем нетрудно показать непрерывность вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{V}$. Обозначим через $\mathfrak{V}'$ алгебраически и топологически сопряженное к $\mathfrak{V}$ пространство (относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$). Очевидно, $\mathfrak{V}' \hookrightarrow \mathfrak{U}'$, поэтому образ $\mathrm{im}(L+M) \subset \mathfrak{U}'$. Далее доказывается, что $\mathfrak{U}'$ – гильбертово пространство, и устанавливается эквивалентность уравнения (1.1) дифференциальному включению

$$\dot{u} + L^{-1}M(u) \ni 0, \tag{1.3}$$

где L^{-1} – линейный, возможно многозначный, оператор. Наконец, доказывается существование решения задачи Коши

$$u(0) = u_0 \tag{1.4}$$

в случае монотонности и непрерывности (возможно, многозначного) оператора $F = L^{-1}M$, и единственность этого решения при дополнительном условии строгой монотонности оператора $\mathbb{I} + F$. Очевидная на первый взгляд эквивалентность условия (1.4) для включения (1.3), заданного на пространстве $\mathfrak{V}$, и условия (1.2) для уравнения (1.1), заданного на пространстве $\mathfrak{U}$, доказывается технически очень сложно; приходится детально изучать структуру пространства $\mathfrak{V}^*$ – алгебраически сопряженного к $\mathfrak{V}$ относительно $[\cdot,\cdot]$.

Эта изящная абстрактная схема имеет много приложений. Приведем одно из них. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей класса

C^∞. В цилиндре $\Omega \times (0,\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}_+$, будем искать решения уравнения (0.10)

$$(\lambda - \nabla^2)u_t - \alpha\nabla(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0, \tag{1.5}$$

удовлетворяющие условию Дирихле на $\partial\Omega \times (0,\tau)$

$$u(x,t) = 0, \ \ (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\tau). \tag{1.6}$$

Положим $\mathfrak{H} = L_2(\Omega)$, $V = \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, $p \in [2,+\infty)$, и из (1.5), (1.6) находим операторы

$$\langle Lu, v\rangle = \int_\Omega (\lambda uv + (\nabla u, \nabla v))dx, \ \ u, v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega);$$

$$\langle M(u), v\rangle = \alpha \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}(\nabla u, \nabla v))dx, \ \ u, v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega).$$

(Здесь и далее $(\cdot,\cdot)$ и $|\cdot|$ – евклидовы скалярное произведение и норма в $\mathbb{R}^n$). Линейность, непрерывность и монотонность оператора $L : \overset{\circ}{W}{}^1_p \to W_q^{-1}(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, очевидны. Покажем непрерывность и строгую монотонность оператора $M : \overset{\circ}{W}{}^1_p \to \overset{\circ}{W}{}^{-1}_p$. Для этого воспользуемся результатами [33] и покажем s-монотонность оператора M,

$$\langle M'_u(v), v\rangle = \alpha(p-1)\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}|\nabla v|^2)dx, \ \ u, v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega),$$

из которых вытекает и непрерывность, и строгая монотонность. (Здесь M'_u – производная Фреше оператора M в точке u.) Итак, уравнение (1.5) приобретает вид

$$\int_\Omega (u_t v + (\nabla u_t, \nabla v))dx + \alpha \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}(\nabla u, \nabla v)dx = 0, \tag{1.7}$$

а условие Шоуолтера – Сидорова

$$\int_\Omega (\lambda[(u(0) - u_0)v + (\nabla(u(0) - u_0), \nabla v)])dx. \tag{1.8}$$

В силу теоремы 1 справедливо

Следствие 1. *Пусть $\lambda \in L^r(\Omega)$, $\lambda(x) \geq 0$ для п.в. $x \in \Omega$, $r = p\backslash(p-2)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любых $\tau \in \mathbb{R}_+$ и $u_0 \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$ существует единственная абсолютно непрерывная вектор-функция $u : [0,\tau) \to \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$, удовлетворяющая (1.7), (1.8) при всех $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)$.*

Аналогично данной абстрактной схеме редуцируются и другие уравнения. Заметим, что условие Шоуолтера – Сидорова появляется здесь как сугубо техническое, необходимое только при доказательстве теоремы 1. Тем не менее, в настоящее время появилось множество полулинейных уравнений соболевского типа видов (0.4), (0.5), при выводе которых условие Шоуолтера – Сидорова приобретает физический смысл [14].

Заметим еще, что из сказанного вовсе не следует, что для уравнения вида (1.1) задача Коши (1.4) некорректна. Как показано в [27], [33], ее можно сделать корректной, если ограничиться выбором начальных значений u_0 из *фазового пространства* уравнения (1.1). Более того, в [27], [33] показано, что в случае, когда $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \geq -\lambda_1$, где λ_1 – первое собственное значение оператора Лапласа $-\Delta$ с однородными краевыми условиями Дирихле на границе $\partial\Omega$, фазовым пространством задачи

$$\int_\Omega (u(0) - u_0)v dx = 0$$

для уравнения (1.7) (и многих других подобных ему) служит простое гладкое банахово многообразие. Справедливости ради отметим, что случай, когда $\lambda = \lambda(x)$ – неотрицательная функция, методами [27], [33] проанализировать пока не удалось.

2. Подход Н.А. Сидорова

Пусть $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ (т.е. линейны и непрерывны), причем оператор L – фредгольмов (т.е. $\mathrm{ind} L = \dim\ker L - \dim \mathrm{coker} L = 0$). Рассмотрим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{2.1}$$

для линейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu. \tag{2.2}$$

Введем в рассмотрение интегральное уравнение

$$L(u(t) - u_0) = \int_0^t M(u(s))ds. \tag{2.3}$$

Определение 2. Вектор-функцию $u \in C^0(\mathbb{R};\mathfrak{U})$, удовлетворяющую уравнению (2.3), будем называть *псевдорешением* задачи (2.1), (2.2).

Прежде всего заметим, что Н.А. Сидоров [21] рассматривал задачу (2.1), (2.2) в более общей, чем здесь, постановке (например, у него операторы $L, M \in \mathcal{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, т.е. линейны, замкнуты и плотно определены, и т.д.). Однако для наших целей такой постановки более чем достаточно. Далее, выберем $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ и $\{\psi_l\}_{l=1}^m$ – базисы в $\ker L$ и $\mathrm{coker} L$ соответственно и потребуем

$$\det | \langle M\varphi_k, \psi_l \rangle |_{k,l=1}^m \neq 0. \tag{2.4}$$

Не теряя общности, считаем $\det|\langle M\varphi_k, \psi_l\rangle|_{k,l=1}^m = \delta_{kl}$, поэтому положим $\xi_k = M\varphi_k$, $\eta_l = M^*\psi_l$ и построим операторы

$$A = L + \sum_{k=1}^m \langle \xi_k, \cdot\rangle \eta_k,\ B = A^{-1}.$$

Очевидно, $LB[\mathfrak{U}] = \operatorname{im} L$, положим $BL[\mathfrak{U}] = \operatorname{coim} L$. Обозначим через P проектор на $\operatorname{coim} L$ вдоль $\ker L$, а через Q – проектор на $\operatorname{im} L$ вдоль $\operatorname{span}\{\xi_k : k = 1, 2, \ldots, m\}$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие (2.4). Тогда при всех $u_0 \in \mathfrak{U}$ задачи (2.1), (2.2) имеет единственное псевдорешение, которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = \exp(BMt)Pu_0 - \sum_{k=1}^m \langle Mu_0, \psi_k\rangle \varphi_k e^t. \tag{2.5}$$

Отметим, что псевдорешение задачи (2.1), (2.2), представленное в виде (2.5), удовлетворяет условию Шоуолтера – Сидорова (0.12), но не удовлетворяет условию Коши (2.1). Однако прежде чем комментировать этот факт, а также результаты учеников Н.А. Сидорова, изложим другой подход [50], приводящий в данной ситуации к тем же результатам. Для этого введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{U})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M) = \mathbb{C} \setminus \rho^L(M)$ оператора M. Оператор M назовем (L, σ)-ограниченным, если его L-спектр ограничен.

Лемма 1. *Пусть оператор M (L, σ)-ограничен. Тогда операторы*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\mu^L(M)d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma L_\mu^L(M)d\mu \quad -$$

проекторы, $P \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $Q \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$.

Здесь $\gamma \in \mathbb{C}$ – замкнутый контур, ограничивающий область, содержащую $\sigma^L(M)$; $R_\mu^L = (\mu L - M)^{-1}L$ – правая, а $L_\mu^L = L(\mu L - M)^{-1}$ – левая L-резольвенты оператора M. Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$, $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} Q$ и через L_k (M_k) обозначим сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$. Справедлива

Теорема 3. (теорема о расщеплении) *Пусть оператор M (L, σ)-ограничен, тогда существуют*

(i) операторы L_k, $M_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k; \mathfrak{F}^k)$, $k = 0, 1$;

(ii) операторы $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$, $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$.

Определим операторы $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ и $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$, очевидно $H \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$, $S \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$.

Следствие 2. *В условиях теоремы 3 L-резольвенту $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M можно разложить в ряд Лорана*

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1}(I-P) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} P, \ \mu \in \rho^L(M).$$

Определение 3. Точку ∞ для L-резольвенты $(\mu L - M)^{-1}$ оператора M назовем

(i) *устранимой особой точкой*, если $H \equiv \mathbb{O}$;

(ii) *полюсом порядка* $p \in \mathbb{N}$, если $H^p \neq \mathbb{O}$ и $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$;

(iii) *существенно особой точкой*, если $H^q \neq \mathbb{O}$ при всех $q \in \mathbb{N}$.

Пусть $\ker L \neq \{0\}$, множество $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\} \subset \mathfrak{U}$ назовем *цепочкой M-присоединенных векторов* вектора $\varphi_0 \in \ker L \setminus \{0\}$, если $L\varphi_{q+1} = M\varphi_q$, $q = 0, 1, \dots$ и $\varphi_q \notin \ker L \setminus \{0\}$. Цепочка может быть бесконечной, (в частности, может быть заполнена только нулями), но она обязательно конечна, если существует вектор φ_p, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ такой, что $M\varphi_p \notin \operatorname{im} L$. Мощность конечной цепочки называется ее *длиной*. Порядковый номер M-присоединенного вектора в цепочке назовем его *высотой*.

В дальнейшем удобно случай устранимой особой точки считать полюсом порядка нуль, и (L, σ)-ограниченный оператор M, L-резольвента которого имеет в точке ∞ устранимую особую точку или полюс порядка $p \in \mathbb{N}$, называть *(L, p)-ограниченным оператором*, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Теорема 4. *Пусть оператор L – фредгольмов. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$;

(ii) длины всех цепочек M-присоединенных векторов не превосходят p, причем существует по крайней мере одна цепочка длины p.

Заметим, что в силу теоремы 4 оператор M $(L, 0)$-ограничен точно тогда, когда выполнено условие (2.4).

Вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$, обращающую уравнение (2.2) в тождество, назовем *решением уравнения* (2.2). Решение $u = u(t)$ уравнения (2.2) назовем *решением задачи Коши*, если оно удовлетворяет условию (2.1) при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$.

Определение 4. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ назовем *фазовым пространством* уравнения (2.2), если

(i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (2.2) лежит в $\mathfrak{P}$ поточечно, т.е. $u(t) \in \mathfrak{P}$ при всех $t \in \mathbb{R}$;

(ii) для любого $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (2.1), (2.2).

Теорема 5. *Пусть оператор M (L, p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда фазовым пространством уравнения (2.2) служит подпространство $\mathfrak{U}^1$.*

Заметим, что если оператор L непрерывно обратим, то фазовым пространством уравнения (2.2) служит все пространство $\mathfrak{U}$.

Определение 5. Отображение $U^{\cdot} \in C^{\infty}(\mathbb{R};\mathfrak{U})$ назовем *группой разрешающих операторов* уравнения (2.2), если

(i) при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$ вектор-функция $u(t) = U^t u_0$ есть решение уравнение (2.2);

(ii) $U^s U^t = U^{s+t}$ при всех $s,\, t \in \mathbb{R}$.

Группа разрешающих операторов $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ (в дальнейшем просто – *группа*) уравнения (2.2) называется *аналитической*, если она допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ с сохранением свойства (ii). Для аналитической группы $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ можно определить ее *ядро* $\ker U^{\cdot} = \{\varphi \in \mathfrak{U} : U^t\varphi = 0,\, t \in \mathbb{R}\}$ и *образ* $\operatorname{im} U^{\cdot} = \{u \in \mathfrak{U} : U^0 u = u\}$. Аналитическая группа уравнения (2.2) называется *разрешающей группой*, если ее образ совпадает с фазовым пространством уравнения (2.2).

Теорема 6. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен. Тогда существует единственная разрешающая группа уравнения (2.2), которая к тому же имеет следующий вид:*

$$U^t = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} R^L(M) e^{\mu t} d\mu,\ t \in \mathbb{R}.$$

Здесь контур γ такой же, как в лемме 1. Из сказанного вытекает

Следствие 3. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\}\cup\mathbb{N}$. Тогда для любого $u_0 \in \mathfrak{U}^1$ существует единственное решение задачи (2.1), (2.2), которое к тому же имеет вид $u(t) = U^t u_0$.*

Из леммы 1 и теорем 5 и 6, в частности, следует, что подпространство $\mathfrak{U}^1$ совпадает с пространством $\mathfrak{U}$ (а проектор $P = \mathbb{I}$) в случае непрерывной обратимости оператора L. Далее заметим, что в случае $\ker L \neq \{0\}$ и (L,p)-ограниченности оператора M подпространство $\mathfrak{U}^0 = \ker L$ при $p = 0$, либо состоит из всех собственных и M-присоединенных векторов высоты не большей p, причем существует по крайней мере один M-присоединенный вектор высоты p, при $p \in \mathbb{N}$. Покажем теперь, как решается задача Шоуолтера – Сидорова (0.12) в рамках данного подхода. Прежде всего отметим, что условие (0.12) и даже более общее условие (0.13) в случае (L,p)-ограниченности оператора M эквивалентны условию

$$P(u(0) - u_0) = 0. \tag{2.6}$$

Более того, условие (2.6) эквивалентно условию Коши (0.11), если оператор M $(L,0)$-ограничен и $\ker L = \{0\}$ (тогда оператор L непрерывно обратим). Поскольку $U^0 = P$, то справедливо

Следствие 4. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение задачи (2.2), (2.6), которое к тому же имеет вид $u(t) = U^t u_0$.*

Таким образом, различие между задачей Коши и задачей Шоуолтера – Сидорова в данном подходе стирается благодаря тому, что оба условия являются частными случаями условия (2.6). Иное объяснение предлагается школой Н.А. Сидорова. Наиболее полно оно приводится в диссертации [36] самого успешного ученика Н.А. Сидорова – М.В. Фалалеева. Прежде всего вводится в рассмотрение класс обобщенных функций вида

$$uH + \sum_{q=0}^{p} a_q \delta^{(q)},$$

где $u : (0, \tau) \to \mathfrak{U}$ – локально интегрируемая по Бохнеру вектор-функция со значениями в банаховом пространстве $\mathfrak{U}$, $a_q \in \mathfrak{U}$, $H = H(t)$ – функция Хевисайда, $\delta^{(q)}$ – q-тая производная функции Дирака, т.е. такая, что

$$\left\langle a_q \delta^{(q)}, s \right\rangle = (-1)^q \cdot \langle a_q, S(0) \rangle$$

для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции $s = s(t)$ со значениями в сопряженном банаховом пространстве $\mathfrak{U}'$. Затем налагаются условия на операторы L и M. В оригинальном виде эти условия приводить здесь не будем, отметим лишь, что они в нашем простом случае уравнения (2.2) эквивалентны следующим:

$$\left.\begin{array}{l} \text{оператор } L \text{ фредгольмов;} \\ \text{оператор } M\ (L,p) - \text{ограничен}, p \in \{0\} \cup \mathbb{N}. \end{array}\right\} \qquad (2.7)$$

При условиях (2.7) доказывается теорема о существовании единственного решения задачи (2.1), (2.2) при любом $u_0 \in \mathfrak{U}$, которое к тому же представимо через обобщенные функции. Таким образом, в подходе Н.А. Сидорова различие между задачами (0.11) и (0.12) стирается допущением в качестве решений вектор-функций, имеющих скачок в начальном условии.

Отметим, что уникальность данного подхода только кажущаяся; его удалось распространить на неавтономные линейные уравнения соболевского типа вида

$$L\dot{u} = M(t)u, \qquad (2.8)$$

а также на интегральные уравнения вида

$$Lu(t) - \int_0^t k(t-s)u(s)ds = f(t). \qquad (2.9)$$

Более того, универсальность подхода Н.А. Сидорова проявилась еще и в том, что им удалось охватить уравнения (2.2), (2.8) и (2.9) с нётеровым оператором L [20]. Заметим, что случай нётерова оператора пока еще не удалось исследовать другими методами (см. напр., [50]). Сила подхода Н.А. Сидорова, на наш взгляд, заключается в изначально правильном выборе направления исследований, в основу которых положена теория ветвления решений нелинейных уравнений. Если проследить творческий путь Николая Александровича на временном отрезке от персональной монографии [22] до коллективной (в соавторстве с учениками) монографии [44], то становится ясным, как многогранный талант большого математика, внимательного и чуткого учителя, замечательного человека отражается в блеске результатов его учеников и последователей.

3. Применения задачи Шоуолтера – Сидорова

Наиболее важную роль задача Шоуолтера – Сидорова сыграла в задачах оптимального управления для уравнений соболевского типа, а также в объяснении неединственности решений задачи Коши.

Задача оптимального управления для линейных уравнений соболевского типа. Здесь мы будем следовать [30] (см. также [50], гл.7), причем, простоты ради, рассмотрим случай однородного линейного уравнения соболевского типа. Пусть $\mathfrak{U}$ – гильбертово пространство, вектор-функцию $u \in H^1(\mathfrak{U}) = \{u \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U}) : \dot{x} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U})\}$ назовем *сильным решением уравнения*

$$L\dot{u} = Mu, \tag{3.1}$$

если она п.в. на $(0,\tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $u = u(t)$ уравнения (3.1) назовем *сильным решением задачи Коши*

$$u(0) = u_0, \tag{3.2}$$

если оно удовлетворяет (3.2). Заметим, что в силу непрерывности вложения $H^1(\mathfrak{U}) \hookrightarrow C([0,\tau];\mathfrak{U})$ наше определение корректно. Термин "сильное решение" введен для того, чтобы отличать решение уравнения (3.1) здесь и решение уравнения (2.2) в п.2, которое теперь уместно называть "классическим".

Далее, пусть $\mathfrak{V}$ – гильбертово пространство, построим пространства $\overset{\circ}{H}{}^{p+1}(\mathfrak{V}) = \{v \in L_2(0,\tau;\mathfrak{V}) : v^{(p+1)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{V}), v^q(0) = 0, q = 0,1,\dots,p\}$, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Пространство $\overset{\circ}{H}{}^{p+1}(\mathfrak{V})$ – гильбертово со скалярным произведением

$$[v,w] = \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \left\langle v^{(q)}, w^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{V}} dt.$$

Положим

$$\mathfrak{P} = \begin{cases} \mathfrak{U}, & \text{если } \ker L = \{0\}; \\ \mathfrak{U}^1, & \text{если } \ker L \neq \{0\}; \end{cases} \tag{2.7}$$

где подпространство $\mathfrak{U}^1 \subset \mathfrak{U}$ определено в теореме 3. Справедлива [22]

Теорема 7. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда для любых $u_0 \in \mathfrak{P}$ и $v \in \overset{\circ}{H}{}^{p+1}(\mathfrak{V})$ существует единственное сильное решение задачи (3.2) для уравнения*

$$L\dot{u} = Mu + v. \tag{3.3}$$

Введем в рассмотрение $\mathfrak{Z}$ – некоторое гильбертово пространство наблюдений и оператор $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{Z})$, задающий наблюдение $z(t) = Cu(t)$. Заметим, что если $u \in H^1(\mathfrak{U})$, то $z \in H^1(\mathfrak{Z})$. Выделим в пространстве $\overset{\circ}{H}{}^{p+1}(\mathfrak{V})$ замкнутое и выпуклое множество $\overset{\circ}{H}{}^{p+1}_{\partial}(\mathfrak{V})$ – *множество допустимых управлений.* Вектор-функцию $v \in \overset{\circ}{H}{}^{p+1}_{\partial}(\mathfrak{V})$ назовем оптимальным управлением решениями задачи (3.2), (3.3), если

$$J(v) = \min_{w \in \overset{\circ}{H}{}^{p+1}_{\partial}(\mathfrak{V})} J(w),$$

где функционал качества

$$J(w) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau ||z^{(q)} - z_0^{(q)}||^2_{\mathfrak{Z}} dt + \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \left\langle N_q w^{(q)}, w^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{V}} dt.$$

Здесь $N_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{V})$, $q = 0, 1, \ldots, p+1$, – самосопряженные и положительно определенные операторы, $z_0 = z_0(t)$ – желаемое наблюдение. Справедлива

Теорема 8. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда для любого $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное оптимальное управление решениями задачи (3.2), (3.3).*

Казалось бы, задача оптимального управления для уравнения (3.1) с условием Коши (3.2) принципиально решена. Однако численные эксперименты [29], в которых строились решения системы уравнений леонтьевского типа с условием Коши, выявили ее недостатки. Во-первых, очень трудным оказалось построение проектора P, образом которого является подпространство $\mathfrak{U}^1$. В системах малой размерности (до порядка 5) проектор удавалось угадывать. В системах большей размерности такое "угадывание" попросту невозможно. Поэтому и проверка условия $u_0 \in \mathfrak{U}^1$ также невозможна. Во-вторых, выбор пространства управлений $\overset{\circ}{H}{}^{p+1}(\mathfrak{V})$ тоже вызывает определенные неудобства при счете, т.к. в качестве базисных векторов приходится брать многочлены высокого порядка, что затрудняет верификацию результатов.

Все эти недостатки легко устраняются, если вместо условия Коши (3.2) взять условие Шоуолтера – Сидорова (0.13). Утомительная проверка условия $u_0 \in \mathfrak{U}^1$ здесь заменяется на последовательное умножение матриц (в конечномерном, разумеется, случае). Принципиально вопрос о существовании единственного оптимального управления для уравнения (3.1) с условием (0.13) (в эквивалентной форме (2.6)) был решен в [37]. Численный алгоритм, реализующий абстактную схему решения задачи (0.13) для уравнений вида (3.3), построен в [10], [11].

Задача оптимального управления для полулинейных уравнений соболевского типа. Здесь мы будем следовать [34]. Пусть $\mathfrak{H} = (\mathfrak{H}; \langle\cdot,\cdot\rangle)$ – вещественное гильбертово сепарабельное пространство, отождествленное со своим сопряженным; $(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ и $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}')$ – дуальные (относительности двойственности $\langle\cdot,\cdot\rangle$) пары банаховых рефлексивных пространств, причем вложения $\mathfrak{A} \hookrightarrow \mathfrak{B} \hookrightarrow \mathfrak{H} \hookrightarrow \mathfrak{B}' \hookrightarrow \mathfrak{A}'$ плотны и непрерывны. Пусть $L \in \mathcal{L}(\mathfrak{A}; \mathfrak{A}')$ – самосопряженный, неотрицательно определенный (относительно $\langle\cdot,\cdot\rangle$), фредгольмов оператор; а $M \in C^\infty(\mathfrak{B}; \mathfrak{B}')$ – s-монотонный и p-коэрцитивный оператор. (Заметим, что здесь символ $p \in [2, +\infty)$). Рассмотрим задачу Коши (3.2) для полулинейных уравнений соболевского типа вида

$$L\dot{u} + M(u) = v. \tag{3.4}$$

Пользуясь непрерывностью оператора L, формально проинтегрируем уравнение (3.4) на промежутке $(0, t)$ и получим

$$L(u(t) - u_0) + \int_0^t M(u(s))ds = \int_0^t v(s)ds. \tag{3.5}$$

Вектор-функцию $u \in L_\infty(0, \tau; \mathrm{coimL}) \cap L_p(0, \tau; \mathfrak{P})$, удовлетворяющую (3.5) при некоторых $\tau \in \mathbb{R}_+ (t \in (0, \tau))$, $u_0 \in \mathfrak{A}$ и $v \in L_q(0, \tau; \mathfrak{B}')$, назовем *слабым решением уравнения* (3.4), $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Здесь

$$\operatorname{coim} L = \begin{cases} \mathfrak{A}, \text{ если } \ker L = \{0\}; \\ \{u \in \mathfrak{A} : \langle u, \varphi\rangle = 0,\, \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\}, \text{ если } \ker L \neq \{0\}; \end{cases}$$

$$\mathfrak{P} = \begin{cases} \mathfrak{A}, \text{ если } \ker L = \{0\}; \\ \{u \in \mathfrak{A} : \langle M(u), \varphi\rangle = 0,\, \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\}, \text{ если } \ker L \neq \{0\}. \end{cases}$$

Справедлива [36]

Теорема 9. *Множество $\mathfrak{P}$ является простым банаховым C^∞-многообразием, моделируемым подпространством* $\operatorname{coim} L$.

Слабое решение $u = u(t)$ уравнения (3.4) назовем *слабым решением задачи* (3.2), (3.4), если $\lim\limits_{t\to 0+} \langle u(t) - u_0, \xi\rangle = 0$ при всех $\xi \in \mathfrak{A}'$.

Теорема 10. *При всех $\tau \in \mathbb{R}_+$, $u_0 \in \mathfrak{P}$ и*

$$v \in \mathfrak{V} = \begin{cases} L_q(0, \tau; \mathfrak{B}'), \textit{ если } \ker L = \{0\}; \\ \{w \in L_q(0, \tau; \mathfrak{B}') : \langle w, \varphi\rangle = 0,\, \varphi \in \ker L \setminus \{0\}\}, \textit{ если } \ker L \neq \{0\}, \end{cases}$$

существует единственное слабое решение задачи (3.2), (3.4).

Далее, в пространстве $\mathfrak{V}$ фиксируем выпуклое и замкнутое множество $\mathfrak{V}_\partial$. Для уравнения (3.4) с условием (3.2) рассмотрим задачу оптимального управления

$$J(u,v) \to \min,\ v \in \mathfrak{V}_\partial, \tag{3.6}$$

где функционал J задается формулой

$$J(u,v) = \frac{1}{p}\int_0^\tau ||u(t) - u_d(t)||^p_{\mathfrak{B}} dt + \frac{N}{q}\int_0^\tau ||v(t)||^q_{\mathfrak{B}^*} dt,$$

$u_d = u_d(t)$ – желаемое состояние. Пару

$$(u,v) \in [L_\infty(0,\tau;\operatorname{coim} L) \cap L_p(0,\tau;\mathfrak{P})] \times \mathfrak{V}_\partial$$

называют *решением задачи* (3.2), (3.4). Вектор $v \in \mathfrak{V}_\partial$ называют *оптимальным управлением* в задаче (3.2), (3.4), (3.6).

Теорема 11. *При любых $\tau \in \mathbb{R}_+$, $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует решение задачи (3.2), (3.4), (3.6).*

В [34] кроме достаточных условий существования оптимального управления найдены еще и необходимые (обобщающие принцип максимума Понтрягина) условия. Кроме того, там же приводится применение данной абстрактной схемы к уравнению Хоффа (0.6). Более того, эта абстрактная схема оказалась весьма емкой, к ней удалось редуцировать не только уравнение (0.6), но и уравнения (0.9), (0.10) [16]. Однако и здесь отметим естественность задачи Шоуолтера – Сидорова (0.12), которая вытекает из (3.5). К тому же численные эксперименты, проведенные в [16], выявили те же трудности, что и в задаче (3.1), (3.2), – неудобство проверки условия $u_0 \in \mathfrak{P}$ и конструкция множества $\mathfrak{V}_\partial$. В настоящее время ведется активная работа по исследованию задач оптимального управления для уравнений вида (3.4) с условием Шоуолтера – Сидорова (0.12) [17] (см. также статью Н.А. Манаковой и Е.А. Богонос в настоящем издании).

Неединственность решений задачи Шоуолтера – Сидорова. В последнее время интерес к линейным и полулинейным уравнениям соболевского типа резко возрос в связи с выходом в свет монографии [14], в которой авторы представили вывод и исследование пятнадцати линейных и восьмидесяти четырех нелинейных уравнений. Причем физически осмысленной для этих уравнений является именно задача Шоуолтера – Сидорова, хотя в изучении качественных свойств (существование, единственность, разрушение) решений авторы апеллируют к задаче Коши. Отчасти это потому, что задача Шоуолтера – Сидорова может иметь несколько решений, в отличие от задачи Коши, которая исторически имеет единственное решение. Впервые этот феномен был подмечен в [26], здесь же мы дадим краткое описание этого феномена, возникшего в уравнении (0.6) и детально изученного в [32]. Краткости ради, мы отклонимся от принятого порядка изложения (давать сначала абстрактную схему, а потом ее конкретную интерпретацию) и перейдем сразу к приложениям.

В полосе $(a,b)\times\mathbb{R}$ мы будем искать решения уравнения Корпусова – Плетнера – Свешникова

$$\lambda u_t - u_{txx} = \alpha u_{xx} + \beta(uu_x)_x, \tag{3.6}$$

удовлетворяющие условию Дирихле

$$u(a,t) = u(b,t) = 0,\ t\in\mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Проинтегрировав уравнение (3.6) на (a,b) с учетом (3.7), получим

$$\int_a^b (\lambda u_t v + u_{tx} v_x)dx = \int_a^b (\alpha u_x + \beta(uu_x))v_x dx = 0. \tag{3.8}$$

Вектор-функцию $u\in C^\infty(-\tau,\tau;\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b))$ назовем *решением уравнения* (3.6), если она при некотором $\tau\in\mathbb{R}_+$ и любом $v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)$ удовлетворяет (3.8). (В свете предыдущих рассмотрений речь идет о классическом решении). Решение $u=u(t)$ уравнения (3.6) назовем *решением задачи Коши*, если

$$\int_a^b (u(0)-u_0)v dx = 0; \tag{3.9}$$

и *задачи Шоуолтера – Сидорова*, если

$$\int_a^b [\lambda(u(0)-u_0)v + (u_x(0)-u_{0x})v_x]\,dx = 0 \tag{3.10}$$

при некотором $u_0\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b))$ и любом $v\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b))$.

Обозначим через $\{\lambda_k\}$ спектр задачи Штурма – Лиувилля

$$\int_a^b (\varphi_x\psi_x + \lambda\varphi\psi)\,dx = 0,\ \ \varphi,\psi\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(a,b)). \tag{3.11}$$

Если $\lambda\notin\{\lambda_k\}$, то задачи (3.9) и (3.10) совпадают, значит, совпадают и их решения. Если же $\lambda=\lambda_k$, то фазовое пространство уравнения (3.6) содержит две связные компоненты $\mathfrak{P}_1$ и $\mathfrak{P}_2$, причем для любой точки $u_0\in\mathfrak{P}_1$ существует единственное число $\alpha\in\mathbb{R}$ такое, что $u_0+\alpha\varphi_k\in\mathfrak{P}_2$, где φ_k – собственный вектор задачи (3.11), отвечающий λ_k. (То же самое можно сказать и любом векторе $u_0\in\mathfrak{P}_2$, т.е. $u_0+\beta\varphi_k\in\mathfrak{P}_1$ при некотором $\beta\in\mathbb{R}$).

Таким образом, обе точки u_0 и $u_0+\alpha\varphi_k$ удовлетворяют условию Шоуолтера – Сидорова (3.10), но не могут одновременно удовлетворить условию Коши (3.9). В [32] показано, что уравнение (3.6) в таком случае имеет два решения, которые удовлетворяют разным условиям Коши (u_0 и $u_0+\alpha\varphi_k$), но одновременно удовлетворяют условию Шоуолтера – Сидорова (3.10), с точки зрения которого точки u_0 и $u_0+\alpha\varphi_k$ неразличимы. Аналогичное исследование системы уравнений Плотникова [4] показало возможность существования трех решений задачи Шоуолтера – Сидорова. Причем теоретические изыскания очень хорошо подтверждаются численными экспериментами [5].

4. Обобщение задачи Шоуолтера – Сидорова

Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – банаховы пространства, операторы L, $M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M (L,σ)-ограничен. Пусть L-спектр оператора M

$$\sigma^L(M) = \sigma_1^L(M) \cup \sigma_2^L(M),\ \ \sigma_1^L(M) \cap \sigma_2^L(M) = \emptyset, \tag{4.1}$$

причем существует контур $\gamma \subset \mathbb{C}\backslash\sigma^L(M)$, ограничивающий область $\Omega \subset \mathbb{C}$, содержащую $\sigma_1^L(M)$, $\Omega \cap \sigma_2^L(M) = \emptyset$. Аналогично лемме 1 построим проектор

$$P_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\mu^L(M)d\mu$$

и положим $P_2 = P - P_1$. Для уравнения

$$L\dot{u} = Mu \tag{4.2}$$

поставим следующую задачу:

$$P_2(u(0) - u_0) = 0,\ \ P_1(u(\tau) - u_\tau) = 0, \tag{4.3}$$

где $\tau \in \mathbb{R}_+$ (для определенности, вообще можно $\tau \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$), u_0, $u_\tau \in \mathfrak{U}$. Задачу (4.3) назовем *начально-конечной.* Заметим сразу, что если $\sigma_1^L(M) = \emptyset$, то задача (4.3) превращается в задачу (2.6). Таким образом, начально-конечная задача является естественным обобщением задачи Шоуолтера – Сидорова.

Задача (4.3) в более частной чем здесь постановке впервые появилась в работах авторов [31], где она названа "задачей Веригина". Причиной названия послужило довольно большое число публикаций (см. библиографию в [31]), где рассмотрена задача (4.3), но проекторы P_1 и P_2 являются спектральными проекторами оператора L. Такая задача была названа "задачей Веригина", хотя и она, и поставленная здесь задача, имеют мало общего с задачей, поставленной Н.Н. Веригиным [3]. Неправомерное использование термина внесло (и до сих пор продолжает вносить) терминологическую путаницу, вызвавшую справедливые нарекания. Авторы признают свою вину в случившемся и приносят свои извинения всем пострадавшим от этой путаницы.

Теорема 12. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда для любых $\tau \in \mathbb{R}_+$; u_0, $u_\tau \in \mathfrak{U}$ существует единственное решение задачи (4.2), (4.3).*

В [31] теорема 12 была проиллюстрирована начально-конечной задачей для уравнения Баренблатта – Желтова – Кочиной (0.2), заданного в области с однородными условиями Дирихле на границе. В последующих работах теорема 12 была обобщена на случай сильно (L,p)-секториальных [6], [7] и сильно (L,p)-радиальных операторов [8]. Причем в качестве приложений рассматривались вышеперечисленные неклассические уравнения математической физики, заданные не только на ограниченных областях пространства $\mathbb{R}^n$, но и на множествах иной геометрической структуры таких, как графы [9]. В настоящее время уже есть результаты о начально-конечных задачах для уравнений соболевского типа высокого порядка (см. статью А.А. Замышляевой и А.В. Юзеевой в данном издании) и ведутся исследования оптимального управления решениями таких задач.

Наконец, обратим внимание на фундаментальную теорию С.Г. Пяткова [45], разработанную для задачи (4.3), где P_1 – спектральный проектор оператора L, построенный по отрицательной части спектра. С.Г. Пятковым такие задачи названы "задачами сопряжения", причем возникли они в уравнениях с меняющимся направлением времени. В данном контексте задачи сопряжения хоть и не являются обобщениями задачи Шоуолтера – Сидорова, но они естественным образом обобщают задачу Коши и представляют собой новое перспективное направление в теории уравнений соболевского типа. Отметим, что именно строгая, но конструктивная критика С.Г. Пяткова побудила авторов внести ясность в терминологию.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить свою искреннюю и глубокую признательность Н.А. Сидорову, неутомимая деятельность которого всегда оказывала и продолжает оказывать стимулирующее воздействие на нашу работоспособность. С юбилеем Вас, дорогой Николай Александрович! Долгих и счастливых Вам лет жизни!

Список литературы

1. Баренблатт, Г.И. Об основных представлениях теории фильтрации в трещинноватых средах / Г.И. Баренблатт, Ю.П. Желтов, И.Н. Кочина // Прикл. математика и механика. – 1960. – Т.24, №5. – С. 58–73.
2. Врагов, В.Н. Краевые задачи для неклассических уравнений математической физики / В.Н. Врагов. – Новосибирск: НГУ. 1983.
3. Веригин, Н.Н. Об одном классе гидромеханических задач для областей с подвижными границами / Н.Н. Веригин // Динамика жидкости со свободной границей. – Новосибирск, 1980. – вып. 46. – С. 23–32.

4. Гильмутдинова, А.Ф. О неединственности решений задачи Шоуолтера – Сидорова для одной модели Плотникова / А.Ф. Гильмутдинова // Вестн. СамГУ. – 2007. – №9 / 1. – С. 85–90.
5. Гильмутдинова, А.Ф. Исследование математических моделей с феноменом неединственности: дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.Ф. Гильмутдинова. – Челябинск, 2009.
6. Загребина, С.А. О задаче Шоуолтера – Сидорова / С.А. Загребина // Изв. вузов. Математика. – 2007. – №3. – С. 22–28.
7. Загребина, С.А. Задача Шоуолтера – Сидорова – Веригина для линейных уравнений соболевского типа / С.А. Загребина // Неклассические уравнения математической физики: сб. тр. междунар. конф. "Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения посвящ. 100-летию со дня рождения акад. И.Н.Векуа. Новосибирск. – 2007. – С. 150–157.
8. Загребина, С.А. Обобщенная задача Шоуолтера – Сидорова для уравнений соболевского типа с сильно (L,p)-радиальным оператором / С.А. Загребина, М.А. Сагадеева // Вестн. МаГУ. Сер. Математика. – Магнитогорск, 2006. – Вып. 9. – С. 17–27.
9. Загребина, С.А. Начально-конечная задача для линейных эволюционных уравнений соболевского типа на графе / С.А. Загребина, Н.П. Соловьева. – Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2009. – Т.16, вып. 2. – С. 329–330.
10. Келлер, А.В. Численное решение задачи стартового управления для системы уравнений леонтьевского типа / А.В. Келлер // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2009. – Т.16, вып. 2. – С. 345–346.
11. Келлер, А.В. Численное решение задачи жесткого управления для системы уравнений леонтьевского типа / А.В. Келлер // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2009. – Т.16, вып. 4. – С. 666–667.
12. Корпусов, М. О. О квазистационарных процессах в проводящих средах без дисперсии / М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер, А.Г. Свешников // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 2000. – Т. 40, №8. – С. 1237-–1249.
13. Ладыженская, О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – 2-е изд. – М.: Наука, 1970.
14. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А.Г. Свешников, А.Б. Альшин, М.О. Корпусов, Ю.Д. Плетнер. – М.: Физматлит, 2007.
15. Лионс, Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж.-Л. Лионс. – М.: Мир, 1972.
16. Манакова, Н.А. Исследование задач оптимального управления для неклассических уравнений математической физики: дис. ... канд. физ.-мат. наук / Н.А. Манакова. – Челябинск, 2005.
17. Манакова, Н.А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н.А. Манакова // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1185–1192.
18. Осколков, А.П. Нелокальные проблемы для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С.Л. Соболева // Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1991. – Т.198. – С. 31–48.
19. Петровский, И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г. Петровский. – М.: Физматгиз, 1961.
20. Романова, О.А. Жордановы наборы и псевдообратные операторы в теории некоторых классов вырожденных дифференциальных уравнений: дис. ... канд. физ.-мат. наук / О.А. Романова. – Иркутск, 1984.

21. Сидоров, Н.А. Об одном классе вырожденных дифференциальных уравнений с конвергенцией / Н.А. Сидоров // Мат. заметки. – 1984. – Т.25, №4. – С. 569–578.
22. Сидоров, Н.А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления. Иркутск: ИрГУ, 1982.
23. Сидоров, Н.А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений / Н.А. Сидоров, О.А. Романова // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т.19, №9. – С. 1516–1526.
24. Сидоров Н.А. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при старших производных / Н.А. Сидоров, М.В. Фалалеев // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 4. – С. 726–728.
25. Свиридюк, Г.А. Многообразия решений одного класса эволюционных и динамических уравнений / Г.А. Свиридюк // ДАН СССР. – 1989. – Т.304, №2. – С. 301–304.
26. Свиридюк, Г. А. Об одной задаче Showalter / Г. А. Свиридюк // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т.25, №2. – С. 338–339.
27. Свиридюк, Г.А. Одна задача для обобщенного фильтрационного уравнения Буссинеска / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. – 1989. – №2. – С. 55–61.
28. Свиридюк, Г.А. Об одной модели слабосжимаемой вязкоупругой жидкости / Г.А. Свиридюк // Изв. вузов. Математика. – 1994. №1. – С. 62–70.
29. Свиридюк, Г.А. Численное решение систем уравнений леонтьевского типа / Г.А. Свиридюк, С.В. Брычев // Изв. вузов. Математика. – 2003. – №8. – С. 46–52.
30. Свиридюк, Г.А. Задача оптимального управления для одного класса линейных уравнений типа Соболева / Г.А. Свиридюк, А.А. Ефремов // Изв. вузов. Математика. – 1996. – №12. – С. 75–83.
31. Свиридюк, Г.А. Задача Веригина для линейных уравнений соболевского типа с относительно p-секториальными операторами / Г.А. Свиридюк, С.А. Загребина // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т.38, №12. – С. 1646–1652.
32. Свиридюк, Г.А. О складке фазового пространства одного неклассического уравнения / Г.А. Свиридюк, А.Ф. Карамова // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т.41, №10. – С. 1476–1581.
33. Свиридюк, Г.А. Фазовые пространства уравнений типа Соболева с s-монотонными и сильно коэрцитивными операторами / Г.А. Свиридюк, М.В. Климентьев // Изв. ВУЗ. Математика. – 1994. – №11. – С. 75–82.
34. Свиридюк, Г.А. Задача оптимального управления для уравнения Хоффа / Г.А. Свиридюк, Н.А. Манакова // Сиб. журн. индустр. математики. – 2005. – Т. 8, №2. – С. 144–151.
35. Темам, Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Р. Темам. -— 2-е изд. -— М.: Мир, 1981.
36. Фалалеев, М.В. Элементы теории обобщенных решений некоторых классов вырожденных дифференциальных и интегральных уравнений в банаховых пространствах: автореф. ... канд. физ.-мат. наук / М.В. Фалалеев. – Свердловск, 1988.
37. Федоров, В.Е. Оптимальное управление линейными уравнениями соболевского типа / В.Е. Федоров, М.В. Плеханова // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т.40, №11. – С. 1548–1556.
38. Chen, P.J. On a theory of heat conduction involving two temperatures / P.J. Chen, M.E. Gurtin // Z.Angew. Math. Phys. – 1968. – V.19. – P. 614–627.
39. Davis, P.L. A quasilinear parabolic and a related third order problem / P.L. Davis // J. Math. Anal. and Appl. – 1972. – V. 40, №2. – P. 327–335.

40. Demidenko, G.V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest – order derivative / G.V. Demidenko, S.V. Uspenskii. – N.-Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003.
41. Favini, A. Degenerate differential equations in Banach spaces / A. Favini, A. Yagi. – N.-Y.: Marcel Dekker, Inc. 1999.
42. Hallaire, M. On a theory of moisture-transfer / M. Hallaire // Inst. Rech. Agronom. – 1964. – №3. – P. 60–72.
43. Hoff, N.J. Creep buckling / N.J. Hoff // Aeron. Quarterly 7. – 1956. – № 1. – P. 1–20.
44. Lyapunov -– Shmidt method in nonlinear analysis and applications / N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinithyn, M. Falaleev. – Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 2002.
45. Pyatkov, S.G. Operator theory. Nonclassical problems / S.G. Pyatkov. – Utrecht; Boston; Koln; Tokyo: VSP, 2002.
46. Showalter, R.E. The Sobolev equations I. (II) / R.E. Showalter // Appl. Anal. – 1975. – V.5, №1. – P. 15–22. (№2. P. 81–99.)
47. Showalter, R.E. Nonlinear degenerate evolution equations and partial differential equations of mixed type / R.E. Showalter // SIAM J. Math. Anal. – 1975. – V.6, №1. – P. 25–42.
48. Showalter, R.E. Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations / R.E. Showalter. – London; San Francisco; Melbourne: Pitman, 1977.
49. Showalter, R.E. Monotone operators in Banach Space and and nonlinear partial differential equations / R.E. Showalter. – Providence: AMS, 1997.
50. Sviridyuk, G.A. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / G.A. Sviridyuk, V.E. Fedorov. – Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003.
51. Ting T.W. Parabolic and pseudoparabolic partial differential equations / T.W. Ting // J. Math. Soc. Jap. – 1969. – V.21, №3. – P. 440–453.

G. A. Sviridyuk, S. A. Zagrebina

The Showalter-Sidorov problem as a phenomena of the Sobolev-type equations.

Abstract. This article has a survey character. It contains: 1. The Sowalter approach, 2. The Sidorov approach, 3. Applications of the Showalter-Sidorov problem, 4. A generalization of the Showalter-Sidorov problem.

Keywords: the Cauchy problem, the Showalter-Sidorov problem, initial-finish value problem, the Sobolev-type equations

Свиридюк Георгий Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, Кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76 тел.: (351)2679339 (ridyu@math.susu.ac.ru)

Загребина Софья Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, Кафедра уравнений математической физики, Южно-Уральский государственный университет, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76 тел.: (351)2679339

Georgy A. Sviridyuk, D. Sc. (Physics and Math.), Full professor, chief of department South Ural State University, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, 454080 Phone: (351)2679339 (ridyu@math.susu.ac.ru)

Sophiya A. Zagrebina, Cand. of Science (Physics and Math.), Associate Professor, South Ural State University, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, 454080 Phone: (351)2679339