Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 4. С. 87—93

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского государственного университета

УДК 517.9

Об одной гипотезе Г. А. Свиридюка

Н. А. Манакова
Южно-Уральский государственный университет

Аннотация. Найдены достаточные условия существования оптимального управления решениями начально-конечной задачи для линейного уравнения соболевского типа с функционалом качества общего вида.

Ключевые слова: уравнения соболевского типа, оптимальное управление, начально-конечная задача.

Введение

Пусть $\mathfrak{X}$,$\mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{U}$ – гильбертовы пространства, операторы $L,M\in\mathcal{L}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, а оператор $B\in\mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{Y})$, функции $u:[0,\tau)\subset\mathbb{R}_+\to\mathfrak{U}$, $y:[0,\tau)\subset\mathbb{R}_+\to\mathfrak{Y}\,(\tau<\infty)$ подлежат дальнейшему определению. Введем в рассмотрение L-резольвентное множество $\rho^L(M)=\{\mu\in\mathbb{C}:(\mu L-M)^{-1}\in\mathcal{L}(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\}$ и L-спектр $\sigma^L(M)=\mathbb{C}\setminus\rho^L(M)$ оператора M (см. [1, гл. 4]). Пусть оператор M (L,p)-ограничен и L-спектр оператора M

$$\sigma^L(M)=\sigma^L_{in}(M)\cup\sigma^L_{ex}(M),\ \sigma^L_{in}(M)\cap\sigma^L_{ex}(M)=\emptyset. \tag{0.1}$$

Операторы

$$P=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^L_\mu(M)d\mu,\quad Q=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^L_\mu(M)d\mu\quad -$$

проекторы, $P\in\mathcal{L}(\mathfrak{X})$, $Q\in\mathcal{L}(\mathfrak{Y})$. Здесь $\Gamma\subset\mathbb{C}$ – замкнутый контур, ограничивающий область, содержащую $\sigma^L(M)$; $R^L_\mu=(\mu L-M)^{-1}L$ – правая, а $L^L_\mu=L(\mu L-M)^{-1}$ – левая L-резольвенты оператора M. Положим $\mathfrak{U}^0=\ker P$, $\mathfrak{F}^0=\ker Q$, $\mathfrak{U}^1=\mathrm{im}P$, $\mathfrak{F}^1=\mathrm{im}Q$. Из существования проекторов следует, что $\mathfrak{U}=\mathfrak{U}^0\oplus\mathfrak{U}^1,\quad \mathfrak{F}=\mathfrak{F}^0\oplus\mathfrak{F}^1$.

Аналогично построим проекторы P_{in} и P_{ex}

$$P_{in}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R^L_\mu(M)d\mu,\ P_{ex}=P-P_{in}.$$

Здесь контур $\gamma \in \mathbb{C}$ ограничивает область, содержащую $\sigma^L_{in}(M)$.

Теорема 1. *Пусть* $\sigma^L(M) = \sigma^L_{in}(M) \cup \sigma^L_{ex}(M)$, *причем* $\sigma^L_{in}(M)$ *содержится в ограниченной области* $\Omega \subset \mathbb{C}$ *с кусочно гладкой границей* $\partial\Omega$ *и* $\partial\Omega \cap \sigma^L(M) = \emptyset$. *Тогда существуют проекторы* $P_{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$ *и* $Q_{in} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ *такие, что операторы* $L \in \mathcal{L}(\ker P_{in}; \ker Q_{in}) \cap \mathcal{L}(\mathrm{im} P_{in}; \mathrm{im} Q_{in})$ *и* $M \in \mathcal{L}(\ker P_{in}; \ker Q_{in}) \cap \mathcal{L}(\mathrm{im} P_{in}; \mathrm{im} Q_{in})$.

Для линейного уравнения соболевского типа

$$L\dot{x} = Mx + y + Bu \tag{0.2}$$

рассмотрим начально-конечную задачу

$$P_{ex}(x(0) - x_0) = 0, \quad P_{in}(x(\tau) - x_\tau) = 0, \tag{0.3}$$

где $\tau \in \mathbb{R}_+$ (для определенности, вообще можно $\tau \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$), x_0, $x_\tau \in \mathfrak{X}$).

Задача (0.3) для линейных уравнений соболевского типа впервые появилась в работах Г. А. Свиридюка и С. А. Загребиной [6], в дальнейшем данная задача была названа "начально-конечной и в настоящее время уже есть результаты о начально-конечных задачах для уравнений соболевского типа высокого порядка [1].

Нас будет интересовать задача оптимального управления, которая заключается в отыскании такой пары $(x, u_0) \in \mathfrak{X} \times \mathfrak{U}_{ad}$, где x является решением задачи (0.2), (0.3), а для u_0 выполняется соотношение

$$J(u_0) = \inf_{u \in \mathfrak{U}_{ad}} J(u). \tag{0.4}$$

Здесь $J(u)$ – некоторый функционал качества; управление $u \in \mathfrak{U}_{ad}$, где $\mathfrak{U}_{ad}$ – некоторое замкнутое и выпуклое множество в пространстве управлений $\mathfrak{U}$. Таким образом, оптимальное управление решениями задачи (0.2) – (0.4) дает возможность минимизировать штрафные санкции.

Впервые задача оптимального управления для линейных уравнений соболевского типа (0.2) появилась в работах Г. А. Свиридюка и А. А. Ефремова [1, гл. 7]. В данных работах рассматривается специальным образом построенный функционал стоимости

$$J(u) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau ||z^{(q)} - z_0^{(q)}||^2_{\mathfrak{Z}} dt + \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt,$$

где p-является высотой M-присоеденных векторов оператора L [1, гл. 3]. В дальнейшем Г. А. Свиридюком была выдвинута гипотеза о том, что можно рассматривать функционал стоимости более общего вида

$$J(u) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau ||z^{(q)} - z_0^{(q)}||^2_{\mathfrak{Z}} dt + \sum_{q=0}^{p+k} \int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt,$$

где $k \geq 1$. Такие задачи необходимо рассматривать, когда например $p = 0$, а необходимо минимизировать не только управление и скорость, но также необходимо оптимизировать и ускорение.

Уравнения соболевского типа составляют обширную область неклассических уравнений математической физики (см. обстоятельные обзоры в [7], [4]). Оптимальное управление линейными уравнениями с условиями Коши, как уже было сказано, впервые изучалось в [1, гл. 7]. Задача (0.3) является обобщением задачи Шоуолтера – Сидорова [6]. В работе [2] предложен численный алгоритм нахождения решения задачи оптимального управления для линейных уравнений соболевского типа. Оптимальное управление решениями задачи Шоуолтера – Сидорова для полулинейных уравнений соболевского типа рассматривалось в [3]. Наш подход основан на идеях и методах [9], [5], [8].

1. Сильные решения

Для линейного неоднородного уравнения соболевского типа

$$L\dot{x} = Mx + y \tag{1.1}$$

рассмотрим начально-конечную задачу (0.3).

Теорема 2. *[6] Пусть оператор M (L, p)-ограничен,причем выполнены условия теоремы 1. Тогда для любых $x_0, x_\tau \in \mathfrak{Y}$ и вектор-функции $y \in C^p([0, T]; \mathfrak{Y}) \cap C^{p+1}((0, T); \mathfrak{Y})$, существует единственное решение задачи (0.3), (1.1), которое имеет к тому же вид*

$$x(t) = -\sum_{q=0}^{p}(M_0^{-1}L_0)^q M_0^{-1}\frac{d^q}{dt^q}y^0(t) + U_{ex}^t x_0 + \int\limits_0^t R_{ex}^{t-s}y^{ex}(s)ds +$$

$$+U_{in}^{t-\tau}x_\tau - \int\limits_t^\tau R_{in}^{t-s}y^{in}(s)ds, \tag{1.2}$$

где

$$U_{ex(in)}^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma R_\mu^L(M)e^{\mu t}d\mu, \quad R_{ex(in)}^t = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma(\mu L - M)^{-1}e^{\mu t}d\mu.$$

Определение 1. *Вектор-функцию $x \in H^1(\mathfrak{X}) = \{x \in L_2(0, \tau; \mathfrak{X}) : \dot{x} \in L_2(0, \tau; \mathfrak{X})\}$ назовем сильным решением уравнения (1.1) если она п. в. на $(0, \tau)$ обращает его в тождество. Сильное решение $x = x(t)$ уравнения (1.1) назовем сильным решением начально-конечной задачи, если оно удовлетворяет (0.3).*

В силу непрерывности вложения $H^1(\mathfrak{X}) \hookrightarrow C([0,\tau];\mathfrak{X})$ наше определение корректно. Термин "сильное решение" введен для того, чтобы отличать решение уравнения (1.1) в данном смысле от решения (1.2), которое теперь уместно называть "классическим". Заметим, что классическое решение (1.2) является также и сильным решением задачи (0.3), (1.1).

Построим пространства

$$H^{p+1}(\mathfrak{Y}) = \{v \in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}) : v^{(p+1)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{Y}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}\}.$$

Пространство $H^{p+1}(\mathfrak{Y})$ – гильбертово со скалярным произведением

$$[v,w] = \sum_{q=0}^{p+1} \int_0^\tau \left\langle v^{(q)}, w^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{Y}} dt.$$

Пусть $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$. Введем в рассмотрение операторы

$$A_1 y(t) = -\sum_{q=0}^{p} (M_0^{-1}L_0)^q M_0^{-1} \frac{d^q}{dt^q} y^0(t), \quad k_1(t) = U_{ex}^t x_0,$$

$$A_2 y(t) = \int\limits_0^t R_{ex}^{t-s} y^{ex}(s)ds, \quad k_2(t) = U_{in}^{t-\tau} x_\tau, \quad A_3 = \int\limits_t^\tau R_{in}^{t-s} y^{in}(s)ds.$$

Лемма 1. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен. Тогда*

(i) $A_1 \in \mathcal{L}(H^{p+1}(\mathfrak{Y}), H^1(\mathfrak{X}))$;

(ii) при любом $x_0 \in \mathfrak{X}$ вектор-функция $k_1 \in C^1([0,\tau);\mathfrak{X})$;

(iii) $A_2 \in \mathcal{L}(H^{p+1}(\mathfrak{Y}), H^1(\mathfrak{X}))$;

(iv) при любом $x_\tau \in \mathfrak{X}$ вектор-функция $k_2 \in C^1([0,\tau);\mathfrak{X})$;

(vi) $A_3 \in \mathcal{L}(H^{p+1}(\mathfrak{Y}), H^1(\mathfrak{X}))$.

Теорема 3. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}$. Тогда для любых $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ и $y \in H^{p+1}(\mathfrak{Y})$ существует единственное сильное решение задачи (0.3) для уравнения (1.1).*

Доказательство. Действуя на уравнение (1.1) последовательно проекторами $\mathbb{I} - Q$ и $Q_{in(ex)}$ и пользуясь теоремой 1, сведем его к эквивалентной системе из трех независимых уравнений

$$H\dot{x}^0 = x^0, x^0(0) = 0, \tag{1.3}$$

$$\dot{x}^{in} = S_{in}x^{in}, x^{in}(\tau) = 0, \tag{1.4}$$

$$\dot{x}^{ex} = S_{ex}x^{ex}, x^{ex}(0) = 0 \tag{1.5}$$

где $H = M_0^{-1}L_0$, $S_{ex(in)} = L_{1ex(in)}^{-1}M_{1ex(in)} \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}_{ex(in)}^1)$. Здесь $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$, где $x_1(t), x_2(t)$ – два решения задачи (0.3), (1.1).

В силу нильпотентности оператора H из уравнения (1.3) получаем $H^{p+1}\dot{x}^0 = H^p x^0 = 0$. Продолжая этот процесс, убеждаемся, что $x^0 = 0$. Равенство нулю решений задач (1.4), (1.5) следует из ограниченности операторов S_{ex}, S_{in}. □

2. Оптимальное управление

Для линейного неоднородного уравнения соболевского типа

$$L\dot{x} = Mx + y + Bu \tag{2.1}$$

рассмотрим начально-конечную задачу (0.3), где функции x, y и u лежат в гильбертовых пространствах $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}$ и $\mathfrak{U}$ соответственно. Оператор $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}; \mathfrak{Y})$, оператор $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{Y})$, оператор M (L,p)-ограничен.

Введем в рассмотрение пространство управлений

$$H^{p+k}(\mathfrak{U}) = \{u \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U}) : u^{(p+k)} \in L_2(0,\tau;\mathfrak{U}), p \in \{0\} \cup \mathbb{N}, k \geq 1\}.$$

Пространство $H^{p+k}(\mathfrak{U})$ гильбертово, в силу гильбертовости $\mathfrak{U}$, со скалярным произведением

$$[v, w] = \sum_{q=0}^{p+k} \int_0^\tau \left\langle v^{(q)}, w^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt.$$

Выделим в пространстве $H^{p+k}(\mathfrak{U})$ замкнутое и выпуклое подмножество $H^{p+k}_\partial(\mathfrak{U})$ – *множество допустимых управлений.*

Введем в рассмотрение $\mathfrak{Z}$ – некоторое гильбертово пространство наблюдений и оператор $C \in \mathcal{L}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Z})$, задающий наблюдение $z(t) = Cx(t)$. Заметим, что если $x \in H^1(\mathfrak{U})$, то $z \in H^1(\mathfrak{Z})$.

Определение 2. *Вектор-функцию $u_0 \in H^{p+k}_\partial(\mathfrak{U})$ назовем оптимальным управлением решениями задачи (2.1), (0.3), если*

$$J(u_0) = \min\nolimits_{u \in H^{p+k}_\partial(\mathfrak{U})} J(u). \tag{2.2}$$

Нашей целью является доказательство существования единственного управления $u_0 \in H^{p+k}_\partial(\mathfrak{U})$, минимизирующего функционал стоимости

$$J(u) = \sum_{q=0}^{1} \int_0^\tau ||z^{(q)} - z_0^{(q)}||^2_{\mathfrak{Z}} dt + \sum_{q=0}^{p+k} \int_0^\tau \left\langle N_q u^{(q)}, u^{(q)} \right\rangle_{\mathfrak{U}} dt. \tag{2.3}$$

Здесь $N_q \in \mathcal{L}(\mathfrak{U})$, $q = 0, 1, \ldots, p+k$, – самосопряженные и положительно определенные операторы, $z_0 = z_0(t)$ – желаемое наблюдение. Справедлива

Теорема 4. *Пусть оператор M (L,p)-ограничен, $p \in \{0\} \cup \mathbb{N}, k \geq 1$. Тогда для любых $y \in H^{p+k}(\mathfrak{Y})$, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ существует единственное оптимальное управление решениями задачи (2.1), (0.3).*

Доказательство. По теореме 3 при любых $y \in H^{p+k}(\mathfrak{Y})$, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ и $u \in H^{p+k}(\mathfrak{U})$ существует единственное сильное решение $x \in H^1(\mathfrak{X})$ задачи (2.1), (0.3), имеющее вид

$$x(t) = (A_1 + A_2)(y + Bu)(t) + k_1(t) + k_2(t),$$

где операторы A_1, A_2 и вектор-функции k_1, k_2 заданы в лемме 1.

Зафиксируем $y \in H^{p+k}(\mathfrak{Y})$, $x_0, x_\tau \in \mathfrak{X}$ и рассмотрим (2.1) как отображение $D : u \to x(u)$. Тогда отображение $D : H^{p+k}(\mathcal{U}) \to H^1(\mathfrak{X})$, определенно непрерывно.

Перепишем функционал стоимости (2.3) в виде

$$J(u) = \|Cx(t;u) - z_0\|^2_{H^1(\mathfrak{Z})} + [v, u], \tag{2.4}$$

где $v^{(q)}(t) = N_q u^{(q)}(t),\ q = 0, \ldots, p+k$. Отсюда

$$J(u) = \pi(u,u) - 2\lambda(u) + \|z_0 - Cx(t;0)\|^2_{H^1(\mathfrak{Z})},$$

где

$$\pi(u,u) = \|C(x(t;u)) - x(t;0)\|^2_{H^1(\mathfrak{Z})} + [v, u] \quad -$$

билинейная непрерывная коэрцитивная форма на $H^{p+k}(\mathfrak{U})$, а

$$\lambda(u) = \langle z_0 - Cx(t;0), (x(t;u) - x(t;0)) \rangle_{H^1(\mathfrak{Z})} \quad -$$

линейная непрерывная на $H^{p+k}(\mathfrak{U})$ форма. Значит, условия теоремы [10, гл.1] выполнены. □

Список литературы

1. Замышляева А. А. Начально-конечная задача для уравнения Буссинеска – Лява на графе / А. А. Замышляева, А. В. Юзеева // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2010. – Т. 3, № 2. – С. 85–96.
2. Келлер А. В. Численное решение задачи стартового управления для системы уравнений леонтьевского типа / А. В. Келлер // Обозрение приклад. и пром. математики. – М., 2009. – Т. 16, вып. 2. – С. 345–346.
3. Манакова Н. А. Задача оптимального управления для уравнения Осколкова нелинейной фильтрации / Н. А. Манакова // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43, № 9. – С. 1185–1192.
4. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа / А. Г. Свешников, А. Б. Альшанский, М. О. Корпусов, Ю. Д. Плетнер. – М. : Физматлит, 2007.

5. Лионс Ж. -Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж.-Л. Лионс. – М. : Мир, 1972.
6. Свиридюк Г. А. Задача Шоуолтера – Сидорова как феномен уравнений соболевского типа / Г. А. Свиридюк, С. А. Загребина // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. – 2010. – Т. 3, № 1. – С. 51–72.
7. Demidenko G. V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest – order derivative / G. V. Demidenko, S. V. Uspenskii. – N. Y. ; Basel ; Hong Kong : Marcel Dekker, Inc., 2003.
8. Фурсиков А. В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения / А. В. Фурсиков. – Новосибирск : Научная книга, 1999.
9. Sviridyuk G. A. Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators / G. A. Sviridyuk, V. E. Fedorov. – VSP, Utrecht ; Boston, 2003.

N. A. Manakova

On a hyposithis of G. A. Sviridyuk

Abstract. The sufficient conditions for the existence of optimal control to solutions of an initial-finish problem for the linear equation whith a penalty functional of general form are found.

Keywords: Sobolev type equation, optimal control, initial-finish.

Манакова Наталья Александровна, кандидат физико-математических наук, доцент, Южно-Уральский государственный университет, 454080, Челябинск, пр. Ленина, 76, тел.: (351)2679339 (manakova@hotbox.ru)

Manakova Natalya, South Ural State University, 76, Lenin prospekt, Chelyabinsk, 454080, Phone: (351)2679339 (manakova@hotbox.ru)