Серия «Математика»
2017. Т. 19. С. 164—177

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.977.5
MSC 93C10, 93C23
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.19.164

Импульсные управляемые системы с траекториями ограниченной p-вариации*

О. Н. Самсонюк
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН

М. В. Старицын
Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН

Аннотация. Заметка посвящена проблеме релаксационного (импульсно-траекторного) расширения управляемых систем с аффинной по управлению правой частью при отсутствии равномерного ограничения на L_1-норму управления. Возникающие в таких системах обобщенные траектории могут иметь неограниченную полную вариацию. Известные результаты по импульсно-траекторному расширению в данном классе управляемых систем в основном рассматривают обобщенные траектории ограниченной вариации, соответствующие импульсным воздействиям типа ограниченной борелевской меры, и не охватывают рассматриваемый случай. Цель исследования — поиск конструктивных методов построения подобных расширений в классе траекторий ограниченной p-вариации ($p > 1$) (в смысле определения Н. Винера) и возможностей их явного описания.

Предлагается подход к расширению управляемых систем с обобщенными траекториями ограниченной p-вариации, $p > 1$, на основе аналога метода разрывной замены времени. Данный подход включает пространственно-временное расширение исходной системы и переход к вспомогательной системе с непрерывными решениями ограниченной p-вариации. В статье рассмотрен случай скалярного управления, однако аналогичное пространственно-временное преобразование также применимо к управляемым системам с аффинной по векторному управлению правой частью, в том числе при отсутствии свойства инволютивности (в частности, более традиционного предположения коммутативности) векторных полей.

Для случая $p \in [1, 2)$ и скалярного импульсного управления получено явное представление расширенной системы с помощью специального дискретно-непрерывного интегрального уравнения, включающего интеграл Юнга.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-31-60030, при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-8081.2016.9).

Ключевые слова: релаксационные расширения управляемых систем, траектории ограниченной p-вариации, импульсное управление.

Введение

Многие идеи современной теории импульсного управления возникли из задачи импульсно-траекторного расширения управляемых систем вида

$$\dot{x} = f(t, x) + G(t, x)v, \qquad t \in [a, b], \tag{0.1}$$

с абсолютно непрерывными траекториями $x(\cdot)$ и измеримыми управлениями $v(\cdot)$. В отсутствие равномерного ограничения на норму управления в L_∞ система (0.1) имеет неограниченное множество скоростей, а множество ее решений оказывается не замкнутым в «естественной» топологии равномерной сходимости. Это связано с тем, что решения (в смысле Каратеодори) могут оказаться сколь угодно близки поточечно к разрывным функциям, не допускаемым уравнением (0.1). По этой причине задачи оптимизации, поставленные в системах вида (0.1), как правило, не имеют решения и относятся к классу так называемых вырожденных задач оптимального управления.

Значительный вклад в исследование вырожденных задач внесли работы В. И. Гурмана, его коллег и учеников [1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 11; 12; 13], послужившие отправной точкой для исследования обобщенных решений системы (0.1) из класса интегрируемых по Лебегу функций и импульсных управлений, заданных распределениями. Последнее оказалось возможным только для частных случаев систем, в которых матрица при управлении $G(t, x)$ удовлетворяет условию инволютивности столбцов или более жесткому условию коммутативности типа Фробениуса [4; 9; 10; 11; 18]. Данные условия связывают с корректностью импульсно-траекторного расширения системы (0.1). Отметим также исследования [14; 29; 32; 37; 45; 47], примыкающие к данному направлению.

Что касается системы (0.1) в общем положении, здесь подавляющее большинство публикаций посвящено расширениям в классе траекторий ограниченной вариации, отвечающих импульсным воздействиям типа векторной борелевской меры [10; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22; 24; 28; 30; 36; 38; 42; 43; 44; 45; 47]. Последние возникают при дополнительном равномерном ограничении на норму управления $v(\cdot)$ в пространстве L_1.

Цель данной работы — обозначить подход к построению импульсно-траекторных расширений системы (0.1) в классе траекторий неограниченной вариации, имеющих тем не менее ограниченную p-вариацию, $p > 1$ (в смысле определения Н. Винера [48]). В качестве мотивации к изучению именно такого типа расширений заметим, что подобные модели естественно возникают в ряде задач теории случайных процессов

[39; 40; 41]. При этом сама теория управляемых систем с решениями ограниченной p-вариации отличается весьма оригинальным и развитым математическим аппаратом.

Исследования динамических систем с непрерывными решениями ограниченной p-вариации, по-видимому, инспирированы именно тематикой стохастических дифференциальных уравнений, где локальная неограниченность полной вариации «входного сигнала» является типичной ситуацией. Однако, как отмечается в ряде источников, основные результаты в этом направлении носят детерминированный характер и составляют ядро относительно нового направления теории динамических систем, называемого в иностранной литературе «rough path theory» (см., например, работы [33; 34; 39; 40; 41; 49]). Отметим, что случай $p = 2$ является в некотором смысле пограничным: при $p \in (1, 2)$ удается описать решение управляемой системы посредством прямого обобщения интеграла Лебега – Стилтьеса, называемого интегралом Юнга, в то время как при $p \geq 2$ решения требуют более тонкого, алгебраического представления посредством формальных рядов Чена и так называемых итерированных интегралов.

Тем не менее, даже в случае $p \in (1, 2)$ не удается напрямую применить результаты указанных работ к системе (0.1) ввиду возможного совпадения точек скачка первообразной управления и соответствующего решения. В §4 будет рассмотрен подход, основанный на аналоге метода разрывной замены времени. Он приводит к пространственно-временному расширению (0.1) путем перехода к эквивалентной вспомогательной системе с непрерывными решениями ограниченной p-вариации. Как будет показано, для случая $p \in [1, 2)$ и скалярного импульсного управления это дает возможность явного описания расширенной системы с помощью дискретно-непрерывного интегрального уравнения с интегралом Юнга.

1. Основные обозначения и определения

Будем говорить, что функция $w : T \to \mathbb{R}$ имеет ограниченную полную p-вариацию на отрезке $T = [a, b]$, если

$$\underset{[a,b]}{p\text{-var}}\, w(\cdot) := \left(\sup_{\pi} \sum_{i=1}^{N} \left| w(t_i) - w(t_{i-1}) \right|^p \right)^{1/p} < \infty,$$

где sup берется по всем конечным разбиениям $\pi = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ отрезка $[a, b]$, таким что $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$.

Введем ряд необходимых обозначений. Через $V_p(w; T) := \underset{T}{p\text{-var}}\, w(\cdot)$ обозначим полную p-вариацию функции $w : T \to \mathbb{R}$ на отрезке T, $BV_p(T)$ будет означать банахово пространство функций ограниченной

p-вариации с нормой $||w||_{BV_p} = ||w||_\infty + V_p(w;T)$, а $C^{p\text{-var}}(T)$ — подпространство $BV_p(T)$, состоящее из непрерывных функций. Кроме того, в $C^{p\text{-var}}(T)$ выделим множество p-абсолютно непрерывных функций. Напомним, что функция $w : T \to \mathbb{R}$ называется p-абсолютно непрерывной, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое что для любого конечного набора непересекающихся интервалов $(a_k, b_k) \subset T$, удовлетворяющих условию $\Bigl(\sum\limits_k (b_k - a_b)^p\Bigr)^{1/p} < \delta$, выполнено неравенство $\Bigl(\sum\limits_k |w(b_k) - w(a_k)|^p\Bigr)^{1/p} < \varepsilon$. Очевидно, что при $p = 1$ это определение совпадает с обычным понятием абсолютно непрерывной функции.

Примеры непрерывных функций ограниченной p-вариации, $p > 1$:
а) ни в одной точке не дифференцируемая функция

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi(2^n t)}{2^n}, \qquad t \in [0,1],$$

где $\phi(y) = \min\limits_{z\in\mathbb{Z}} |y - z|$, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;

б) $w(t) = \begin{cases} t\sin(1/t), & t \in (0,1], \\ 0, & t = 0. \end{cases}$

Следующий результат обобщает классический критерий предкомпактности в топологии поточечной сходимости пространства функций ограниченной вариации, известный как вторая теорема Хелли.

Теорема 1. ([31; 46]) *Пусть $\{w_k(\cdot)\}$ — последовательность функций, удовлетворяющих условию $V_p(w_k;T) \le M$, $k = 1,2,\ldots$, для некоторых $M > 0$ и $p \ge 1$. Тогда найдутся функция $w \in BV_p(T)$ и подпоследовательность $\{w_{k_j}(\cdot)\}$, такие что имеет место поточечная сходимость*

$$w_{k_j}(t) \to w(t), \qquad t \in T.$$

Ниже, при описании импульсно-траекторного расширения системы (0.1) нам также понадобится понятие интеграла Юнга, обобщающее определение интеграла Римана-Стилтьеса на случай функций ограниченной p-вариации, $p \in (1,2)$. Существование интеграла Юнга устанавливает следующая

Теорема 2. ([33; 35; 49]) *Пусть $g \in BV_q(T)$ и $w \in BV_p(T)$ для некоторых $p,q > 0$, удовлетворяющих условию $1/p + 1/q > 1$. Тогда интеграл*

$$\int_a^b g(t)dw(t) \tag{1.1}$$

существует

а) *как интеграл Римана – Стилтьеса, если функции* $g(\cdot)$ *и* $w(\cdot)$ *не имеют общих точек разрыва;*

б) *как обобщение интеграла Римана – Стилтьеса* [33], *если функции* $g(\cdot)$ *и* $w(\cdot)$ *не имеют общих односторонних точек разрыва (в частности, если функция* $g(\cdot)$ *непрерывна слева, а* $w(\cdot)$ — *справа, или наоборот).*

Кроме того, для любого $s \in [a,b]$ *имеет место неравенство*

$$\Big| \int_a^b g(t)dw(t) - g(s)\big(w(b) - w(a)\big)\Big| \le C_{p,q} V_q(g;T) V_p(w;T), \qquad (1.2)$$

где $C_{p,q} = \zeta(p^{-1} + q^{-1})$, $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$.

2. Постановка задачи

Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} = f(t,x) + g(t,x)\dot{w}, \quad x(a) = x_0, \quad t \in T := [a,b] \subset \mathbb{R}, \qquad (2.1)$$

где $x, w : T \to \mathbb{R}$ — абсолютно непрерывные функции и $x_0 \in \mathbb{R}$ — заданное начальное состояние. Функции $w(\cdot)$ играют роль управлений.

Будем предполагать, что функции $f(t,x), g(t,x) : T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывны, удовлетворяют по переменной x локальному условию Липшица и условию не более чем линейного роста.

Пусть дано $p \ge 1$. Рассмотрим последовательность управлений $\{w_k(\cdot)\}$ с равномерно ограниченной полной p-вариацией, т.е.

$$V_p(w_k;T) \le M \ \text{ для некоторого } M > 0, \qquad (2.2)$$

и предположим, что имеет место поточечная сходимость $\{w_k(\cdot)\}$ к некоторой функции $w(\cdot) \in BV_p(T)$, такой что $w(a) = 0$.

Пусть $\{x_k(\cdot)\}$ — последовательность решений Каратеодори системы (2.1), отвечающих последовательности управлений $\{w_k(\cdot)\}$. Назовем *обобщенными решениями системы* (2.1) все частичные поточечные пределы последовательности $\{x_k(\cdot)\}$.

Справедлива

Лемма 1. *Пусть* $\{w_k(\cdot)\}$ *и* $\{x_k(\cdot)\}$ — *последовательности управлений со свойством* (2.2) *и соответствующих решений системы* (2.1). *Тогда* а) $\{x_k(\cdot)\}$ *равномерно ограничены, и существует константа* $K > 0$:

$$V_p(x_k;T) \le K \quad \forall\, k = 1, 2, \ldots;$$

б) *существуют функция* $x(\cdot) \in BV_p(T)$, *удовлетворяющая условию* $V_p(x;T) \le K$, *и подпоследовательность из* $\{x_k(\cdot)\}$, *поточечно сходящаяся к* $x(\cdot)$.

Цель работы состоит в конструктивном описании обобщенных решений ограниченной p-вариации системы (2.1). В §3 показано, что при $p \in [1, 2)$ обобщенное решение является решением дискретно-непрерывного интегрального уравнения, включающего интеграл Юнга по непрерывной составляющей управления и сумму скачков решения, определенных при помощи вспомогательных функций. В §4 для общего случая $p > 1$ рассмотрен подход, обобщающий известный метод разрывной замены времени (см., например, [10; 18; 43]). Он приводит к пространственно-временному расширению системы (2.1) и дает эквивалентное описание расширенной, импульсной системы через обычную вспомогательную систему с управлениями w, являющимися p-абсолютно непрерывными функциями. Непрерывные решения этой системы, соответствующие непрерывным управлениям ограниченной p-вариации, описываются интегральным уравнением с интегралом Юнга при $p \in [1, 2)$ [39] или, в общем случае, уравнениями, понятие решения и свойства которых изучены в [26; 33; 34; 40; 41].

3. Интегральное представление обобщенного решения ограниченной p-вариации, $p \in [1, 2)$

Пусть $p \in [1, 2)$. Рассмотрим управление $w(\cdot) \in BV_p(T)$, непрерывное справа на промежутке $(a, b]$ и удовлетворяющее условию $w(a) = 0$. Дополнительное предположение о непрерывности справа $w(\cdot)$ носит технический характер и позволяет записать уравнение (3.1) ниже в более краткой и наглядной форме, пренебрегая устранимыми разрывами решений.

Обозначим через $S_d(w)$ множество точек скачка $w(\cdot)$, т. е.

$$S_d(w) = \{s \in T \mid [w(s)] := w(s) - w(s-) \neq 0\}.$$

Напомним, что множество точек разрыва функции ограниченной p-вариации не более чем счетно [31].

Рассмотрим дискретно-непрерывное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} x(t) = x_0 &+ \int_a^t f\big(t, x(t)\big) dt + \int_a^t g\big(t, x(t)\big) dw_c(t) \\ &+ \sum_{s \leq t,\ s \in S_d(w)} \big(z_s(1) - x(s-)\big), \quad t \in (a, b], \quad x(a) = x_0. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь второй интеграл в правой части уравнения понимается в смысле интеграла Юнга, где $w_c(\cdot) \in BV_p(T)$ — непрерывная составляющая управления $w(\cdot)$, а функции $z_s(\cdot)$, $s \in S_d(w)$, определены как решения соответствующих дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_s(\tau)}{d\tau} = g\big(s, z_s(\tau)\big)[w(s)], \quad z_s(0) = x(s-), \qquad \tau \in [0, 1]. \tag{3.2}$$

Под решением уравнения (3.1), отвечающим заданному управлению $w(\cdot)$ и начальному условию x_0, понимается непрерывная справа на $(a, b]$ функция $x \in BV_p(T)$, подстановка которой в (3.1) обращает уравнение в тождество.

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть $p \in [1, 2)$. Предположим дополнительно, что функция $g(t, x)$ ограничена, при всех $t \in T$ имеет ограниченную частную производную $\frac{\partial}{\partial x} g$, удовлетворяющую условию Гёльдера с показателем $\alpha > p - 1$, и имеет ограниченную q-вариацию по переменной t равномерно по $x \in \mathbb{R}$ с некоторым q, $1/p + 1/q > 1$. Тогда:*

1) *уравнение* (3.1) *имеет единственное решение $x(\cdot) \in BV_p(T)$ при заданном управлении $w(\cdot) \in BV_p(T)$ и начальном условии x_0;*

2) *существует последовательность решений системы* (2.1) $\{x_k(\cdot)\}$, *элементы которой имеют равномерно ограниченные p-вариации и поточечно сходятся к $x(\cdot)$.*

Доказательство теоремы основано на применении к системе (2.1) описанного в §4 приема разрывной замены времени.

4. Пространственно-временное расширение и разрывная замена времени

Перспективным для описания обобщенных решений ограниченной p-вариации в общем случае $p > 1$ является применение аналога метода разрывной замены времени, приводящего к пространственно-временному расширению (в терминологии [43], предложенной для $p = 1$) с траекториями из пространства $C^{p\text{-var}}(T)$.

Эффективность метода разрывной замены времени связана с тем, что его применение приводит к параметрическому представлению управления ограниченной p-вариации, при котором последнее оказывается p-абсолютно непрерывной функцией параметра — вспомогательного времени.

Пусть даны последовательность $\{w_k(\cdot)\}$, элементы которой удовлетворяют условию (2.2) для некоторого $M > 0$, и неотрицательная функция $V_p(\cdot)$, такие, что имеет место поточечная сходимость

$$V_{pk}(t) \to V_p(t) \qquad t \in T.$$

Здесь $V_{pk}(t) := V_p(w_k; [a, t])$.

Для каждого $w_k(\cdot)$ определим функцию $\tau_k = \tau_k(t) : T \to \mathcal{T}_k$, $\mathcal{T}_k := [0, b - a + V_{pk}(b)]$, правилом

$$\tau_k = t - a + V_{pk}(t)$$

и обозначим через η_k функцию $\mathcal{T}_k \mapsto T$, обратную к τ_k. Рассмотрим параметрически заданные функции $\Big(\eta_k(\tau), w_k\big(\eta_k(\tau)\big)\Big)$, $\tau \in \mathcal{T}_k$, $k =$

$1, 2, \dots$, и, переходя при необходимости к подпоследовательности, определим функцию $\Big(\eta(\tau), W(\tau)\Big)$, $\tau \in \mathcal{T} := [0, b-a+V_p(b)]$, как поточечный предел

$$\eta(\tau) := \lim_{k\to\infty} \eta_k(\tau), \qquad W(\tau) := \lim_{k\to\infty} w\big(\eta_k(\tau)\big) \qquad \forall\, \tau \in \mathcal{T}$$

(при необходимости продолжаем функции $\Big(\eta_k(\cdot), w_k\big(\eta_k(\cdot)\big)\Big)$ на полуинтервалы $\big(b-a+V_{pk}(b), b-a+V_p(b)\big]$ соответствующими постоянными значениями $\Big(\eta_k(b-a+V_{pk}(b)), w_k\big(\eta_k(b-a+V_{pk}(b))\big)\Big)$). Тогда $W(0) = 0$ и $W(\cdot)$ имеет конечную p-вариацию на отрезке $\mathcal{T}$, причем

$$V_p\big(\eta(\tau)\big) \geq V_p(W; [0, \tau]) \quad \forall\, \tau \in \mathcal{T}.$$

Можно показать, что $W(\cdot)$ является p-абсолютно непрерывной функцией переменной τ на отрезке $[0, b-a+V_p(b)]$. Возвращение к исходной временной переменной t при помощи обратной (вообще говоря, разрывной) замены времени $\tau(t) = \inf\{s \in \mathcal{T} : \eta(s) > t\}$ дает соответствующее импульсное управление.

Описанное преобразование времени позволяет получить для соответствующей импульсной системы эквивалентную вспомогательную систему с p-абсолютно непрерывными управлениями, к которой уже применимы отдельные результаты [33; 34; 39; 40; 41; 49], связанные уравнениями в пространстве непрерывных решений ограниченной p-вариации.

Заметим, что аналогичное пространственно-временное преобразование также применимо к управляемым системам с аффинной по векторному управлению правой частью, в том числе при отсутствии свойства инволютивности (в частности, более традиционного предположения коммутативности) векторных полей.

Заключение

Описанный подход к изучению импульсных систем с траекториями неограниченной вариации не изложен систематически в известной нам литературе. В качестве потенциального объекта исследования, импульсные системы с траекториями ограниченной p-вариации выделены в недавней статье [27].

В настоящей заметке мы ограничились простейшим случаем скалярного управляющего воздействия. Очевидное направление обобщения полученных результатов состоит в их распространении на системы с векторным управлением $v(\cdot)$. Другая, гораздо более сложная задача — описание релаксационного расширения системы (2.2) в случае $p \geq 2$. Определенные надежды здесь можно связывать с методами теории итерированных интегралов и аппаратом «rough path theory». Наконец, интерес представляет возможность применения предлагаемого подхода к исследованию моделей стохастического управления.

Список литературы

1. Гурман В. И. Об оптимальных процессах особого управления / В. И. Гурман // Автоматика и телемеханика. – 1965. – Т. 26, № 5. – С. 782–791.
2. Гурман В. И. Вырожденные задачи оптимального управления / В. И. Гурман. – М. : Наука, 1977. – 304 с.
3. Гурман В. И. Вырожденные задачи оптимального управления и метод кратных максимумов / В. И. Гурман, В. А. Дыхта // Автоматика и телемеханика. – 1977. – № 3. – С. 51–59.
4. Гурман В. И. Принцип расширения в задачах управления / В. И. Гурман. – 2-е изд. перераб. и доп. – М. : Физматлит, 1997. – 288 с.
5. Гурман В. И. Представление и реализация обобщенных решений управляемых систем с неограниченным годографом / В. И. Гурман, Ю. Л. Сачков // Автоматика и телемеханика. – 2008. – № 4. – С. 72–80.
6. Гурман В. И. Преобразования управляемых систем для исследования импульсных режимов / В. И. Гурман // Автоматика и телемеханика. – 2009. – № 4. – С. 89–97.
7. Гурман В. И. О преобразованиях вырожденных задач оптимального управления / В. И. Гурман // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 11. – С. 132–138.
8. Дыхта В. А. Условия минимума на множестве последовательностей в вырожденной вариационной задаче / В. А. Дыхта, Г. А. Колокольникова // Мат. заметки. – 1983. – Т. 34, № 5. – С. 735–744
9. Дыхта В. А. Оптимальное импульсное управление с приложениями / В. А. Дыхта, О. Н. Самсонюк. – 2-е изд. – М. : Физматлит, 2003. – 256 с.
10. Завалищин С. Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С. Т. Завалищин, А. Н. Сесекин. – М. : Наука, 1991. – 256 с.
11. Колокольникова Г. А. Исследование обобщенных решений задач оптимального управления с линейными неограниченными управлениями на основе кратных преобразований / Г. А. Колокольникова // Дифференц. уравнения. – 1992. – Т. 28, № 11. – С. 1919–1932.
12. Кротов В. Ф. Разрывные решения вариационных задач / В. Ф. Кротов // Изв. вузов. Математика. – 1961. – № 1. – С. 86–98.
13. Кротов В. Ф. Методы и задачи оптимального управления / В. Ф. Кротов, В. И. Гурман. – М. : Наука, 1973. – 448 с.
14. Куржанский А. Б. Оптимальные системы с импульсными управлениями. Дифференциальные игры и задачи управления / А. Б. Куржанский – Свердловск : УНЦ. АН СССР, 1975. – С. 131–156.
15. Миллер Б. М. Условия оптимальности в задаче управления системой, описываемой дифференциальным уравнением с мерой / Б. М. Миллер // Автоматика и телемеханика. – 1982. – № 6. – С. 60–72.
16. Миллер Б. М. Условия оптимальности в задачах обобщенного управления I, II / Б. М. Миллер // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 3. – С. 362–370; № 4. – С. 505–513.
17. Миллер Б. М. Метод разрывной замены времени в задачах оптимального управления импульсными и дискретно-непрерывными системами / Б. М. Миллер // Автоматика и телемеханика. – 1993. – № 12. – С. 3–32.
18. Миллер Б. М. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями / Б. М. Миллер, Е. Я. Рубинович – М.: Наука, 2005. – 430 с.
19. Миллер Б. М. Разрывные решения в задачах оптимального управления и их представление с помощью сингулярных пространственно-временных преобразований / Б. М. Миллер, Е. Я. Рубинович // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 12. – С. 56–103.

20. Самсонюк О. Н. Инвариантность множеств относительно нелинейных импульсных управляемых систем / О. Н. Самсонюк // Автоматика и телемеханика. – 2015. – № 3. – С. 44–61.
21. Сесекин А. Н. О множествах разрывных решений нелинейных дифференциальных уравнений / А. Н. Сесекин // Изв. вузов. Математика. – 1994. – № 6. – С. 83-89.
22. Сесекин А. Н. Динамические системы с нелинейной импульсной структурой / А. Н. Сесекин // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – Екатеринбург, 2000. – Т. 6. – С. 497–510.
23. Терехин А. П. Интегральные свойства гладкости периодических функций ограниченной p-вариации / А. П. Терехин // Мат. заметки. – 1967. – Т. 2. – С. 289–300.
24. Филипова Т. Ф. Построение многозначных оценок множеств достижимости некоторых нелинейных динамических систем с импульсным управлением / Т. Ф. Филиппова // Тр. ИММ УрО РАН. – 2009. – Т. 15, № 4. – С. 262–269.
25. Чистяков В. В. К теории многозначных отображений ограниченной вариации одной вещественной переменной / В. В. Чистяков // Матем. сб. – 1998. – Т. 189, № 5. – С. 153–176.
26. Appell J. Bounded Variation and Around / J. Appell, J. Banas, N. Merentes. – De Gruyter, Boston, 2014. – 476 p.
27. Aronna M. S. On optimal control problems with impulsive commutative dynamics / M. S. Aronna, F. Rampazzo // In Proc. of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control. – 2013. – P. 1822–1827.
28. Arutyunov A. V. On constrained impulsive control problems / A. V. Arutyunov, D. Yu. Karamzin, F. L. Pereira // J. Math. Sci.. – Vol. 165. – P. 654–688.
29. Bressan A. On differential systems with vector-valued impulsive controls / A. Bressan, F. Rampazzo // Boll. Un. Mat. Ital. B(7). – 1988. – Vol. 2. – P. 641–656.
30. Bressan A. Impulsive control systems without commutativity assumptions / A. Bressan, F. Rampazzo // Optim. Theory Appl. – 1994. – Vol. 81, N 3. – P. 435–457.
31. Chistyakov V. V. On maps of bounded p-variation with p>1 / V. V. Chistyakov, O. E. Galkin // Positivity. – 1998. – Vol. 2. – P. 19–45.
32. Daryin A. N. Dynamic programming for impulse control / A. N. Daryin, A. B. Kurzhanski // Ann. Reviews in Control. – 2008. – Vol. 32. – P. 213–227.
33. Dudley R. M. Product integrals, Young integral and p-variation / R. M. Dudley, R. Norvaisa – Springer, 1999.
34. Dudley R. M. Concrete functional calculus / R. M. Dudley, R. Norvaisa – Springer, 2011. – 671 p.
35. Freedman M. A. Operators of p-variation and the evolution representation problem / M. A. Freedman // Trans. Amer. Math. Soc. – 1983. – Vol. 279. – P. 95–112.
36. Goncharova E. Optimization of measure-driven hybrid systems / E. Goncharova, M. Staritsyn // J. Optim. Theory Appl. – 2012. – Vol. 153, N 1. – P. 139–156.
37. Guerra M. Frechet generalized trajectories and minimizers for variational problems of low coercivity / M. Guerra, A. Sarychev // Journal of Dynamical and Control Systems. – 2015. – Vol. 21, no 3. – P. 351–377.
38. Karamzin D. Yu. Necessary conditions of the minimum in impulsive control problems with vector measures / D. Yu. Karamzin // J. of Math. Sci. – 2006. – Vol. 139. – P. 7087–7150.
39. Lejay A. An introduction to rough paths / A. Lejay // Lecture Notes in Mathematics. – 2003. – Vol. 1832. – P. 1–59.

40. Lyons T. Differential equations driven by rough signals / T. Lyons // Revista Matemática Iberoamericana. – 1998. – P. 215–310.
41. Lyons T. System control and rough paths / T. Lyons, Z. Qian. – Oxford : Clarendon Press, 2002. – 216 p. – Oxford Mathematical Monographs.
42. Miller B. M. The generalized solutions of nonlinear optimization problems with impulse control / B. M. Miller // SIAM J. Control Optim. – 1996. – Vol. 34. – P. 1420–1440.
43. Motta M. Space-time trajectories of nonlinear systems driven by ordinary and impulsive controls / M. Motta, F. Rampazzo // Differential Integral Equations. – 1995. – Vol. 8. – P. 269–288.
44. Motta M. Dynamic programming for nonlinear systems driven by ordinary and impulsive control / M. Motta, F. Rampazzo // SIAM J. Control Optim. – 1996. – Vol. 34. – P. 199–225.
45. Pereira F. L. Necessary conditions of optimality for vector-valued impulsive control problems / F. L. Pereira, G. N. Silva // Syst. Control Lett. – 2000. – Vol. 40. – P. 205–215.
46. Porter J. E. Helly's selection principle for function of bounded p-variation / J. E. Porter // Rocky Mountain J. Math. – 2005. – Vol. 35, N 2. – P. 675-679.
47. Silva G. N. Measure differential inclusions / G. N. Silva, R. B. Vinter // J. of Mathematical Analysis and Applications. – 1996. – Vol. 202. – P. 727–746.
48. Wiener N. The quadratic variation of a function and its Fourier coeficients / N. Wiener // J. Math. Phys. – 1924. – Vol. 3. – P. 72–94.
49. Young L. C. An inequality of the Hólder type, connected with Stieltjes integration / L. C. Young // Acta Math. – 1936. – Vol. 67. – P. 251–282.

Самсонюк Ольга Николаевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134, тел.: (3952) 453151 (e-mail: samsonyuk.olga@gmail.com)

Старицын Максим Владимирович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН, 664033, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134, тел.: (3952) 453095 (e-mail: starmaxmath@gmail.com)

O. N. Samsonyuk, M. V. Staritsyn

Impulsive Control Systems with Trajectories of Bounded p-Variation

Abstract. The paper deals with impulse-trajectory relaxations of control-affine systems under the assumption that L_1-norms of the control functions are not uniformly bounded. Generalized solutions of such control systems may be of infinite total variation. Most of the known results related to impulse-trajectory relaxations of control-affine systems are mainly devoted to the case of state with bounded variation and controls of the type of bounded Borel measures and do not concern the considered case. The main issue of the study are constrictive techniques for impulse-trajectory relaxations within the class of functions of bounded p-variation ($p > 1$) (in the sense N. Wiener) and explicit representations of relaxed systems.

Based on a sort of discontinuous time reparametrization, we propose a new approach to trajectory extension of systems with generalized solutions of bounded p-variation,

$p > 1$. This approach includes some space-time extension of the original system and its transformation to an auxiliary one with continuous solutions of bounded p-variation. In this paper, we dwell on the case of scalar control inputs, while a similar space-time transformation can be applied for control-affine systems with vector-valued inputs, even, in the absence of the involution property (or a more conventional commutativity assumption) of the vector fields.

For the case $p \in [1, 2)$ and scalar control input, we obtain an explicit representation of the extended control system by a specific discrete-continuous integral equation involving Young integral.

Keywords: trajectory relaxations of control systems, solutions of bounded p-variation, impulsive control.

References

1. Gurman V.I. Optimal Processes of Singular Control. *Autom. Remote Control*, 1965, vol. 26, pp. 783-792.
2. Gurman V.I. *Vyrozhdennye zadachi optimal'nogo upravleniya* [Degenerate Problems of Optimal Control]. Moscow, Nauka, 1977. 304 p.
3. Gurman V.I. , Dykhta V.A., Singular Problems of Optimal Control and the Method of Multiple Maxima. *Autom. Remote Control*, 1977, vol. 38, no 3, pp. 343-350.
4. Gurman V.I. *Printsip rasshireniya v zadachakh optimal'nogo upravleniya* [The Extension Principle in Optimal Control Problems]. Moscow, Fizmatlit, 1997. 288 p.
5. Gurman V.I., Sachkov Yu.L. Representation and Realization of the Generalized Solutions of the Unlimited-locus Controllable Systems. *Autom. Remote Control*, 2008, vol. 69, no 4, pp. 609-617. https://doi.org/10.1134/S0005117908040073
6. Gurman V.I. Transformations of Control Systems for the Investigation of Pulse Modes. *Autom. Remote Control*, 2009, vol. 70, no 4, pp. 644-651. https://doi.org/10.1134/S0005117909040109
7. Gurman V.I. On Transformations of Degenerate Optimal Control Problems. *Autom. Remote Control*, 2013, vol. 74, no 11, pp. 1878-1882. https://doi.org/10.1134/S000511791311009X
8. Dykhta V.A., Kolokolnikova G.A. Minimum Conditions on the Set of Sequences in a Degenerate Variational Problem. *Mat. Zametki*, 1983, vol. 34, no 5, pp. 735-744. https://doi.org/10.1007/BF01157453
9. Dykhta V.A., Samsonyuk O.N. *Optimal'noe impul'snoe upravlenie s prilozheniyami* [Optimal Impulsive Control with Applications]. Moscow, Fizmatlit, 2000. 256 p.
10. Zavalishchin S.T., Sesekin A.N. *Impul'snye processy: modeli i prilozhenija* [Impulse Processes: Models and Applications]. Moscow, Nauka, 1991. 256 p.
11. Kolokolnikova G.A. Study of the Generalized Solutions of the Problem of Optimal Control with Unlimited Linear Controls on the Basis of Multiple Transformations. *Diff. Uravn*, 1992, vol. 28, no 11, pp. 1919-1932.
12. Krotov V.F. Discontinuous Solutions of the Variational Problems. *Izv. Vuzov, Mat.*, 1961, no 1, pp. 86-98.
13. Krotov V.F., Gurman V.I. *Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya* [Methods and Problems of Optimal Control]. Moscow, Nauka, 1973. 448 p.
14. Kurzhanski A.B. *Optimal'hye sistemy s impul'snymi upravleniyami. Differensyal'nye igry i zadachi upravleniya* [Optimal Systems with Impulse Controls. Differential Games and Control Problems], UNC AN SSSR, Sverdlovsk, 1975, pp. 131-156.
15. Miller B.M. Optimality Condition in the Control Problem for a System Described by a Measure Differential Equation. *Autom. Remote Control*, 1982, vol. 43, no 6, part 1, pp. 752-761.

16. Miller B.M. Conditions for the Optimality in Problems of Generalized Control. I, II, *Autom. Remote Control*, 1992, vol. 53, no 3, part 1, pp. 362–370; no 4, pp. 505-513.
17. Miller B.M. Method of Discontinuous Time Change in Problems of Control of Impulse and Discrete-Continuous Systems. *Autom. Remote Control*, 1993, vol. 54, no 12, part 1, pp. 1727-1750.
18. Miller B.M., Rubinovich E.Ya. *Optimizatsiya dinamicheskikh sistem s impul'snymi upravleniyami* [Optimization of Dynamic Systems with Impulsive Controls]. Moscow, Nauka, 2005. 430 p.
19. Miller B.M., Rubinovich E. Ya. Discontinuous Solutions in the Optimal Control Problems and Their Representation by Singular Space-time Transformations. *Autom. Remote Control*, 2013, vol. 74, no 12, pp. 1969-2006. https://doi.org/10.1134/S0005117913120047
20. Samsonyuk O.N. Invariant Sets for the Nonlinear Impulsive Control Systems. *Autom. Remote Control*, 2015, vol. 76, no 3, pp. 405-418. https://doi.org/10.1134/S0005117915030054
21. Sesekin A.N. On the Set of Discontinuous Solutions of Nonlinear Differential Equations. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved., Mat.*, 1994, vol. 38, no 6, pp. 83-89.
22. Sesekin A.N. Dinamicheskie sistemy s nelinejnoj impul'snoj strukturoj [Dynamical Systems with Nonlinear Impulsive Structure]. *Trudy Inst. Mat. Mekh. UrO RAN, Ekaterinburg*, 2000, vol. 6, pp. 497-510.
23. Terehin A.P. Integral Smoothness Properties of Periodic Functions of Bounded p-Variation. *Mathematical Notes*, 1967, vol. 2, no 3, pp. 659-665. https://doi.org/10.1007/BF01094056
24. Filippova T.F. Construction of Set-valued Estimates of Reachable Sets for Some Nonlinear Dynamical Systems with Impulsive Control. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues)*, 2010, vol. 269, suppl. 1, pp. 95-102. https://doi.org/10.1134/S008154381006009X
25. Chistyakov V.V. On the Theory of Set-valued Maps of Bounded Variation of one Real Variable. *Sbornik: Mathematics*, 1998, vol. 189, no 5, pp. 797-819. https://doi.org/10.1070/SM1998v189n05ABEH000321
26. Appell J., Banas J. and Merentes N. Bounded Variation and Around. De Gruyter, Boston, 2014. 476 p.
27. Aronna M. S., Rampazzo F. On Optimal Control Problems with Impulsive Commutative Dynamics. *In Proc. of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control*, 2013, pp. 1822-1827. https://doi.org/10.1109/CDC.2013.6760147
28. Arutyunov A.V., Karamzin D. Yu., Pereira F.L. On Constrained Impulsive Control Problems. *J. Math. Sci.*, 2010, vol. 165, pp. 654-688. https://doi.org/10.1007/s10958-010-9834-z
29. Bressan A., Rampazzo F. On Differential Ssystems with Vector-valued Impulsive Controls. *Boll. Un. Mat. Ital. B(7)*, 1988, vol. 2, pp. 641-656.
30. Bressan A., Rampazzo F. Impulsive Control Systems Without Commutativity Assumptions. *J. Optim. Theory Appl.*, 1994, vol. 81, no 3, pp. 435-457. https://doi.org/10.1007/BF02193094
31. Chistyakov V.V., Galkin O.E. On Maps of Bounded p-Variation with p>1. *Positivity*, 1998, vol. 2, pp. 19-45. https://doi.org/10.1023/A:1009700119505
32. Daryin A.N., Kurzhanski A.B. Dynamic Programming for Impulse Control. *Ann. Reviews in Control*, 2008, vol. 32, pp. 213-227. https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2008.08.001
33. Dudley R.M., R. Norvaisa. Product Integrals, Young Integral and p-Variation. Springer, 1999. https://doi.org/10.1007/BFb0100746
34. Dudley R.M., Norvaisa R. Concrete Functional Calculus. Springer, 2011. 671 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-6950-7

35. Freedman M.A. Operators of p-Variation and the Evolution Representation Problem. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1983, vol. 279, pp. 95-112.
36. Goncharova E., Staritsyn M. Optimization of Measure-driven Hybrid Systems. *J. Optim. Theory Appl.*, 2012, vol. 153, no 1, pp. 139-156. https://doi.org/10.1007/s10957-011-9944-x
37. Guerra M., Sarychev A. Frechet Generalized Trajectories and Minimizers for Variational Problems of Low Coercivity. *Journal of Dynamical and Control Systems*, 2015, vol. 21, no 3, pp. 351-377. https://doi.org/10.1007/s10883-014-9231-x
38. Karamzin D.Yu. Necessary Conditions of the Minimum in Impulsive Control Problems with Vector Measures. *J. of Math. Sci.*, 2006, vol. 139, pp. 7087-7150. https://doi.org/10.1007/s10958-006-0408-z
39. Lejay A. An Introduction to Rough Paths. *Lecture Notes in Mathematics*, 2003, vol. 1832, pp. 1-59. https://doi.org/10.1007/978-3-540-40004-2_1
40. Lyons T. Differential Equations Driven by Rough Signals. *Revista Matemática Iberoamericana*, 1998, pp. 215-310. https://doi.org/10.4171/RMI/240
41. Lyons T., Qian Z. System Control and Rough Paths, Oxford Mathematical Monographs. Oxford, Clarendon Press, 2002. 216 p. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780198506485.001.0001
42. Miller B.M. The Generalized Solutions of Nonlinear Optimization Problems with Impulse Control. *SIAM J. Control Optim.*, 1996, vol. 34, pp. 1420-1440. https://doi.org/10.1137/S0363012994263214
43. Motta M., Rampazzo F. Space-time Trajectories of Nonlinear Systems Driven by Ordinary and Impulsive Controls. *Differential Integral Equations*, 1995, vol. 8, pp. 269-288.
44. Motta M., Rampazzo F. Dynamic Programming for Nonlinear Systems Driven byOrdinary and Impulsive Control. *SIAM J. Control Optim.*, 1996, vol. 34, pp. 199-225. https://doi.org/10.1137/S036301299325493X
45. Pereira F.L., Silva G.N. Necessary Conditions of Optimality for Vector-valued Impulsive Control Problems. *Syst. Control Lett.*, 2000, vol. 40, pp. 205-215. https://doi.org/10.1016/S0167-6911(00)00027-X
46. Porter J.E. Helly's Selection Principle for Function of Bounded p-Variation. *Rocky Mountain J. Math.*, 2005, vol. 35, no 2, pp. 675-679. https://doi.org/10.1216/rmjm/1181069753
47. Silva G.N., Vinter R.B. Measure Differential Inclusions. *J. of Mathematical Analysis and Applications*, 1996, vol. 202, pp. 727-746. https://doi.org/10.1006/jmaa.1996.0344
48. Wiener N. The Quadratic Variation of a Function and its Fourier Coeficients. *J. Math. Phys.*, 1924, vol. 3, pp. 72-94. https://doi.org/10.1002/sapm19243272
49. Young L.C. An Inequality of the Hólder Type, Connected with Stieltjes Integration. *Acta Math.*, 1936, vol. 67, pp. 251-282. https://doi.org/10.1007/BF02401743

Samsonyuk Olga Nikolaevna, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, tel: (3952) 453151
(e-mail: `samsonyuk.olga@gmail.com`)

Staritsyn Maxim Vladimirovich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS, 134, Lermontov st., Irkutsk, 664033, tel: (3952) 453095
(e-mail: `starmaxmath@gmail.com`)