Серия «Математика»
2017. Т. 20. С. 32—44

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 510.67:514.116
MSC 03C07, 03C60, 03G15, 20N02
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.20.32

О детерминированных и поглощающих алгебрах бинарных формул полигонометрических теорий*

Д. Ю. Емельянов
Новосибирский государственный университет

С. В. Судоплатов
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Новосибирский государственный технический университет,
Новосибирский государственный университет,
Институт математики и математического моделирования МОН РК

Аннотация. Алгебры распределений бинарных изолирующих и полуизолирующих формул являются производными структурами для данной теории. Эти алгебры отражают бинарные связи между реализациями 1-типов, определяемые формулами исходной теории. Тем самым возникает два вида взаимосвязанных классификационных вопросов: 1) по данному классу теорий определить, какие алгебры соответствуют теориям из этого класса, и классифицировать эти алгебры; 2) классифицировать теории из класса в зависимости от определяемых этими теориями алгебр изолирующих и полуизолирующих формул. При этом описание конечной алгебры бинарных изолирующих формул однозначно влечет и описание алгебры бинарных полуизолирующих формул.

В работе исследуются детерминированные, почти детерминированные и поглощающие алгебры бинарных формул полигонометрических теорий.

Доказываются характеризации детерминированности и почти детерминированности алгебры бинарных изолирующих формул полигонометрической теории. В качестве следствия установлено, что любая группа порождает некоторую детерминированную алгебру полигонометрической теории. Определяется понятие n-почти детерминированной алгебры, приводятся примеры и свойства таких алгебр, дается описание таких алгебр для теорий графов правильных многогранников. Показано, что любая группа является группой сторон для некоторой тригонометрии, обладающей 2-поглощающей алгеброй бинарных изолирующих формул.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00531-а), Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-6848.2016.1) и Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант №0830/ГФ4).

Ключевые слова: алгебра бинарных формул, детерминированная алгебра, поглощающая алгебра, полигонометрическая теория.

В работе продолжается исследование алгебр бинарных формул [1; 2; 3; 4; 5]. Для полигонометрических теорий [6; 7] рассматриваются алгебры бинарных формул, исследуется специфика этих алгебр для теорий полигонометрий пар групп.

В разделе 1 даются основные определения, относящиеся к детерминированным и поглощающим алгебрам, а также приводятся некоторые свойства этих алгебр. В разделе 2 доказывается характеризация детерминированности (теорема 1) и почти детерминированности (теорема 2) алгебры бинарных изолирующих формул полигонометрической теории. В качестве следствия (следствие 1) установлено, что любая группа порождает некоторую детерминированную алгебру полигонометрической теории. В разделе 3 определяется понятие n-почти детерминированной алгебры, приводятся примеры и свойства таких алгебр, дается описание таких алгебр для теорий графов правильных многогранников (теорема 3). В разделе 4 показано, что любая группа является группой сторон для некоторой тригонометрии, обладающей 2-поглощающей алгеброй бинарных изолирующих формул.

В работе без пояснений используется терминология, относящаяся к алгебрам бинарных формул [1; 2], а также к полигонометриям [7; 8] и их элементарным теориям [6; 7].

1. Детерминированные и поглощающие системы

Напомним [1; 2], что алгебра $\mathfrak{A}$ бинарных формул теории называется (*почти*) *детерминированной*, если для любых меток u и v множество $u \cdot v$ одноэлементно (конечно). Для детерминированной алгебры $\mathfrak{A}$ с множеством меток U алгебра $\langle U; *\rangle$ с операцией $u*v = w$, где $u \cdot v = \{w\}$, обозначается через $\mathfrak{A}'$.

В противовес к (почти) детерминированным алгебрам рассматриваются *поглощающие* системы [1; 9].

$I_{\mathcal{R}}$-система $\mathfrak{P}$ называется n-*поглощающей* при $n \in \omega \setminus \{0\}$, если для любых ненулевых меток $u_1, \ldots, u_n$ из $\mu(p_1, p_2), \ldots, \mu(p_n, p_{n+1})$ соответственно, $p_1, \ldots, p_{n+1} \in \mathcal{R}$, выполняются следующие условия:

• если некоторая метка u_i отрицательна, то

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, u_n, p_{n+1})$$

совпадает с множеством $\mu^-(p_1, p_{n+1})$ всех отрицательных меток из $\mu(p_1, p_{n+1})$;

• если все метки u_i положительны, то

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, u_n, p_{n+1})$$

содержит множество $\mu^+(p_1, p_{n+1})$ всех положительных меток из $\mu(p_1, p_{n+1})$ (т. е. $P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, u_n, p_{n+1}) = \mu^+(p_1, p_{n+1})$ или

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, u_n, p_{n+1}) = \mu^+(p_1, p_{n+1}) \cup \{0\}).$$

Назовём $I_{\mathcal{R}}$-систему $\mathfrak{P}$ *почти n-поглощающей* при $n \in \omega \setminus \{0\}$, если для любых ненулевых меток $u_1, \ldots, u_n$ из $\mu(p_1, p_2), \ldots, \mu(p_n, p_{n+1})$ соответственно, $p_1, \ldots, p_{n+1} \in \mathcal{R}$, выполняются следующие условия:

• если некоторая метка u_i отрицательна, то множество

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, u_n, p_{n+1}) \setminus \mu^-(p_1, p_{n+1})$$

конечно;

• если все метки u_i положительны, то множество

$$P(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, u_n, p_{n+1}) \setminus \mu^+(p_1, p_{n+1})$$

конечно.

Назовём $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-систему $\mathfrak{M}$ *n-поглощающей* при $n \in \omega \setminus \{0\}$, если для любых ненулевых меток $u_1, \ldots, u_n$ из $\mu(p_1, p_2), \ldots, \mu(p_n, p_{n+1})$ соответственно, $p_1, \ldots, p_{n+1} \in \mathcal{R}$, выполняются следующие условия:

• если некоторая метка u_i отрицательна, то множество

$$\mathrm{SI}(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, u_n, p_{n+1})$$

совпадает с множеством $\mu^-(p_1, p_{n+1})$ всех отрицательных меток из $\mu(p_1, p_{n+1})$;

• если все метки u_i положительны, то

$$\mathrm{SI}(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, u_n, p_{n+1})$$

содержит множество $\mu^+(p_1, p_{n+1})$ всех положительных меток из $\mu(p_1, p_{n+1})$;

• если все метки u_i положительны или принадлежат U' и некоторая метка u_i принадлежит U', то

$$\mathrm{SI}(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, u_n, p_{n+1})$$

содержит множество $(\mu^+)'(p_1, p_{n+1})$ всех меток из $U^+ \cup U'$, принадлежащих $\mu(p_1, p_{n+1})$.

Назовём $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-систему $\mathfrak{M}$ *почти n-поглощающей* при $n \in \omega \setminus \{0\}$, если для любых ненулевых меток $u_1, \ldots, u_n$ из $\mu(p_1, p_2), \ldots, \mu(p_n, p_{n+1})$ соответственно, $p_1, \ldots, p_{n+1} \in \mathcal{R}$, выполняются следующие условия:

• если некоторая метка u_i отрицательна, то множество

$$\mathrm{SI}(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, u_n, p_{n+1}) \setminus \mu^-(p_1, p_{n+1})$$

конечно;

• если все метки u_i положительны, то множество

$$\mathrm{SI}(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, u_n, p_{n+1}) \setminus \mu^+(p_1, p_{n+1})$$

конечно;

• если все метки u_i положительны или принадлежат U' и некоторая метка u_i принадлежит U', то множество

$$\mathrm{SI}(p_1, u_1, p_2, u_2, \ldots, u_n, p_{n+1}) \setminus (\mu^+)'(p_1, p_{n+1})$$

конечно.

Следующие свойства [1; 9] очевидны:

1. Любая n-поглощающая ($I_{\mathcal{R}}$- или $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-) система $\mathfrak{M}$ является почти n-поглощающей.

2. Любая ($I_{\mathcal{R}}$- или $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-) система $\mathfrak{M}$ является одновременно почти детерминированной и почти n-поглощающей тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{M}$ множества $\mu^-(p,q)$, $\mu^+(p,q)$, $(\mu^+)'(p,q)$ конечны.

3. Любая ($I_{\mathcal{R}}$- или $\mathrm{POSTC}_{\mathcal{R}}$-) система $\mathfrak{M}$ является 1-поглощающей тогда и только тогда, когда каждое из множеств $\mu^-(p,q)$, $\mu^+(p,q)$, $(\mu^+)'(p,q)$ содержит не более одного элемента.

Предложение 1. [1; 9] *Для любого $n \in \omega \setminus \{0\}$ если ассоциативная система $\mathfrak{M}$ (почти) n-поглощающая, то $\mathfrak{M}$ является (почти) $(n+1)$-поглощающей.*

Обозначим через $\mathrm{AbI}_{\mathcal{R},n}$ ($\mathrm{AbSI}_{\mathcal{R},n}$, $\mathrm{AAbI}_{\mathcal{R},n}$, $\mathrm{AAbSI}_{\mathcal{R},n}$, соответственно) класс ассоциативных n-поглощающих $I_{\mathcal{R}}$-систем (n-поглощающих $\mathrm{SI}_{\mathcal{R}}$-систем, почти n-поглощающих $I_{\mathcal{R}}$-систем, почти n-поглощающих $\mathrm{SI}_{\mathcal{R}}$-систем). По предложению 3.18.0.1, справедливы включения

$$\mathrm{AbI}_{\mathcal{R},n} \subseteq \mathrm{AAbI}_{\mathcal{R},n}, \quad \mathrm{AbSI}_{\mathcal{R},n} \subseteq \mathrm{AAbSI}_{\mathcal{R},n},$$

$$\mathrm{AbI}_{\mathcal{R},n} \subseteq \mathrm{AbI}_{\mathcal{R},n+1}, \quad \mathrm{AbSI}_{\mathcal{R},n} \subseteq \mathrm{AbSI}_{\mathcal{R},n+1},$$

$$\mathrm{AAbI}_{\mathcal{R},n} \subseteq \mathrm{AAbI}_{\mathcal{R},n+1}, \quad \mathrm{AAbSI}_{\mathcal{R},n} \subseteq \mathrm{AAbSI}_{\mathcal{R},n+1}, \quad n \in \omega \setminus \{0\}.$$

Отметим, что все эти включения являются строгими [1; 9].

2. Детерминированные и почти детерминированные алгебры бинарных изолирующих формул полигонометрических теорий

В этом и следующих разделах рассматриваются алгебры $\mathfrak{A}$ бинарных изолирующих формул элементарных теорий $T(\mathrm{pm})$ полигонометрий pm и, в частности, элементарных теорий $T(\mathrm{trm})$ тригонометрий trm пар групп (G_1, G_2).

Так как любая теория $T(\mathrm{pm})$ имеет единственный 1-тип p, ее алгебра $\mathfrak{A}$ бинарных изолирующих формул совпадает с моноидом $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$, имеющим лишь неотрицательные метки.

Замечание 1. Для тригонометрических теорий бинарные изолирующие формулы задаются предикатами Q_g, где g — элементы группы сторон G_1. При перемножении Q_g и $Q_{g'}$ образуется множество параметров сторон треугольников, у которых две стороны имеют параметры g и g', а параметры углов варьируются произвольно в рамках группы G_2.

Алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ бинарных изолирующих формул полигонометрической теории, вообще говоря, не сводится к указанным перемножениям, поскольку многоугольники могут не распадаться на треугольники и, следовательно, перемножения для меток u и v, задаваемых параметрами

$$(g_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, g_k),$$
$$(g'_1, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m-1}, g'_m)$$

двух ломаных, определяют множество меток w, задаваемых параметрами

$$(g_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, g_k, \beta, g'_1, \alpha'_1, \ldots, \alpha'_{m-1}, g'_m)$$

с произвольным $\beta \in G_2$.

Напомним, что через $c(\mathrm{pm})$ обозначается число компонент связности полигонометрии pm.

Теорема 1. *Алгебра* $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ *бинарных изолирующих формул полигонометрической теории* $T(\mathrm{pm})$ *детерминирована тогда и только тогда, когда выполняется какое-либо из следующих условий:*

(1) $|G_1| = 1$ *и* $c(\mathrm{pm}) \leq 2$*;*

(2) $1 < |G_1| < \omega$, $|G_2| = 1$ *и* $c(\mathrm{pm}) = 1$*;*

(3) $|G_1| \geq \omega$ *и* $|G_2| = 1$.

При этом в случае (1) *алгебра* $\mathfrak{P}'_{\nu(p)}$ *изоморфна единичной группе или группе* $\mathbb{Z}_2$*, а в случаях* (2) *и* (3) *эта алгебра изоморфна группе* G_1.

Доказательство. Если $|G_1| = 1$ и $c(\mathrm{pm}) \leq 2$, то алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ имеет не более двух меток: 0 и 1, и эти метки соответствуют изолирующим формулам $(x \approx y)$ и $\neg(x \approx y)$. При наличии лишь метки 0 детерминированность алгебры $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ с умножением $0 \cdot 0 = \{0\}$ очевидна, равно как и для алгебры $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ с метками 0 и 1, где $0 \cdot 0 = \{0\}$, $0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = \{1\}$, $1 \cdot 1 = \{0\}$. Приведенные правила умножения означают, что алгебра $\mathfrak{P}'_{\nu(p)}$ изоморфна единичной группе или группе $\mathbb{Z}_2$.

Если $1 < |G_1| < \omega$, $|G_2| = 1$ и $c(\mathrm{pm}) = 1$, то полигонометрия pm состоит из одной и при этом конечной линии l. Тогда действие группы

G_1 на линии l исчерпывает список изолирующих формул, и эти формулы соответствуют предикатам $Q_g = \{(p_1, p_2) \mid p_2 = p_1 g\}$, $g \in G_1$. Так как $Q_g \circ Q_{g'} = Q_{gg'}$, $g, g' \in G_1$, умножение меток u_g и $u_{g'}$ для Q_g и $Q_{g'}$ задается соотношением $u_g \cdot u_{g'} = u_{gg'}$. Это влечет детерминированность алгебры $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$, а также изоморфизм $\mathfrak{P}'_{\nu(p)} \simeq G_1$.

Для случая $|G_1| \geq \omega$ и $|G_2| = 1$ повторяем рассуждение, предназначенное для случая (2), независимо от значения $c(\mathrm{pm})$. При этом значение $c(\mathrm{pm})$ перестает быть формульно определимым и не влияет на элементарную эквивалентность. Снова получаем детерминированность алгебры $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$, а также изоморфизм $\mathfrak{P}'_{\nu(p)} \simeq G_1$.

Предположим теперь, что ни одно из условий (1)–(3) не выполняется.

Если $|G_1| = 1$ и $c(\mathrm{pm}) \geq 3$, то алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ с метками 0 и 1, будучи алгеброй отношения эквивалентности [3], имеющего не менее трех классов, задается следующей таблицей:

$*$	0	1
0	$\{0\}$	$\{1\}$
1	$\{1\}$	$\{0,1\}$

Так как $|1 \cdot 1| > 1$, алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ не является детерминированной.

Если $1 < |G_1| < \omega$ и $|G_2| \geq 2$, то для любого неединичного элемента $g \in G_1$ и меток u_g, $u_{g^{-1}}$ имеет место $|u_g \cdot u_{g^{-1}}| \geq 2$, поскольку переход по $Q_g \circ Q_{g^{-1}}$, с одной стороны, возможен по фиксированной линии, т. е. $0 \in u_g \cdot u_{g^{-1}}$, а с другой — по двум разным линиям: Q_g — по одной линии, а $Q_{g^{-1}}$ — по другой, порождая ненулевую метку $v \in u_g \cdot u_{g^{-1}}$. Таким образом, алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ не является детерминированной.

Если $1 < |G_1| < \omega$, $|G_2| = 1$ и $c(\mathrm{pm}) > 1$, то каждая линия определяет конечный, мощности $|G_1|$, класс эквивалентности E, и, в силу $c(\mathrm{pm}) > 1$, таких классов эквивалентности имеется не менее двух. Перемножая метку u для формулы $\neg E(x, y)$ с меткой u, получаем $|u \cdot u| \geq |G_1|$, так как при возврате на исходную линию l имеют место переходы по меткам u_g, $g \in G_1$.

Если $|G_1| \geq \omega$ и $|G_2| \geq 2$, то, повторяя рассуждение выше, независимо от значения $c(\mathrm{pm})$, также получаем недетерминированность алгебры $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$. $\square$

Непосредственно из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Любая группа изоморфна некоторой алгебре* $\mathfrak{P}'_{\nu(p)}$.

Теорема 2. *Алгебра бинарных изолирующих формул полигонометрической теории* $T(\mathrm{pm})$ *почти детерминирована тогда и только тогда, когда группа* G_1 *одноэлементна или группа* G_2 *конечна.*

Доказательство. Если группа G_1 одноэлементна, то одноэлементны компоненты связности полигонометрии pm. Тем самым, изолирующие формулы исчерпываются формулами $(x \approx y)$ и $\neg(x \approx y)$. Из конечности числа меток вытекает почти детерминированность алгебры $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$.

Если группа G_2 конечна, то, пользуясь замечанием 1, получаем конечное число вариантов меток при совмещении двух ломаных, соответствующих меткам u и v, в ломаные, соответствующие меткам $w \in u \cdot v$. Тем самым, алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ является почти детерминированной.

Если $|G_1| > 1$ и $|G_2| \geq \omega$, то уже при переходах от одной линии к другой, с общей точкой, имеется бесконечно много меток, осуществляющих такие переходы с различными углами $g_2 \in G_2$. Тем самым, любое множество $u_g \cdot u_{g'}$, где $g, g' \in G_1 \setminus \{e\}$, является бесконечным, и, значит, алгебра $\mathfrak{P}_{\nu(p)}$ не является почти детерминированной. □

Замечание 2. Согласно теореме 2 каждая полигонометрия с конечными компонентами связности имеет теорию с почти детерминированной алгеброй бинарных изолирующих формул.

3. n-Почти детерминированные алгебры бинарных изолирующих формул. Алгебры для правильных многогранников

Определение 1. Система $\mathfrak{P}_{\nu(\mathfrak{p})}$ называется *n-почти детерминированной* ($n \in \omega$), если множество uv имеет не более n элементов для любых меток $u, v \in \rho_{\nu(p)}$.

Заметим, что счетно категоричные теории имеют n-почти детерминированные алгебры, где n является верхней границей числа попарно неэквивалентных бинарных изолирующих формул. При этом, как показывают примеры с отношениями эквивалентности [3; 4], значения n не ограничены в совокупности. В ряде примеров 2-почти детерминированность алгебры описывается формулой $uv = |u \pm v| (\mathrm{mod}\ d)$, где d — диаметр графовой структуры. Формула $uv = |u \pm v| (\mathrm{mod}\ d)$ работает для теорий неорграфов, образующих циклы, для теорий ациклических графов с транзитивной группой автоморфизмов, для кубических теорий и т.д. [1; 7]. В целом это верно для теорий неорграфов, которые базируются формулами, описывающими расстояния между элементами и при этом при последовательных переходах по этим формулам расстояния складываются или вычитаются.

Отметим, что структуры и их теории могут не восстанавливаться по указанному выше “простому” умножению: имеются различные теории графов одного и того же диаметра d и с алгеброй, задаваемой формулой $uv = |u \pm v| (\mathrm{mod}\ d)$, например, для $d = \infty$, теории ациклических неорграфов с транзитивными группами автоморфизмов и с разной конечной валентностью вершин. Это верно и для любого конечного $d > 0$, например, для теории d-мерного куба и теории неорграфа, образующего цикл длины d, без каких-либо дополнительных ребер.

Ниже мы дадим описание алгебр бинарных изолирующих формул для теорий графов правильных многогранников, анонсированное в [10]. Эти теории, как известно [7], являются полигонометрическими теориями.

Определение 2. Для куба обозначим через $\mathfrak{Q}$ алгебру $\langle Q; *\rangle$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, 2, 3\}$ и задаваемую следующей таблицей:

$*$	0	1	2	3
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$
1	$\{1\}$	$\{0,2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2\}$
2	$\{2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2\}$	$\{1,3\}$
3	$\{3\}$	$\{0,2\}$	$\{1,3\}$	$\{0,2\}$

Алгебра $\mathfrak{Q}$ является 2-почти детерминированной.

Определение 3. Для тетраэдра обозначим через $\mathfrak{T}$ алгебру $\langle T; *\rangle$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, 2\}$ и задаваемую следующей таблицей:

$*$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$
2	$\{2\}$	$\{0, 1\}$	$\{0, 1\}$

Алгебра $\mathfrak{T}$ является 2-почти детерминированной.

Определение 4. Для октаэдра обозначим через $\mathfrak{O}$ алгебру $\langle O; *\rangle$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0, 1, 2\}$ и задаваемую следующей таблицей:

$*$	0	1	2
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$
1	$\{1\}$	$\{0, 1, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$
2	$\{2\}$	$\{0, 1, 2\}$	$\{0, 1, 2\}$

Алгебра $\mathfrak{O}$ является 3-почти детерминированной.

Определение 5. Для додекаэдра обозначим через $\mathfrak{D}$ алгебру $\langle D;*\rangle$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0,1,2,3,4,5\}$ и задаваемую следующей таблицей:

$*$	0	1	2	3	4	5
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{4\}$	$\{5\}$
1	$\{1\}$	$\{0,2\}$	$\{2,3\}$	$\{1,3,4\}$	$\{0,2,3,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$
2	$\{2\}$	$\{2,3\}$	$\{0,1,3,4,5\}$	$\{0,2,3,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$
3	$\{3\}$	$\{1,3,4\}$	$\{0,2,3,5\}$	$\{0,1,2,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4,5\}$
4	$\{4\}$	$\{0,2,3,5\}$	$\{0,1,2,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$
5	$\{5\}$	$\{0,1,2,4,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,5\}$	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{0,1,2,3,4\}$

Алгебра $\mathfrak{D}$ является 6-почти детерминированной.

Определение 6. Для икосаэдра обозначим через $\mathfrak{I}$ алгебру $\langle I;*\rangle$ с множеством меток $\rho_{\nu(p)} = \{0,1,2,3\}$ и задаваемую следующей таблицей:

$*$	0	1	2	3
0	$\{0\}$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{3\}$
1	$\{1\}$	$\{0,1,2\}$	$\{0,2,3\}$	$\{1,2,3\}$
2	$\{2\}$	$\{0,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$
3	$\{3\}$	$\{1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$	$\{0,1,2,3\}$

Алгебра $\mathfrak{I}$ является 4-почти детерминированной.

Непосредственно проверяется, что указанные алгебры являются алгебрами бинарных изолирующих формул теорий графов правильных многогранников.

Тем самым описаны алгебры бинарных изолирующих формул для теорий графов правильных многогранников:

Теорема 3. *Для любой теории T правильных многогранников алгебра $\mathfrak{B}$ бинарных изолирующих формул задается ровно одной из следующих алгебр: алгеброй $\mathfrak{Q}$, алгеброй $\mathfrak{T}$, алгеброй $\mathfrak{O}$, алгеброй $\mathfrak{D}$, алгеброй $\mathfrak{I}$.*

4. Поглощающие алгебры бинарных изолирующих формул полигонометрических теорий

Теорема 4. *Для любой группы G_1 существует тригонометрия $\mathrm{trm} = \mathrm{trm}(G_1, G_2, \mathcal{P})$ такая, что теория $T(\mathrm{trm})$ обладает 2-поглощающей алгеброй бинарных изолирующих формул.*

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что G_1 — неединичная группа. Зафиксируем эту группу и в качестве G_2 возьмем свободную группу ранга $\lambda = \max\{|G_1|, \omega\}$ с λ свободными порождающими f_i. Аналогично [7, теорема 1.2.1] построим по индукции тригонометрическое множество $\mathbf{S}$ для искомой тригонометрии trm. С этой целью занумеруем все тройки (g_1, g_2, g_3) неединичных элементов группы G_1, (g_1^j, g_2^j, g_3^j), $j < \lambda$. В соответствии с этой нумерацией на начальном шаге с тройкой (g_1^0, g_2^0, g_3^0) сформируем тригонометрическое множество

$$\mathbf{S}_0 = \mathrm{GN}\left(\left\{\begin{pmatrix} g_1^0 & g_2^0 & g_3^0 \\ f_0 & f_1 & f_2 \end{pmatrix}\right\} \cup \mathbf{\Delta}_e(G_1, G_2)\right). \tag{4.1}$$

На каждом предельном шаге j построения в качестве $\mathbf{S}_j$ возьмем $\bigcup\limits_{j'<j} \mathbf{S}_{j'}$, а на каждом непредельном шаге $j+1$ построения множества $\mathbf{S}$ с новой тройкой $(g_1^{j+1}, g_2^{j+1}, g_3^{j+1})$ свяжем тригонометрическое множество $\mathbf{S}_{j+1}$, которое получается GN-замыканием тригонометрического множества $\mathbf{S}_j$ с добавлением матрицы

$$\begin{pmatrix} g_1^{j+1} & g_2^{j+1} & g_3^{j+1} \\ f_k & f_{k+1} & f_{k+2} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

со свободными порождающими f_k, f_{k+1}, f_{k+2}, которые не участвуют в построении нетривиальных матриц из $\mathbf{S}_j$. При этом взятием новых свободных порождающих из G_2 для параметров углов будем заботиться, чтобы в нетривиальных многоугольниках S любые две вершины принадлежали некоторой линии. А именно, если g_1, g_2 — неединичные параметры смежных сторон из S, с углом α между ними, то для произвольно выбранного неединичного элемента $g \in G_1$ и неиспользованных ранее свободных порождающих f_l, f_{l+1} добавим к множеству $\mathbf{S}_j$ (G_1, G_2)-треугольник

$$\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g \\ \alpha & f_l & f_{l+1} \end{pmatrix}.$$

В результате построения получаем тригонометрическое множество $\mathbf{S} = \bigcup\limits_{j} \mathbf{S}_j$, которое задает искомую 2-поглощающую тригонометрию trm. Действительно, по построению (4.1), (4.2) каждое произведение $u_{g_1} \cdot u_{g_2}$, с неединичными элементами $g_1, g_2 \in G_1$, содержит каждую метку u_{g_3}, $g_3 \in G_1 \setminus \{e\}$. □

Список литературы

1. Судоплатов С. В. Классификация счетных моделей полных теорий. Ч. 1 / С. В. Судоплатов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2014. – 356 с.

2. Shulepov I. V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory / I. V. Shulepov, S. V. Sudoplatov // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2014. – Vol. 11. – P. 380–407.
3. Емельянов Д. Ю. Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для вложенных отношений эквивалентности / Д. Ю. Емельянов // Algebra and Model Theory 10: Collection of papers. – Novosibirsk : NSTU Publisher, 2015. – P. 59–70.
4. Емельянов Д. Ю. Об алгебрах распределений бинарных формул теорий унаров / Д. Ю. Емельянов // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2016. – Т. 17. – С. 23–36.
5. Емельянов Д. Ю. Алгебры распределений бинарных формул в счетно категоричных слабо о-минимальных структурах / Д. Ю. Емельянов, Б. Ш. Кулпешов, С. В. Судоплатов // Алгебра и логика. – 2017. – Т. 56, № 1. – С. 20–54.
6. Судоплатов С. В. О классификации полигонометрий групп / С. В. Судоплатов // Мат. тр. – 2001. – Т. 4, № 1. – С. 174–202.
7. Судоплатов С. В. Полигонометрии групп / С. В. Судоплатов. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011, 2013. – 302 с.
8. Судоплатов С. В. Полигонометрии пар групп / С. В. Судоплатов // Сиб. мат. журн. – 1997. – Т. 38, № 4. – С. 925–931.
9. Sudoplatov S. V. Deterministic and absorbing algebras / S. V. Sudoplatov // 9th Panhellenic Logic Symposium, July 15-18, 2013, National Technical University of Athens, Greece. – Athens : NTUA, 2013. – P. 91–96.
10. Емельянов Д. Ю. О почти детерминированных алгебрах бинарных изолирующий формул / Д. Ю. Емельянов // Междунар. конф. «Мальцевские чтения» : тез. докл. – Новосибирск : ИМ СО РАН, 2016. – С. 182.

Емельянов Дмитрий Юрьевич, магистрант, Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1, тел. (383)3634020 (e-mail: dima-pavlyk@mail.ru)

Судоплатов Сергей Владимирович, доктор физико-математических наук, доцент; ведущий научный сотрудник, Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4, тел.: (383)3297586; заведующий кафедрой алгебры и математической логики, Новосибирский государственный технический университет, 630073, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20, тел. (383)3461166; доцент кафедры алгебры и математической логики, Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1, тел. (383)3634020; главный научный сотрудник, Институт математики и математического моделирования МОН РК, 050010, Казахстан, Алматы, ул. Пушкина, 125, тел. +7(727)2720046 (e-mail: sudoplat@math.nsc.ru)

D. Yu. Emelyanov, S. V. Sudoplatov

On Deterministic and Absorbing Algebras of Binary Formulas of Polygonometrical Theories

Abstract. Algebras of distributions of binary isolating and semi-isolating formulas are derived structures for a given theory. These algebras reflect binary links between realizations of 1-types defined by formulas of the initial theory. Thus these are two sorts of interrelated classification problems: 1) to define, for a given class of theories, what algebras correspond to theories in this class and to classify these algebras; 2) to classify theories in the class in the dependence of algebras of isolating and semi-isolating algebras that defined by these theories. For the finite algebras of binary isolating formulas that description implies the description for the algebra of binary semi-isolating formulas.

In the paper, we investigate deterministic, almost deterministic, and absorbing algebras of binary formulas of polygonometrical theories.

The properties of determinism and almost determinism for algebras of binary isolating formulas of polygonometrical theories are characterized. As corollary we have that any group generates a deterministic algebra of a polygonometrical theory. The notion of n-almost deterministic algebra is introduced, examples and properties of these algebras are stated. A description of these algebras for theories of graphs of regular polyhedrons is given. It is shown that any group is a side-group of a trigonometry with 2-absorbing algebra of binary isolating formulas.

Keywords: algebra of binary formulas, deterministic algebra, absorbing algebra, polygonometrical theory.

References

1. Sudoplatov S.V. *Klassifikacija schetnyh modelej polnyh teorij.* [Classification of Countable Models of Complete Theories]. Part 1. Novosibirsk, NSTU, 2014. 356 p. (in Russian)
2. Shulepov I.V., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory. *Siberian Electronic Mathematical Reports.* 2014, vol. 11, pp. 380-407.
3. Emelyanov D.Yu. Algebras of distributions of binary isolating formulas for embedded equivalence relations. *Algebra and Model Theory 10: Collection of papers.* Novosibirsk, NSTU Publ., 2015, pp. 59-70.
4. Emelyanov D.Yu. On algebras of distributions of binary formulas for theories of unars. *Izvestiya Irk. Gos. Universiteta. Seriya "Matematika"*, 2016, vol. 17, pp. 23-36.
5. Emelyanov D.Yu., Kulpeshov B.Sh., Sudoplatov S.V. Algebras of distributions for binary formulas in countably categorical weakly o-minimal structures. *Algebra and Logic*, 2017, vol. 56, no 1, pp. 20-54. https://doi.org/10.1007/s10469-017-9424-y
6. Sudoplatov S.V. On classification of group polygonometries. *Siberian Advances in Mathematics*, 2001, vol. 11, no 3, pp. 98–125.
7. Sudoplatov S.V. *Poligonometrii grupp.* [Group Polygonometries]. Novosibirsk, NSTU, 2011, 2013. 302 p. (in Russian)
8. Sudoplatov S.V. Polygonometries of pairs of groups. *Siberian Mathematical Journal*, 1997, vol. 38, no 4, pp. 801-806. https://doi.org/10.1007/BF02674585
9. Sudoplatov S.V. Deterministic and absorbing algebras. *9th Panhellenic Logic Symposium, July 15-18*, 2013, National Technical University of Athens, Greece. Athens, NTUA, 2013, pp. 91-96.
10. Emelyanov D.Yu. On almost deterministic algebras of binary isolating formulas *Internat. conf. "Mal'tsev Meeting". Collection of abstracts.* Novosibirsk, IM SB RAS, 2016, p. 182.

Emelyanov Dmitry Yuryevich, Undergraduate, Novosibirsk State University, 1, Pirogov st., Novosibirsk, 630090, tel.: (383)3634020 (e-mail: dima-pavlyk@mail.ru)

Sudoplatov Sergey Vladimirovich, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Associate Professor; Leading Researcher, Sobolev Institute of Mathematics SB RAS, 4, Academician Koptyug Avenue, Novosibirsk, 630090, tel.: (383)3297586; Head of Chair, Novosibirsk State Technical University, 20, K. Marx av., Novosibirsk, 630073, tel.: (383)3461166; Novosibirsk State University, 1, Pirogov st., Novosibirsk, 630090, tel.: (383)3634020; Principal Researcher, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 125, Pushkina st., Almaty, Kazakhstan, 050010, tel.: +7(727)2720046 (e-mail: sudoplat@math.nsc.ru)