Серия «Математика»
2013. Т. 6, № 1. С. 101—107

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 512.542.52

Вторая функция Эйлера – Холла на группах лиева типа ранга 1

Ю. Ю. Ушаков
Сибирский федеральный университет

Аннотация. Для случая проективных специальных унитарных групп исследуется вопрос Сыскина о вычислении второй функции Эйлера – Холла.

Ключевые слова: конечная простая группа; группа лиева типа; функция Эйлера – Холла.

Введение

Ф. Холл назвал n-базой группы G любой порождающий её упорядоченный набор из n элементов. Он обозначает число всех n-баз в G через $\varphi_n(G)$ и φ_n называет n-й функцией Эйлера. С другой стороны, $d = d_n(G)$ обозначает максимальный показатель n-порожденной прямой степени G^d группы G. Для простой конечной неабелевой группы G в [11] доказана формула

$$\varphi_n(G) = d_n(G) \cdot |\operatorname{Aut} G|,$$

послужившая основанием для изучения функций d_n, прежде всего, для $n = 2$; см. в Коуровской тетради [3] вопрос 12.86 о нахождении значений $d_2(G)$, записанный С. А. Сыскиным, и вопрос 17.116 об оценке чисел $d_2(G)$, известный как гипотеза Уайголда.

Решение вопроса 12.86 в классе групп G лиева типа ранга 1, кроме унитарного случая, дано в работах [6, 4, 5]; при тех же ограничениях на G в [7] получена оценка чисел $d_n(G)$. Недавно решение вопроса 17.116 было завершено, см. Тамбурини [14].

В настоящей статье вопрос Сыскина исследуется для оставшихся простых групп лиева типа ранга 1 — унитарных групп.

Отметим, что группы ${}^2G_2(q)$ (группы Ри) и ${}^2A_2(q)$ (унитарный случай) лиева типа ранга 1, в отличие от типов ${}^2B_2$ и A_1, обладают неразрешимыми подгруппами с неединичным разрешимым радикалом.

1. Основная теорема

Решение вопроса Сыскина для простых групп Ри $Re(q) = {}^2G_2(q)$, $q = 3^{2n+1}$ получено в [4, 5] в два этапа. Доказанная в [4] теорема редуцировала нахождение значения $\varphi_2(Re(q))$ к перечислению пар элементов, лежащих в подгруппе с неединичным разрешимым радикалом. Описание значений $\varphi_2(Re(q))$ в [5] завершила следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $Re(q)$ $(q = 3^n,\ n > 1)$ — конечная простая группа Ри типа ${}^2G_2$. Тогда для простых чисел n имеем $d_2(Re(q)) = (1/n)\cdot\rho(q)$, где*

$$\rho(q) = (q-3)\left(q^6 + 2q^5 + 6q^4 + 18q^3 + 53q^2 + 160q + 464\right).$$

Если число n — составное, то

$$d_2(Re(q)) = \frac{1}{n}[\rho(q) - \sum_{t|n,\ n>t>1} t\cdot d_2(Re(3^t))].$$

Следуя этой же схеме, мы реализуем в этой статье первый этап решения вопроса Сыскина для групп $PSU_3(q^2)$, т. е. групп ${}^2A_2(q^2)$.

Напомним, что проективная специальная унитарная группа $PSU_3(q^2)$ над конечным полем порядка q^2 является простой, когда $q > 2$.

Далее, $G(q) = PSU_3(q^2)$, $q = p^{2^s\cdot r} > 2$, где число r — нечетное. Степень расширения K поля F, как обычно, обозначается через $(K : F)$. Как и в [9, 8.4], $\widehat{G}(q) = PU_3(q^2)$ есть расширение группы $G(q)$ с помощью диагональных автоморфизмов.

Пусть W — множество пар элементов группы $G(q)$ (аналогично, $\widehat{W}$ в $\widehat{G}(q)$), лежащих в подгруппе из $G(q)$ (соответственно, из $\widehat{G}(q)$) с неединичным разрешимым радикалом. Положим

$$\delta = \text{НОД}(q+1, 3), \qquad \varepsilon = 2 - \text{НОД}(q, 2),$$

$$s(q) = 38\delta_1 + 212\delta_2 + 2406\delta_3 + 114\delta_4,$$

где $\delta_i = 1$ или 0, соответственно, когда верно или не верно i-е условие:

1) $q = \pm 1 \mod 10$; 2) $q = 11, 29 \mod 30$;
3) $p = 5$ и n нечетно; 4) $q = 3, 5, 13 \mod 14$.

Основной в статье является следующая редукционная теорема.

Теорема 2. *Верны рекуррентные соотношения:*

$$\varphi_2(G(q)) = \\ = |G(q)|^2 - |W| - |G(q)| \Bigg(\delta\varepsilon \cdot \sum_{GF(m)\subset GF(q)} \frac{\varphi_2(PGL_2(m)) + \varphi_2(PSL_2(m))}{|PGL_2(m)|} + \\ + \sum_{(GF(q):GF(m))|r} \frac{\varphi_2(G(m))}{|G(m)|} + \frac{\delta-1}{2} \cdot \sum_{3(GF(q):GF(m))|r} \frac{\varphi_2(\widehat{G}(m))}{|\widehat{G}(m)|} + \delta \cdot s(q) \Bigg),$$

$$\varphi_2(\widehat{G}(q)) = \\ = |\widehat{G}(q)|^2 - |\widehat{W}| - |\widehat{G}(q)| \Bigg(\varepsilon \sum_{GF(m)\subset GF(q)} \frac{\varphi_2(PGL_2(m)) + \varphi_2(PSL_2(m))}{|PGL_2(m)|} + \\ \sum_{(GF(q):GF(m))|r} \frac{\varphi_2(G(m)) + \varphi_2(\widehat{G}(m))}{|\widehat{G}(m)|} + s(q) \Bigg).$$

2. Подгрупповые описания

Унитарные группы определяются над полем F, обладающим инволютивным автоморфизмом $^{-}$. Если конечное поле F обладает инволютивным автоморфизмом, то его порядок является квадратом, $|F| = q^2$ $(q = p^n)$, а инволютивный автоморфизм определяется равенством $\overline{a} = a^q$.

По классическому определению, *общая унитарная группа* $U_n(q^2)$ есть подгруппа группы $GL_n(q^2)$, состоящая из $n \times n$-матриц M с условием $\overline{M}M^T = kI$ для всевозможных $k \in GF(q^2)^{\#}$, где I — единичная матрица. Её матрицы с определителем 1 образуют *специальную унитарную группу* $SU_n(q)$. Центр $Z(U_n(q))$ состоит из скалярных матриц λI с условием $\lambda^{q+1} = 1$. Факторизуя по центру, получаем проективные группы:

$$PU_n(q^2) := U_n(q^2)/Z(U_n(q^2)), PSU_n(q^2) := SU_n(q^2)/Z(U_n(q^2)) \cap SU_n(q^2).$$

См. также в [9, 1.4] определение специальной ортогональной группы $SO_3(q)$ и её коммутант $SO_3(q)' =: S\Omega_3(q)$.

Согласно [1], $SO_3(q) \simeq PGL_2(q)$.

Нам потребуется описание из [13, 12] подгрупп группы $G(q)$.

Пусть D обозначает подгруппу в $G(q)$, состоящую из образов матриц $\mathrm{diag}(a, a^{-2}, a)$ с условием $a^{3(q+1)} = 1$. Подгруппа D имеет индекс 3 в подгруппе $\widehat{D}$ группы $\widehat{G}(q)$, состоящей из образов матриц $\mathrm{diag}(a, b, a)$,

$a^{q+1} = b^{q+1}$. Централизатор прообраза D в группе $SU_3(q^2)$ изоморфен $U_2(q^2)$.

Напомним также, что группа Матье M_{10} содержит с индексом 2 подгруппу, изоморфную знакопеременной группе $\mathcal{A}_6$. Следующие две леммы несложно выводятся из работ Митчелла [13] и Хартли [12].

Лемма 1. *Максимальная подгруппа группы $G(q)$, имеющая неединичный разрешимый радикал, $\widehat{G}(q)$-сопряжена с одной из следующих подгрупп:*

а) нормализатор силовской p-подгруппы;

б) нормазизатор диагональной подгруппы порядка $(q+1)^2/\delta$;

в) нормализатор циклической подгруппы порядка $(q^2-q+1)/\delta$;

г) нормализатор самоцентрализуемой элементарной абелевой подгруппы порядка 9, когда $q \equiv 2 \mod 3$;

д) централизатор $C(D)$.

Лемма 2. *Если подгруппа группы $G(q)$ не лежит ни в одной из подгрупп а)-д) леммы 1, то она $\widehat{G}(q)$-сопряжена точно с одной из следующих подгрупп:*

а) при $(GF(q):GF(m))|r$ подгруппа $G(m)$;

б) при $GF(m) \subset GF(q)$, $p > 2$ подгруппа $SO_3(m)$ или $S\Omega_3(m)$;

в) при $3(GF(q):GF(m))|r$ нормализатор $N(G(m))$, содержащий $G(m)$ с индексом 3;

г) при $q = \pm 1 \mod 10$ подгруппа, изоморфная $\mathcal{A}_5$;

д) при $q = 11, 29 \mod 30$ подгруппа, изоморфная $\mathcal{A}_6$;

е) когда q — нечетная степень числа 5, подгруппа, изоморфная $\mathcal{A}_6$, $\mathcal{A}_7$ или M_{10};

ж) при $q = 3, 5, 13 \mod 14$ подгруппа, изоморфная $PSL_2(7)$.

Подгрупповое описание группы $\widehat{G}(q)$ даёт

Лемма 3. *Любая подгруппа группы $\widehat{G}(q)$ либо лежит в подгруппе с неединичным разрешимым радикалом или в $G(q)$, либо сопряжена $\widehat{G}(m)$, когда $(GF(q):GF(m)) \mid r$ и $3(GF(q):GF(m)) \nmid r$.*

Доказательство. Пусть H — подгруппа в $\widehat{G}(q)$, не входящая в $G(q)$. Тогда подгруппа $H_0 = H \cap G(q)$ нормальна в H и $|H : H_0| = 3$. Кроме того, подгруппа H изоморфна некоторой подгруппе группы $G(q^3)$.

Подгруппа из леммы 2, имеющая нормальную подгруппу индекса 3, изоморфна $\widehat{G}(m)$. Подгруппы группы $\widehat{G}(q)$, изоморфные $G(m)$, не имеют нормальных подгрупп индекса 3, так что они лежат в $G(q)$ и сопряжены в $\widehat{G}(q)$. Поэтому в $\widehat{G}(q)$ сопряжены и их нормализаторы, изоморфные $\widehat{G}(m)$. □

Для доказательства теоремы 2 также потребуется

Лемма 4. *В группе $C_{\widehat{G}(q)}(\widehat{D})$ нет подгрупп, изоморфных одной из следующих групп:*

$$\mathcal{A}_5 \text{ при } p \neq 5,\ \mathcal{A}_6 \text{ при } q \neq 9^k,\ PSL_2(7) \text{ при } p \neq 7,$$

$$PSL_2(q) \text{ и } PGL_2(q) \text{ при } p > 2,\ p \neq 5, p \neq 7, q \neq 9^k; \mathcal{A}_7,\ M_{10},\ G(q),\ \widehat{G}(q).$$

Доказательство. Пусть D' — подгруппа группы $G(q^3)$ проективных образов диагональных матриц $\mathrm{diag}(a, a^{-2}, a)$ с условием $a^{3(q^3+1)} = 1$. Поскольку группа $\widehat{G}(q)$ изоморфна подгруппе в $G(q^3)$, то группа $C_{\widehat{G}(q)}(\widehat{D})$ изоморфна подгруппе группы $C_{G(q^3)}(D')$. Поэтому достаточно доказать, что группа $C_{G(q)}(D)$ из $C_{\widehat{G}(q)}(\widehat{D})$ не содержит перечисленных в лемме подгрупп.

Группа $U_2(q^2)$, являющаяся проективным прообразом централизатора $C_{G(q)}(D)$, есть подгруппа группы $GL_2(q^2)$. Любая неразрешимая подгруппа H в $GL_2(q^2)$ имеет нормальное пересечение H_0 с $SL_2(q^2)$. Так как факторгруппа H/H_0 абелева, то H_0 — неразрешимая подгруппа, как и её проективный образ H_1 в $PSL_2(q^2)$. Подгрупповое описание группы $PSL_2(q^2)$ (например, [2]) показывает, что H_1 изоморфна либо $\mathcal{A}_5$ при $p = 5$ или $q = \pm 1 \mod 10$, либо $PSL_2(m)$, либо $PGL_2(m)$.

Остаётся заметить, что известные подгрупповые описания групп $GL_2(q)$ (например, [8, Теоремы 3.4–3.5]) показывают, что при нечетном q группа $GL_2(q^2)$ и её образ при гомоморфизме с ядром порядка 3 не содержат подгрупп, изоморфных $\mathcal{A}_5$, $PSL_2(m)$ или $PGL_2(m)$. □

3. Доказательство теоремы 2

Пусть R (аналогично, $\widehat{R}$) — множество пар элементов группы $G(q)$ (соответственно, $\widehat{G}(q)$), порождающих подгруппу в $G(q)$ (соответственно, $\widehat{G}(q)$), изоморфную одной из подгрупп а)-в) леммы 2, а S — множество пар элементов группы $G(q)$, порождающих подгруппу, изоморфную г)-ж) из леммы 2.

Лемма 5. *Для функции φ_2 на группах $G(q)$ и $\widehat{G}(q)$ верны равенства:*

$$\varphi_2(G(q)) = |G(q)|^2 - |S| - |R| - |W|, \quad \varphi_2(\widehat{G}(q)) = |\widehat{G}(q)|^2 - |S| - |\widehat{R}| - |\widehat{W}|.$$

Доказательство. По леммам 1, 2, 3, каждая пара элементов группы $G(q)$ (соответственно, $G(q)$), не порождающая $G(q)$ ($\widehat{G}(q)$), лежит хотя бы в одном из множеств R, S, W (соответственно, $\widehat{R}$, S, $\widehat{W}$). По определению, множество S не пересекается со множествами R и $\widehat{R}$.

Если подгруппа M группы $G(q)$ не лежит в $C(D)$ и имеет неединичный разрешимый радикал, то она разрешима. Также разрешима подгруппа $\widehat{M}$ группы $\widehat{G}(q)$, содержащая M как нормальную подгруппу с индексом 3. Поэтому M не содержит неразрешимых подгрупп из леммы 2. По лемме 4, подгруппы $C_{G(q)}(D)$ и $C_{\widehat{G}(q)}(\widehat{D})$ также не содержат подгрупп леммы 2. Следовательно, множества W и $\widehat{W}$ не пересекаются со множествами R, $\widehat{R}$, S. Лемма доказана. □

Заметим, что $N(\mathcal{A}_6) = M_{10}$, когда q есть нечетная степень числа 5. Остальные подгруппы г)-з) из леммы 2 самонормализуемы в $\widehat{G}(q)$.

Согласно Холлу [11],

$$\frac{\varphi_2(\mathcal{A}_5)}{|\mathcal{A}_5|} = 38, \quad \frac{\varphi_2(\mathcal{A}_6)}{|\mathcal{A}_6|} = 212, \quad \frac{\varphi_2(PSL_2(7))}{|PSL_2(7)|} = 114.$$

Используя лемму 2 и вычисленные с помощью [10] значения,

$$\frac{\varphi_2(M_{10})}{|M_{10}|} + \frac{\varphi_2(\mathcal{A}_7)}{|\mathcal{A}_7|} = 2300,$$

находим:

$$|S| = |\widehat{G}(q)| \left(\delta_1 \frac{\varphi_2(\mathcal{A}_5)}{|\mathcal{A}_5|} + \delta_2 \frac{\varphi_2(\mathcal{A}_6)}{|\mathcal{A}_6|} + \delta_4 \frac{\varphi_2(PSL_2(7))}{|PSL_2(7)|} + \right. \\ \left. \delta_3 \left(\frac{\varphi_2(\mathcal{A}_6) + \varphi_2(M_{10})}{2|\mathcal{A}_6|} + \frac{\varphi_2(\mathcal{A}_7)}{|\mathcal{A}_7|} \right) \right) = |\widehat{G}(q)| s(q).$$

Аналогичные рассуждения дают порядки множеств R и $\widehat{R}$ и завершают доказательство теоремы 2.

Автор благодарен научному руководителю профессору Левчуку Владимиру Михайловичу за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

1. Артин Э. Геометрическая алгебра / Э. Артин. – М. : Наука, 1969. – 285 с.

2. Бусаркин В. М. Конечные расщепляемые группы / В. М. Бусаркин, Ю. М. Горчаков. – М. : Наука, 1968. – 111 с.
3. Коуровская тетрадь (Нерешенные вопросы теории групп). – 15-е изд. – Новосибирск : ИМ СО РАН, 2002.
4. Левчук Д. В. Функции Ф. Холла на группах лиева типа ранга 1 / Д. В. Левчук // Владикавказ. мат. журн. – 2008. – Т. 10, вып. 1. – С. 37–39.
5. Левчук Д. В. Функции Эйлера – Холла на группах Ри / Д. В. Левчук, Ю. Ю. Ушаков // Сиб. мат. журн. – 2013. – Т. 56, вып. 2.
6. *Сучков Н. М.* О числе пар порождающих групп $L_2(2^m)$ и $Sz(2^{2k+1})$ / Н. М. Сучков, Д. М. Приходько // Сиб. мат. журн. – 2001. – Т. 42, вып. 5. – С. 1162–1167.
7. Ушаков Ю. Ю. Оценка функций Ф. Холла на группах лиева типа ранга 1 / Ю. Ю. Ушаков // Владикавказ. мат. журн. – 2012. – Т. 15. – Вып. 2. – С. 50–56.
8. Bloom D. The subgroups of PSL_3(q) for odd q / D. Bloom // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – Vol. 127 (1967), issue 1. – P. 150–178.
9. Carter R. W. Simple Groups of Lie Type / R. W. Carter. – London : John Wiley and Sons, 1972.
10. URL: http://www.gap-system.org.
11. Hall Ph. The Eulerian functions of a group / Ph. Hall // Quart. J. Math. – 1936. – Vol. 7. – P. 134–151.
12. Hartley R. W. Determination of ternary collineation groups whose coefficients lie in the field $GF(2^n)$ / R. W. Hartley // Annals of Maths. – 2nd series. – 1925. – Vol. 27, issue 2. – P. 140–158.
13. Mitchell H. H. Determination of the ordinary and modular ternary linear groups / H. H. Mitchell // Trans. Amer. Math. Soc. – 1911. – Vol. 12, issue 2. – P. 207–242.
14. Maroti A. A solution to a problem of Wiegold / A. Maroti, M. C. Tamburini // Comm. in Algebra. – 2013. – Vol. 41, issue 1. – P. 34–49.

Yu. Yu. Ushakov

The 2nd Euler – Hall function on groups of lie type of rank 1

Abstract. For the case of projective special unitary groups the Syskin problem of calculation of the 2nd Euler – Hall function is investigated.

Keywords: finite simple group; group of Lie type; Euler – Hall function.

Юрий Юрьевич Ушаков, аспирант, Институт математики, Сибирский федеральный университет, Красноярск, 660041, пр. Свободный, 79, тел. (391)2062076 (yushakov@sfu-kras.ru)

Yuriy Ushakov, Siberian Federal University, Krasnoyarsk, 660041, Svobodny pr., 79, Phone: (391)2062076 (yushakov@sfu-kras.ru)