Серия «Математика»
2017. Т. 19. С. 136—149

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.977.5
MSC 93C10, 93C23, 49J30
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.19.136

Динамические системы с разрывными решениями и задачи с неограниченными производными*

Б. М. Миллер
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,

Е. Я. Рубинович
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН,

Аннотация. В работе по управлению системами с неограниченными производными В. И. Гурман предложил описание разрывных решений с помощью некоторой вспомогательной системы дифференциальных уравнений, включающей рецессивные направления множества скоростей. Это оказалось удобным с точки зрения расширения множества решений для включения в него разрывных функций, однако, в последующих работах выяснилось, что такое описание разрывов не только дает их корректное представление, но и является в некотором роде единственно возможным с точки зрения существования решения соответствующих вариационных задач.

В данной работе представлено развитие этой методологии для вариационных задач, в которых скачки решений возникают естественным образом вследствие ударов о препятствия с большой жесткостью. Показано применение метода сингулярных пространственно-временных преобразований для задач удара с трением. В качестве примера рассмотрена система, в которой возникает парадокс Пенлеве, — модель косого удара в предположении, что закон взаимодействия с препятствием описывается вязко-упругой моделью типа Кельвина – Фойгта, а момент прекращения контакта с препятствием определяется как момент обращения в нуль реакции опоры.

Ключевые слова: расширение множества решений, неограниченные производные, сингулярные пространственно-временные преобразования, механические удары.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 16-08-01285 и 16-08-01076.

1. Задачи управления динамическими системами с разрывными траекториями

Системы управления и задачи вариационного исчисления, в которых траектории могут допускать различного рода сингулярности, такие как разрывы траекторий и/или более высокого порядка издавна привлекают внимание исследователей. В последние годы в этой области достигнут серьезный прогресс, хотя изначально подобные решения вариационных задач рассматривались как нефизическое (досадное) исключение и в первых работах, как правило, налагались специальные условия, позволяющие исключить подобные явления. Следует вспомнить имена Чезари и Мак-Шейна (см. соответствующие ссылки в монографии [19]), которые рассматривали задачи управления системами в контингенциях с неограниченным множеством скоростей, но ограничивали поведение этого множества на направлениях рецессии, что позволяло исключить возникновение разрывов траектории. Разрывные решения в задачах вариационного исчисления были известны еще К. Вейерштрассу, но их систематическое изучение началось с работ В. Ф. Кротова, который показал, что отказ от этих условий, с одной стороны, позволяет исследовать разрывные решения регулярным образом, и, кроме того, продемонстрировал возникновение подобных решений на конкретных примерах динамики полета [7]. Основным достижением этих работ было распространение классического функционала вариационного исчисления на множество разрывных функций, однако, само определение разрывного решения динамической системы впервые появляется в работе В. И. Гурмана [2], в которой рассматриваются уравнения в контингенциях с неограниченным множеством скоростей. При таком подходе нормальное и импульсное воздействия разделяются во времени, что позволяет корректно описать результирующее движение дискретно-непрерывной системы (ДНС).

Другой подход к описанию ДНС предполагает непосредственное задание импульсного воздействия либо в виде последовательности импульсов, либо в форме дифференциального уравнения с мерой (см. [8] и библиографию). Основными направлениями в этой области, начиная с первых работ конца 70-х, были: постановка задачи управления ДНС в форме, допускающей существование решения, и получение условий оптимальности типа поточечного принципа максимума, позволяющего синтезировать оптимальное управление. Следует отметить, что в последние годы эта программа в основном реализована. Доказаны теоремы существования оптимальных обобщенных управлений, получены необходимые и достаточные условия оптимальности, найдены важные приложения теории импульсного управления в экономических задачах, квантовой механике [3], в задачах динамики полета [4; 20] и в задачах управления наблюдениями [8]. Как показывает анализ большинства работ, посвященных теории импульсного управления, успех обеспечивается реализацией идеи работы [2], где разделение нормального и сингулярного движений (импульсного управления) осуществляется тем или иным образом, например, с помощью метода разрывной замены времени [5].

2. Механические системы с ударами: еще один пример разделения движений

Некоторые, достаточно простые модели механических систем, могут приводить к уравнениям динамики, требующим детального анализа и решения сложных проблем теории дифференциальных уравнений с сингулярными правыми частями. Целый ряд примеров таких систем, в которых наряду с сухим трением имеет место удар о препятствие приведен в знаменитой книге Поля Пенлеве [10]. В ней показано, что модель абсолютно жесткого тела и закона Кулона для сухого трения могут приводить к парадоксальным ситуациям отсутствия или нескольких возможных решений. Проблема (или парадокс) Пенлеве — это лишь иллюстрация сложной задачи теории дифференциальных уравнений с двумя типами сингулярностей: сухое трение — разрывность правой части, и импульсный характер взаимодействия с препятствием в результате удара. Метод раскрытия подобных сингулярностей, а именно: пространственно-временное сингулярное преобразование масштабов и есть суть данной работы и собственно та её часть, что относит её к проблемам теории сингулярных дифференциальных уравнений с неограниченными скоростями. Одна из таких моделей описывает падение жесткого стержня на шероховатую поверхность и относится к задачам удара с трением, причем эти модели продолжают быть в центре внимания исследователей [12; 16; 18]. Как отмечается во многих работах, модель абсолютно твердого тела приводит к необходимости вводить импульсные силы реакции, если предполагать что скорости тел при ударе меняются практически мгновенно. В задаче удара с трением обычные подходы, связанные с использованием идей теории импульсного управления, оказываются неприменимыми, так как в них имеет место некорректность, связанная с необходимостью определения произведения обобщённой функции (импульсной реакции опоры) на разрывную (силу трения, которая при использовании закона Кулона меняет знак при изменении знака относительной скорости). В теории импульсного управления, особенно в работах последних лет, эта проблема преодолевается методом вскрытия сингулярностей, основанном на разрывной замене времени [8], когда быстрое (практически мгновенное) изменение части фазовых координат растягивается в конечный промежуток времени, и динамика системы на этом промежутке описывается вспомогательной системой «медленного» движения. Однако непосредственное применение этой техники к анализу систем с ударами затруднительно, так как при ударе часть фазовых координат, ответственных за величину реакции опоры, также остаётся неизменной (положения), в то время как скорости меняются скачком. Развитие техники разрывной замены времени было предложено в [6; 11], где было показано, что в этом случае разрывная динамика может быть описана с помощью *пространственно-временной сингулярной замены переменных*, что особенно важно для описания динамики управляемого удара [7]. Необходимо отметить, что одновременная сингулярная замена пространственных и временных переменных хотя и родственна методу разделения движений [18], широко применяемому в задачах с ударами, но позволяет рассматривать более общие случаи, связанные с различными условиями окончания ударной (сингулярной) фазы движения. Предлагаемый подход гораздо ближе к методам, основанным на генетической теории удара или методологии штрафных функций (penalization) [13], когда модель абсолютно твёрдого тела вначале заменяется моделью деформируемого тела, но с большим коэффициентом жесткости, который затем устремляется к бесконечности, чтобы в пределе снова вернуться к модели абсолютно твёрдого тела. Эта методология, как выяснилось, позволяет преодолеть проблемы неоднозначности и невозможности определения решения. Родственный подход — специальные схемы численного анализа (time-stepping), в которых для преодоления проблем сингулярности движения в окрестности точек удара применяется переменный шаг интегрирования уравнений динамики [16; 17]. Применение метода пенализации к задаче о падающем стержне было впервые предпринято в работе [15], которая была ориентирована на получение явных результатов и поэтому ограничивалась случаем абсолютно упругого удара и случаем, когда в процессе удара не происходит остановки скольжения стержня. С точки зрения исследования парадоксальных ситуаций (задача Пенлеве) этот случай не слишком интересен, так как полностью описывается классическими подходами. Более интересные результаты отмечены в работе [12], в которой динамика стержня в режиме контакта с поверхностью описывается с помощью методологии комплиментарного подхода (linear complementary problem (LCP)) и теории систем с разрывной правой частью, и где показано, что с помощью этого подхода можно всегда решить задачу определения скоростей после удара при коэффициенте трения меньшем $4/3 \approx 1.33$, а при некоторых углах падения стержня, область применимости комплиментарного подхода можно немного расширить (до $8/3\sqrt{3} \approx 1.53$). Интересный и вполне завершенный анализ этой задачи дан в монографии [14], где указывается на необходимость изменения модели для получения результатов при всех значения коэффициента трения.

В данной работе показано применение метода сингулярных пространственно-временных преобразований для задач удара с трением. Общее изложение метода можно найти в работе [11]. Первое применение данного метода к анализу систем с трением было представлено в [9], где вскрытие сингулярности производится посредством некоторой вспомогательной системы (играющей роль своеобразного микроскопа и лупы времени одновременно). В качестве примера рассмотрим одну из систем, в которых возникает парадокс Пенлеве [10]. При анализе динамики механических систем с односторонними ограничениями обычно используется так называемый *комплиментарный подход*, при котором уравнения движения вдоль границы дополняются алгебраическими соотношениями, связывающими ускорение и реакцию опоры, которые при некоторых начальных условиях для фазы удара неразрешимы или допускают множество решений. Парадоксу Пенлеве и связанным с ним проблемам определения движения были посвящены многочисленные работы [12; 14; 15; 16; 18]. Как отмечалось выше, попытка решить проблему с использованием методологии гибридных систем в терминах линейных комплиментарных проблем (LCP) наталкивается на серьезные трудности при больших коэффициентах трения. Очевидно, что эти трудности не связаны с физикой процесса, а являются следствием ограниченности комплиментарного подхода к описанию механических систем с ударами [14], поскольку здесь важен учет собственно механизма ударного взаимодействия.

В данной работе исследуется модифицированный пример из [15]. Поскольку предлагаемый подход ориентирован на использование численных методов, рассматривается более сложная и реалистичная модель косого удара [21] в предположении, что закон взаимодействия с препятствием описывается вязко-упругой моделью типа Кельвина-Фойгта, а момент прекращения контакта с препятствием определяется из физических условий, а именно, как момент обращения в нуль реакции опоры. Модель плоского удара подробно рассмотрена в [9], где приведен метод определения скоростей после удара для любого значения коэффициента трения, показан эффект подскока без вертикального удара и резонансный характер поглощения энергии. Предлагаемая методология сингулярной пространственно-временной замены координат работает и в более сложном случае косого удара.

3. Геометрия проблемы Пенлеве для стержня падающего на шероховатую поверхность

Применение сингулярной пространственно-временной замены переменных иллюстрируется на модифицированном примере из [21] в предположении, что закон взаимодействия с препятствием описывается вяз-

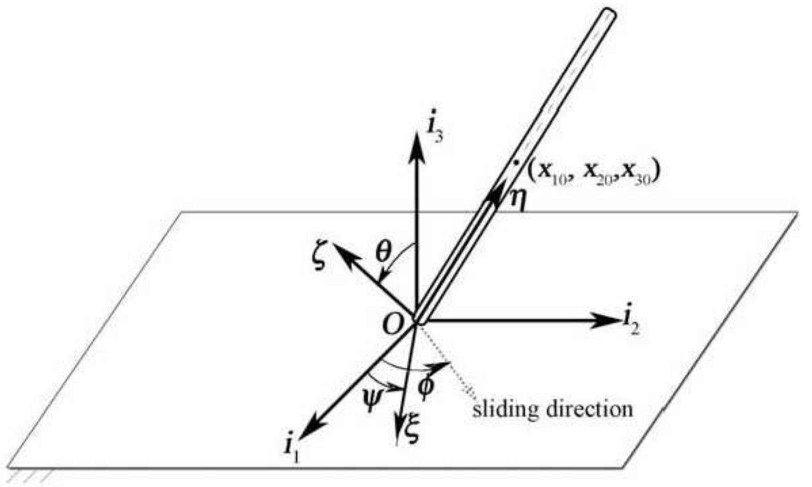

Рис. 1. Геометрия падающего стержня, $2l$ — длина; $m = 1$ — масса; (x_{10}, x_{20}, x_{30}) — координаты центра масс в инерциальной системе с ортами $\mathbf{i_1}, \mathbf{i_2}, \mathbf{i_3}$; ψ, θ — азимутальный угол и угол наклона стержня; сила притяжения направлена вниз вдоль оси $\mathbf{i_3}$.

ко-упругой моделью и момент прекращения сингулярной фазы определяется из физических условий.

Рассмотрим жесткий стержень единичной массы, длины $2l$, падающий на вязко-упругую поверхность [21] (Рис. 1).

3.1. Уравнения движения в обобщённых координатах

В качестве обобщённых координат и их скоростей выбираем координаты центра масс стержня, два угла — азимутальный и наклона — и их производные:

$$\begin{aligned} \mathbf{X_p} &= [x_{10}, x_{20}, x_{30}, \psi, \theta]^T, \\ \mathbf{X_v} = \dot{\mathbf{X}}_\mathbf{p} &= [\dot{x}_{10}, \dot{x}_{20}, \dot{x}_{30}, \dot{\psi}, \dot{\theta}]^T. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Положим $\mathbf{X_v} = [v_1, v_2, v_3, \dot{\psi}, \dot{\theta}]^T$. Тогда уравнения динамики стержня имеют вид

$$\dot{\mathbf{X}}_\mathbf{v} = Q \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l\dot{\psi}^2 \sin\psi \cos^3\theta - l\dot{\theta}^2 \sin\psi \cos\theta \\ l\dot{\psi}^2 \cos\psi \cos^3\theta + l\dot{\theta}^2 \cos\psi \cos\theta \\ l\dot{\psi}^2 \sin\theta + l\dot{\theta}^2 \sin\theta - g \\ \dfrac{2\dot{\psi}\dot{\theta}\sin\theta}{\cos\theta} \\ -\dot{\psi}^2 \sin\theta \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Матрица Q имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1+3\cos^2\psi+3\sin^2\psi\sin^2\theta & 3\sin\psi\cos\psi\cos^2\theta & 3\sin\psi\sin\theta\cos\theta \\ 3\sin\psi\cos\psi\cos^2\theta & 1+3\sin^2\psi+3\cos^2\psi\sin^2\theta & -3\cos\psi\sin\theta\cos\theta \\ 3\sin\psi\sin\theta\cos\theta & -3\cos\psi\sin\theta\cos\theta & 1+3\cos^2\theta \\ \dfrac{3}{l}\dfrac{\cos\psi}{\cos\theta} & \dfrac{3}{l}\dfrac{\sin\psi}{\cos\theta} & 0 \\ -\dfrac{3}{l}\sin\psi\sin\theta & \dfrac{3}{l}\cos\psi\sin\theta & -\dfrac{3}{l}\cos\theta \end{bmatrix}.$$

В уравнении (3.2) F_1, F_2 — компоненты силы трения, F_3 — нормальная реакция опоры. Таким образом,

$$F_{\text{тр}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = -kF_3\dfrac{1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, & \text{если} \quad v_1^2+v_2^2 \neq 0, \\ \leq k|F_3|, & \text{если} \quad v_1^2+v_2^2 = 0. \end{cases}$$

Сила нормальной реакции

$$F_3 = -\mu x_{30} - 2\mu^{1/2}\delta\dot{x}_{30},$$

где μ — коэффициент жесткости, а $\delta \in [0,1]$ — коэффициент вязкости.

Замечание 1. Для получения модели абсолютно жёсткого тела коэффициент μ устремляется к бесконечности. Цель: описать предельное движение при $\mu \to \infty$, что соответствует модели абсолютно твёрдого тела. Отличие от традиционного комплиментарного подхода — допущение о деформируемости поверхности.

3.2. Замена переменных: сингулярное пространственно-временное преобразование

Из анализа уравнений движения следует, что глубина проникновения стержня внутрь запрещённой области и время его пребывания там имеют порядок $\mu^{-1/2}$, поэтому следующая замена переменных растягивает временной интервал и область взаимодействия в масштаб порядка единицы:

$$t^\mu(s) = \tau + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\,s, \quad s \geq 0,$$

$$\mathbf{Y}^\mu_{\mathbf{p}}(s) = \mathbf{X}_{\mathbf{p}}(\tau) + \sqrt{\mu}\,[\mathbf{X}_{\mathbf{p}}(t^\mu(s)) - \mathbf{X}_{\mathbf{p}}(\tau)],$$

$$\mathbf{Y}^\mu_{\mathbf{v}}(s) = \mathbf{X}_{\mathbf{v}}(t^\mu(s)),$$

где τ — момент начала сингулярной фазы движения (попадания конца стержня на границу одностороннего ограничения).

Предложение 1. *На интервале $s \in [0, S^*]$, где S^* — момент выхода из «запрещенной области», существуют пределы*

$$\lim_{\mu\uparrow\infty} \mathbf{Y}^{\mu}_{\mathbf{p}}(s) = \bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{p}}(s), \quad \lim_{\mu\uparrow\infty} \mathbf{Y}^{\mu}_{\mathbf{v}}(s) = \bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{v}}(s),$$

удовлетворяющие системе уравнений «быстрого движения».

Идея доказательства повторяет результат работы [11].

3.3. Уравнения «быстрого движения»

Предложение 2. *Система уравнений «быстрого движения» имеет вид*

$$\begin{aligned}
&\dot{\bar{\mathbf{Y}}}_{\mathbf{p}}(s) = \bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{v}}(s),\\
&\dot{\bar{\mathbf{Y}}}_{\mathbf{v}}(s) = -Q(\bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{p}}(0)) \begin{pmatrix} \dfrac{\bar{\mathbf{Y}}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{v}}}{\sqrt{(\bar{\mathbf{Y}}^{\mathbf{1}}_{\mathbf{v}})^2 + (\bar{\mathbf{Y}}^{\mathbf{2}}_{\mathbf{v}})^2}} \\ \dfrac{\bar{\mathbf{Y}}^{2}_{\mathbf{v}}}{\sqrt{(\bar{\mathbf{Y}}^{1}_{\mathbf{v}})^2 + (\bar{\mathbf{Y}}^{2}_{\mathbf{v}})^2}} \\ 1 \end{pmatrix} (-\bar{\mathbf{Y}}^{3}_{\mathbf{p}} - 2\delta \bar{\mathbf{Y}}^{3}_{\mathbf{v}}) I\{s \le S^*\},
\end{aligned} \tag{3.3}$$

где $S^* = \inf\{s : \bar{\mathbf{Y}}^3_{\mathbf{p}}(s) + 2\delta \bar{\mathbf{Y}}^3_{\mathbf{v}}(s) < 0\}$.

Замечание 2. Система уравнений (3.3) имеет единственное решение и описывает фазу сингулярного движения при больших μ, что подтверждается следующими соотношениями:

$$\mathbf{X}_p(t) \approx \mathbf{X}_p(\tau) + \frac{\bar{\mathbf{Y}}_{\mathbf{p}}(\sqrt{\mu}(t-\tau)) - \mathbf{X}_p(\tau)}{\sqrt{\mu}},$$

$$\mathbf{X}_v(t) \approx \mathbf{Y}_v(\sqrt{\mu}(t-\tau)).$$

Другими словами, «*быстрое решение*» позволяет приближённо описать все решения системы (3.2) при достаточно больших μ.

3.4. Уравнения для «скачка» скорости после удара

Значения координат, линейных и угловых скоростей стержня после удара описываются следующими соотношениями

$$\lim_{\mu\uparrow\infty} \mathbf{X}_p(\tau) = \mathbf{X}_p(\tau-), \quad \lim_{\mu\uparrow\infty} \mathbf{X}_v(\tau) = \bar{\mathbf{Y}}_v(S^*), \tag{3.4}$$

где $\bar{\mathbf{Y}}_v(s)$ — решение системы уравнений «быстрого движения».

Доказательство. Доказательство утверждения для случая плоского удара приведено в [9], и для косого удара проводится аналогично. Основные этапы доказательства описаны ниже:

– Совокупность решений системы имеет равномерно ограниченную по μ вариацию, поэтому существует подпоследовательность, сходящаяся поточечно к пределу, удовлетворяющему системе (3.3).
– Правая часть системы (3.3) обладает следующим свойством:

$$\langle \dot{\bar{\mathbf{Y}}}'_{\mathbf{v}} - \dot{\bar{\mathbf{Y}}}''_{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{Y}}'_{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{Y}}''_{\mathbf{v}} \rangle \leq 0$$

для любых $\bar{\mathbf{Y}}'_{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{Y}}''_{\mathbf{v}}$. Это позволяет установить единственность решения системы (3.3), рассматривая поведение квадрата разности скоростей двух предполагаемых решений, аналогично [9].

□

4. Анализ «парадокса» Пенлеве и некоторых попыток его разрешения

Наиболее ясное изложение ограниченности применимости комплиментарного подхода к модели падающего стержня имеется в монографии [14], с. 59–63. Объединение уравнений, описывающих полное движение стержня в момент удара, включающее регулярную и сингулярную фазу движения, приводит к следующему уравнению для переменной $x_v^2(t)$, соответствующей скорости нижнего конца стержня в вертикальном направлении,

$$\begin{aligned} &\dot{x}_v^2(t) = -\mu\left[x_p^2(t) + 2\xi\mu^{-1/2}x_v^2(t)\right] \times \\ &\left[1 + 3\cos x_p^3(t)[\cos x_p^3(t) + k\sin x_p^3(t)\,\mathrm{Sign}\,x_v^1(t)]\right] + \\ &l(x_v^2(t))^2 \sin x_p^3(t) - g = F_Y(t)A(t) + B(t), \end{aligned} \tag{4.1}$$

которое выполняется в течение сингулярной фазы движения до момента времени, когда реакция опоры $F_Y(t)$ обращается в нуль. Иными словами, в течение сингулярной фазы движения выполняется неравенство

$$F_Y(t) = -\mu\left[x_p^2(t) + 2\xi\mu^{-1/2}x_v^2(t)\right] > 0.$$

При этом допускается нарушение ограничения $x_p^2 \geq 0$, и именно за счет этого нарушения и возникает положительная реакция опоры, которая приводит к выталкиванию стержня из «запрещённой области» $x_p^2 < 0$. Отметим, что при таком подходе не возникает неоднозначности в уравнениях движения, которые интегрируются единственным образом, как показано выше, до момента окончания сингулярной фазы.

При использовании комплиментарного подхода уравнение для переменной $x_v^2(t)$ записывается аналогично (4.1) (см. [14], стр. 61), но, в соответствии с условиями комплиментарности или непроникновения стержня внутрь запрещённой области $x_p^2 < 0$, должны выполняться соотношения

$$\dot{x}_v^2(t) = F_Y(t)A(t) + B(t) \geq 0, \quad \dot{x}_v^2(t)F_Y(t) = 0, \tag{4.2}$$

где переменные $\dot{x}_v^2(t)$ и $F_Y(t)$ определяются одновременно и удовлетворяют ограничениям

$$\dot{x}_v^2(t) \geq 0 \quad \text{и} \quad F_Y(t) \geq 0.$$

Собственно здесь и возникает парадоксальная ситуация непродолжимости решения или неединственности, которая разрешима только в случае малого коэффициента трения $k < 4/3$ (см. [10], стр. 102).

Действительно, функции $A(t), B(t)$ зависят от начальных условий в момент удара и меняются медленно, кроме того, они могут принимать значения обоих знаков, поэтому единственное решение системы уравнений (4.2) существует лишь при $A(t) > 0$. При отрицательном $A(t)$, в зависимости от знака $B(t)$, имеют место два случая:
1. $B(t) > 0$. Здесь возможны два решения, а именно: скольжение или разделение с поверхностью.
2. В случае $B(t) < 0$ решения нет [14].

Для того чтобы функция $A(t)$ была положительна при всех значениях угла $x_p^3 \in [0, \pi/2]$ и $\operatorname{Sign} x_v^1 \in [-1, 1]$, необходимо, чтобы коэффициент трения удовлетворял условию $k < 4/3$. Действительно, условие положительности $A(t)$ влечет неравенство

$$1 + 3\cos\theta[\cos\theta + k\cos\theta \operatorname{Sign} x] > 0,$$

которое должно выполняться при всех $\theta \in [0, \pi/2]$ и $x \in R$. Отсюда следует, что

$$\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\left(\cos 2\theta - k\sin 2\theta\right) > 0$$

для всех $2\theta \in [0, \pi]$, что приводит к неравенству $k < 4/3$.

В монографии [14] отмечается, что область применимости комплиментарного подхода может быть несколько расширена при выборе граничного значения для коэффициента трения зависящим от угла падения θ, в работе [12] эта программа успешно реализована. По всей видимости, наиболее удачной попыткой решения проблем динамики твердых тел при наличии трения является подход Д. Стюарта [16], который использовал неявную разностную схему решения дифференциальных уравнений динамики для системы твердых тел с кулоновым трением. Важным результатом этой работы являлось доказательство существования решения, однако вопрос о его единственности оставался открытым. Проблема, которую пытались обойти все авторы состоит в том, что контактная сила при ударе является импульсной, и динамика системы должна описываться дифференциальным уравнением (или включением) с мерами. Как отмечалось Д. Стюартом в его обзорной статье [17], определить эту силу только с помощью комплиментарного подхода невозможно. Более того, при использовании в качестве закона восстановления, описывающего скорости после удара, модели Ньютона можно даже получить положительное приращение кинетической энергии [18].

5. Заключение

Таким образом в данной работе показано, что метод разделения движений, предложенный первоначально для задач управления системами с разрывными траекториями и импульсными управлениями [2], может быть успешно использован и в задачах механики систем с ударами. Необходимость использования подобной методологии отмечали многие авторы [18], однако, наталкивались на трудности вычисления интеграла от импульсной силы. Считалось, что для определения импульсной силы нужен закон взаимодействия и точное знание коэффициентов жесткости и вязкости. С этой точки зрения наш подход, который гарантирует существование единственного решения при достаточно больших значениях жесткости и сходимость к единственному решению при стремлении жесткости к бесконечности, является, по всей видимости, разумной альтернативой неявной схемы численного решения, так как позволяет однозначно определить скорости после удара и согласуется с экспериментальными результатами, демонстрирующими зависимость закона восстановления от угла падения стержня.

Список литературы

1. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями / Дж. Варга. – М. : Наука, 1977.
2. Гурман В. И. Об оптимальных процессах с неограниченными производными / В. И. Гурман // Автоматика и телемехника. – 1972. – № 12. – С. 14–21.
3. Дыхта В. А. Оптимальное импульсное управление с приложениями / В. А. Дыхта, О. Н. Самсонюк. – М. : Физматлит, 2000.
4. Завалищин С. Т. Импульсные процессы: модели и приложения / С. Т. Завалищин, А. Н. Сесекин. – М. : Наука, 1991.
5. Миллер Б. М. Метод разрывной замены времени в задачах оптимального управления импульсными и дискретно-непрерывными системами / Б. М. Миллер // Автоматика и телемеханика. – 1993. – № 12. – С. 3–32.
6. Миллер Б. М. Управляемые системы с ударными воздействиями / Б. М. Миллер // Соврем. математика. Фундам. направления. – 2011. – Т. 42. – С. 166–178.

7. Миллер Б. М. Разрывные решения в задачах оптимального управления и их представление с помощью сингулярных пространственно-временных преобразований / Б. М. Миллер, Е. Я. Рубинович // Автоматика и телемеханика. – 2013. – № 12. – С. 56—103.
8. Миллер Б. М. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями / Б. М. Миллер, Е. Я. Рубинович. – М.: Наука, 2005, 429с.
9. Миллер Б. М. Сингулярная пространственно-временная замена координат. Об одном методе разрешения проблемы Пенлеве / Б. М. Миллер, Е. Я. Рубинович, Дж. Бентсман // Проблемы математического анализа. – 2016. – Вып. 86. – С. 35–44.
10. Пенлеве П. Лекции о трении / П. Пенлеве. – М. : ГиТТЛ, 1954.
11. Bentsman J. Dynamical systems with active singularities of elastic type: A modeling and controller synthesis framework / J. Bentsman, B. Miller // IEEE Trans. Autom. Control. – 2007. – Vol. 52, N 1. – P. 39–55.
12. Génot F. New Results on Painlevé Paradoxes / F. Génot, B. Brogliato // Eur. J. Mech. A/Solids. – 1999. – Vol. 18, N 18. – P. 653–678.
13. Paoli L. Mouvement *à* un nombre fini de degrés de liberté avec contraintes unilatérales: cas avec perte d'énergie / L. Paoli, M. Schatzman // Mathematical Modelling and Numerical Analysis. – 1993. – Vol. 27. – P. 673–717.
14. Pfeifer F. Multi-Body Dynamics with Unilateral Constraints / F. Pfeifer, C. Glocker. – New-York : Wiley, 1996.
15. Schatzman M. Penalty approximation of Painlevé problem / M. Schatzman // Nonsmooth mechanics and analysis. Adv. Mech. Math. – 2006. – Vol. 12. – P. 129–143.
16. Stewart D. E. Convergence of a Time-Stepping Scheme for Rigid-Body Dynamics and Resolution of Painleve's Problem / D. E. Stewart // Arch. Rational Mech. Anal. – 1998. – Vol. 145. – P. 215–260.
17. Stewart D. E. Rigid-Body Dynamics with Friction and Impact / D. E. Stewart // SIAM Review. – 2000. – Vol. 42, N 1. – P. 3–39.
18. Stronge W. J. Rigid body collisions with friction / W. J. Stronge // Proc. Roy. Soc. London. – 1990. – Ser. A, Vol. 431. – P. 168–181.
19. Warga J. Variational problems with unbounded controls / J. Warga // J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A Control. – 1965. – Vol. 3. – P. 424–438.
20. Zavalishchin S. T. Dynamic impulse systems. Theory and applications / S. T. Zavalishchin, A. N. Sesekin – Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997.
21. Z. Zhao ea. The Painlevé paradox studied at a 3D slender rod / Z. Zhao ea. // Multibody Syst. Dyn. – 2008. – Vol. 19. – P. 323–343.

Миллер Борис Михайлович, доктор физико-математических наук, профессор, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, 127994, Москва, Б. Каретный пер., д. 19, тел.: (495)650 4781 (e-mail: `bmiller@iitp.ru`)

Рубинович Евгений Яковлевич, доктор технических наук, профессор, Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, 117997, Москва, ул. Профсоюзная, д. 65, тел.: (495)334 9111
(e-mail: `rubinvch@hotmail.com`)

B. M. Miller, E. Ya. Rubinovich

Dynamical Systems with Discontinuous Solutions and Problems with Unbounded Derivatives

Abstract. V. I. Gurman suggested a description of discontinuous solutions in terms of systems with unbounded derivatives. The idea was in the usage of an auxiliary system of ordinary differential equations including the recession cone of the velocities set. It was useful for inclusion discontinuous functions into the set of admissible solutions, however, it became clear later that such a description is not only correct, but it gives also the unique in some sense representation of solutions which guaranties the existence of a solution for corresponding variational problems.

In this article, we describe the subsequent development of this methodology for variational problems where the solutions discontinuities appear naturally as a result of the impacts against the rigid surfaces. We give an illustration of the singular spatio-temporal transformation technique for problems of impact with friction. As an example, we consider a system with the Painlevé paradox, namely, a mathematical formalization of oblique impact, where the contact law is described by a viscous-elastic Kelvin–Voigt model, and the contact termination is defined as a moment when the supporting force vanishes.

Keywords: expansion of the solutions set, unbounded derivatives, singular spatio-temporal transformations, mechanical impacts

References

1. Warga J. Optimal Control of Differential and Functional Equations. Academic Press, N. Y., London, 1972.
2. Gurman V.I. Optimal Processes with Unbounded Derivatives. *Autom. Remote Control*, 1972, vol. 33, no 12, pp. 1924-1930.
3. Dykhta V. A., Samsonyuk O. N. *Optimal'noe impul'snoe upravlenie s prilozheniyami* [Optimal Impulsive Control with Applications]. Moscow, Fizmatlit, 2000. 256 p. (in Russian)
4. Zavalishchin S. T., Sesekin A. N. *Impul'snye processy: modeli i prilozhenija* [Impulse Processes: Models and Applications]. Moscow, Nauka, 1991. (in Russian)
5. Miller B. M. Method of Discontinuous Time Change in Problems of Control of Impulse and Discrete-Continuous Systems. *Autom. Remote Control*, 1993, vol. 54, no 12, part 1, pp. 1727-1750.
6. Miller B. M. Controlled Systems with Impact Interactions. *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2014, vol. 199, no 5, pp. 571-582. https://doi.org/10.1007/s10958-014-1884-1
7. Miller B. M., Rubinovich E. Ya. Discontinuous Solutions in the Optimal Control Problems and Their Representation by Singular Space-time Transformations. *Autom. Remote Control*, 2013, vol. 74, no 12, pp. 1969-2006. https://doi.org/10.1134/S0005117913120047
8. Miller B. M., Rubinovich E. Ya. *Optimizatsiya dinamicheskikh sistem s impul'snymi upravleniyami* [Optimization of Dynamic Systems with Impulsive Controls]. Moscow, Nauka, 2005. 429p. (in Russian)
9. Miller B. M., Rubinovich E. Ya., Bentsman J. Singular Space-time Transformation. Toward One Method for Solving Painleve Problem. *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 219, no 2, pp. 208-219. https://doi.org/10.1007/s10958-016-3098-1
10. Painlevé P. Leçons sur le Frottement. Hermann, Paris, 1895.

11. Bentsman J., Miller B. Dynamical Systems with Active Singularities of Elastic Type: A Modeling and Controller Synthesis Framework. *IEEE Trans. Autom. Control*, 2007, vol. 52, no 1, pp. 39-55. https://doi.org/10.1109/TAC.2006.887899
12. Génot F., Brogliato B. New Results on Painlevé Paradoxes. *Eur. J. Mech. A/Solids*, 1999, vol. 18, no 18, pp. 653-678. https://doi.org/10.1016/S0997-7538(99)00144-8
13. Paoli L., Schatzman M. Mouvement *à* un nombre fini de degrés de liberté avec contraintes unilatérales: cas avec perte d'énergie. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 1993, vol. 27, pp. 673-717. https://doi.org/10.1051/m2an/1993270606731
14. Pfeifer F., Glocker C. *Multi-Body Dynamics with Unilateral Constraints*. Wiley. New-York, 1996.
15. Schatzman M. Penalty Approximation of Painlevé Problem. In: Nonsmooth Mechanics and Analysis. Adv. Mech. Math., 2006, vol. 12. Springer, New York, pp. 129-143. https://doi.org/10.1007/0-387-29195-4_12
16. Stewart D. E. Convergence of a Time-Stepping Scheme for Rigid-Body Dynamics and Resolution of Painleve's Problem. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 1998, vol. 145, pp. 215-260. https://doi.org/10.1007/s002050050129
17. Stewart D. E. Rigid-Body Dynamics with Friction and Impact. *SIAM Review*, 2000, vol. 42, no 1, pp. 3-39. https://doi.org/10.1137/S0036144599360110
18. Stronge W. J. Rigid Body Collisions with Friction. *Proc. Roy. Soc. London*, 1990, ser. A, vol. 431, pp. 168–181.
19. Warga, J. Variational Problems with Unbounded Controls. *J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A Control*, 1965, vol. 3, pp. 424-438.
20. Zavalishchin, S. T., Sesekin, A. N. Dynamic Impulse Systems. Theory and Applications. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1997. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8893-5
21. Z. Zhao ea., The Painlevé Paradox Studied at a 3D Slender Rod. *Multibody Syst. Dyn.*, 2008, vol. 19, pp. 323-343. https://doi.org/10.1007/s11044-007-9098-7

Miller Boris Mikhailovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Professor, A. A. Kharkevich Institute for Information Transmission Problems RAS, 19 B. Karetny, GSP-4, Moscow, 127994, tel.: (495)6504781 (e-mail: `bmiller@iitp.ru`)

Rubinovich Evgeny Yakovlevich, Doctor of Sciences (Engineering), professor, V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences RAS, 65, Profsoyuznaya st., Moscow, 117997, tel.: (495)3349111
(e-mail: `rubinvch@hotmail.com`)