Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 3. С. 158—170

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 517.9

О единственности решения обратной задачи Штурма–Лиувилля со спектральным параметром, рационально входящим в граничное условие

А. Е. Эткин, Г. П. Эткина
Ульяновский государственный университет

Аннотация. В статье рассматривается регулярная граничная задача для оператора Штурма–Лиувилля, одно из граничных условий которого содержит рациональную функцию спектрального параметра. Доказывается, что граничное условие и потенциал однозначно восстанавливаются по спектральным характеристикам.

Ключевые слова: обратные граничные задачи; оператор Штурма–Лиувилля; спектральный параметр в граничном условии; разложение по собственным и присоединенным функциям.

1. Введение

Применение метода разделения переменных к смешанным задачам для уравнений в частных производных, в которых дифференцирование по времени входит в граничные условия, приводит к граничным задачам со спектральным параметром в граничных условиях. Такие задачи довольно часто встречаются в математической физике: колебания струны с грузом на конце, крутильные колебания вала с маховиком на конце, колебания антенн, нагруженных сосредоточенными емкостями и индуктивностями, и др. (см. [5, с. 152]).

Граничные задачи со спектральным параметром в граничных условиях изучались во многих работах. Подробную библиографию и ссылки на приложения можно найти в работе [4]. Как было показано в работах А. В. Штрауса (см., например, [8],[9]), в случае, когда в граничные условия входит неванлинновская функция спектрального параметра, такая задача соответствует задаче на собственные значения самосопряженного расширения исходного симметрического оператора с выходом в более широкое гильбертово пространство. В работах Е. М. Руссаковского (см., например, [3],[4]) была рассмотрена граничная задача для оператора Штурма–Лиувилля с рациональным вхождением спектрального параметра в граничные условия. Как показано в этих работах, такая задача адекватна задаче на собственные значения некоторого J-самосопряженного оператора, действующего в пространстве Понтрягина Π_κ – конечномерном расширении исходного гильбертова пространства.

Обратной задаче восстановления оператора Штурма–Лиувилля по спектральным характеристикам посвящен ряд монографий (см., например, [2] и [12], где также имеется подробная библиография). Обратная задача со спектральным параметром в граничных условиях также интенсивно изучалась ([6],[7],[13],[11]). Общий случай обратной задачи с рациональной неванлинновской функцией спектрального параметра в граничном условии рассмотрен в работах [6],[7]. Другой подход к этой задаче дается в [11]. В настоящей работе рассмотрен случай произвольной рациональной функции спектрального параметра с вещественными коэффициентами.

2. Разложение по собственным и присоединенным функциям

Рассмотрим граничную задачу на $[0,\pi]$

$$-y'' + qy = \lambda y, \tag{2.1}$$

$$y'(0) = hy(0), \tag{2.2}$$

$$y'(\pi) = \theta(\lambda)y(\pi), \tag{2.3}$$

где q – вещественная функция, $q \in L^2(0,\pi)$, $h \in \mathbb{R}$, $\theta(\lambda)$ – рациональная функция спектрального параметра λ. Если $\theta(\lambda) = \frac{\theta_1(\lambda)}{\theta_2(\lambda)}$, где θ_1 и θ_2 – многочлены, не имеющие общих нулей, то условие (2.3) означает:

$$\theta_1(\lambda)y(\pi) - \theta_2(\lambda)y'(\pi) = 0. \tag{2.4}$$

При этом мы предполагаем, что многочлены θ_1 и θ_2 имеют вещественные коэффициенты.

Обозначим A – минимальный симметрический дифференциальный оператор, порожденный выражением $l[y] = -y'' + qy$ на отрезке $[0,\pi]$. Рассмотрим соответствующую граничную задачу, определяемую уравнением

$$-y'' + qy = \lambda y + f \tag{2.5}$$

и граничными условиями (2.2–2.3).

Решение этой задачи представляет собой ([10]) обобщенную резольвенту индекса κ оператора A $(y = R_\lambda f)$ в смысле следующего определения.

Определение 1. *(см. [14]) Пусть A – симметрический оператор в гильбертовом пространстве H, $\tilde{A}$ –некоторое его π-самосопряженное расширение в объемлющем пространстве Π_κ, P – ортопроектор в Π_κ на H. Расширение $\tilde{A}$ будем предполагать минимальным. Операторная функция R_z, определеная на резольвентном множестве $\rho(\tilde{A})$ оператора $\tilde{A}$ равенством $R_z := P(\tilde{A} - zI)^{-1}|_H$ называется обобщенной резольвентой индекса κ оператора A.*

Введем следующие обозначения: $u_1(x,\lambda), u_2(x,\lambda)$ – решения уравнения (2.1), удовлетворяющие начальным условиям:

$$u_1(0,\lambda) = 1, \quad u_1'(0,\lambda) = 0,$$

$$u_2(0,\lambda) = 0, \quad u_2'(0,\lambda) = 1.$$

Положим $u(x,\lambda) = u_1(x,\lambda) + hu_2(x,\lambda)$, т. е. u – решение уравнения (2.1), удовлетворяющее граничному условию (2.2):

$$u(0,\lambda) = 1, \quad u'(0,\lambda) = h.$$

Решая граничную задачу (2.5,2.2,2.3) методом вариации постоянных, получаем:

$$y(x,\lambda) = m(\lambda)u(x,\lambda)\tilde{f}(\lambda) - u(x,\lambda)\int_0^\pi f(t)u_2(t,\lambda)dt + \\ + \int_0^x (u_1(x,\lambda)u_2(t,\lambda) - u_2(x,\lambda)u_1(t,\lambda))f(t)dt, \quad (2.6)$$

где

$$\tilde{f}(\lambda) := \int_0^\pi f(x)u(x,\lambda)dx, \quad (2.7)$$

$$m(\lambda) = \frac{\theta_2(\lambda)u_2'(\pi,\lambda) - \theta_1(\lambda)u_2(\pi,\lambda)}{\theta_2(\lambda)u'(\pi,\lambda) - \theta_1(\lambda)u(\pi,\lambda)}. \quad (2.8)$$

Таким образом, $R_\lambda f$ – мероморфная функция, а полюса R_λ совпадают с полюсами $m(\lambda)$, т. е. собственными значениями задачи (2.1–2.3).

Из интегрального представления резольвенты через спектральную функцию (см. [1]) следует, что полная сумма вычетов мероморфной операторной функции $-R_\lambda$ равна единичному оператору. Учитывая, что последние два слагаемых в формуле (2.6) являются целыми функциями параметра λ, имеем:

$$f = -\sum ResR_\lambda f = -\sum Res(m(\lambda)u(x,\lambda)\tilde{f}(\lambda)), \quad (2.9)$$

где суммирование производится по всем собственным значениям задачи (2.1–2.3), а сходимость ряда понимается в смысле метрики $L_2(0,\pi)$.

Несложные преобразования показывают, что функция $m(\lambda)$ принадлежит классу $\mathbf{N}_k$ при некотором конечном k, т. е. ядро

$$K(\lambda,\mu):=\frac{m(\lambda)-\overline{m(\mu)}}{\lambda-\bar{\mu}}$$

имеет точно k отрицательных квадратов. (Определение класса функций $\mathbf{N}_k$ и описание их свойств см. в работе [14]). Отсюда следует, что все полюса функции $m(\lambda)$, за исключением конечного числа, вещественные и простые, а невещественные – попарно сопряжены и $m(\lambda)$ имеет следующее представление:

$$m(\lambda)=P(\lambda)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho_n}{\lambda_n-\lambda}+\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r_j}\frac{a_{jk}}{(\lambda-\alpha_j)^k}+ \\ +\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{s_j}\left(\frac{b_{jk}}{(\lambda-\beta_j)^k}+\frac{\bar{b}_{jk}}{(\lambda-\bar{\beta}_j)^k}\right), \quad (2.10)$$

где P – многочлен с вещественными коэффициентами, $\lambda_n\in\mathbb{R}$, $\alpha_j\in\mathbb{R}$, $a_{jk}\in\mathbb{R}$ $(n=0,1,2,...;\ j=1,...,p;\ k=1,...,r_j)$, все ρ_n, за исключением конечного числа, положительны.

Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Для любой функции $f\in L^2(0,\pi)$ имеет место разложение по собственным и присоединенным функциям задачи (2.1–2.3):*

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n\tilde{f}(\lambda_n)u(\cdot,\lambda_n)-\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=0}^{r_j-1}\frac{a_{j,k+1}}{k!}(\tilde{f}(\lambda)u(\cdot,\lambda))^{(k)}(\alpha_j)- \\ -\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{s_j-1}\frac{1}{k!}\left[b_{j,k+1}(\tilde{f}(\lambda)u(\cdot,\lambda))^{(k)}(\beta_j)+\bar{b}_{j,k+1}(\tilde{f}(\lambda)u(\cdot,\lambda))^{(k)}(\bar{\beta}_j)\right], \quad (2.11)$$

а также аналог равенства Парсеваля:

$$||f||^2=\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n|\tilde{f}(\lambda_n)|^2-\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=0}^{r_j-1}\frac{a_{j,k+1}}{k!}(|\tilde{f}|^2)^{(k)}(\alpha_j)- \\ -\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{s_j-1}\frac{1}{k!}\left[b_{j,k+1}(|\tilde{f}|^2)^{(k)}(\beta_j)+\bar{b}_{j,k+1}(|\tilde{f}|^2)^{(k)}(\bar{\beta}_j)\right] \quad (2.12)$$

Следующая теорема устанавливает связь вычетов функции $m(\lambda)$ в простых полюсах с нормировочными константами.

Теорема 2. *Справедливы следующие равенства:*

$$\rho_n = -\operatorname*{\mathit{Res}}_{\lambda_n}\ m(\lambda) = \frac{1}{\gamma_n},$$

где $\gamma_n = ||u(\cdot,\lambda_n)||^2 + \theta'(\lambda_n)u^2(\pi,\lambda_n)$ *– нормировочные константы.*

Доказательство. Обозначим $v_1(x,\lambda)$, $v_2(x,\lambda)$ – решения уравнения (2.1), удовлетворяющие начальным условиям в точке π:

$$v_1(\pi,\lambda) = 1, \quad v_1'(\pi,\lambda) = 0,$$

$$v_2(\pi,\lambda) = 0, \quad v_2'(\pi,\lambda) = 1$$

и положим $v(x,\lambda) := \theta_2(\lambda)v_1(x,\lambda) + \theta_1(\lambda)v_2(x,\lambda)$, т. е. $v(\pi,\lambda) = \theta_2(\lambda)$, $v'(\pi,\lambda) = \theta_1(\lambda)$ и, следовательно, $v(x,\lambda)$ при всех λ удовлетворяет граничному условию (2.3).

Определим функцию $\omega(\lambda) := u(x,\lambda)v'(x,\lambda) - u'(x,\lambda)v(x,\lambda)$. Она не зависит от λ, т. к. легко проверить, что ее производная тождественно равна 0 при $x \in [0,\pi]$. Следовательно, $\omega(\lambda) = u(\pi,\lambda)\theta_1(\lambda) - u'(\pi,\lambda)\theta_2(\lambda)$ – целая функция, лишь знаком отличающаяся от знаменателя $m(\lambda)$. Ее нули являются собственными значениями задачи (2.1–2.3). Т. к. каждому собственному значению λ_n соответствует одномерное собственное подпространство (это следует из единственности решения задачи Коши), то $\forall\lambda_n \exists k_n \neq 0 : v(x,\lambda_n) = k_n u(x,\lambda_n)$.

Из тождества

$$(\lambda - \lambda_n)\int_0^\pi v(x,\lambda)u(x,\lambda_n)dx = (v(x,\lambda)u'(x,\lambda_n) - v'(x,\lambda)u(x,\lambda_n))|_0^\pi =$$
$$= \omega(\lambda) + \frac{\theta_1(\lambda_n)\theta_2(\lambda) - \theta_1(\lambda)\theta_2(\lambda_n)}{k_n}$$

путем деления на $(\lambda - \lambda_n)$ и перехода к пределу при $\lambda \to \lambda_n$, получаем:

$$\omega'(\lambda_n) = k_n||u(\cdot,\lambda_n)||^2 + \frac{1}{k_n}\theta'(\lambda_n)\theta_2^2(\lambda_n) \tag{2.13}$$

Т. к.

$$\rho_n = -\operatorname*{Res}_{\lambda_n}\ m(\lambda) = \frac{\theta_2(\lambda_n)u_2'(\pi,\lambda_n) - \theta_1(\lambda_n)u_2(\pi,\lambda_n)}{\omega'(\lambda_n)},$$

то с учетом тождества $u(x,\lambda)u_2'(x,\lambda) - u'(x,\lambda)u_2(x,\lambda) = 1$ (при $x = \pi$, $\lambda = \lambda_n$) получаем: $\rho_n = \dfrac{k_n}{\omega'(\lambda_n)}$.

Отсюда, с учетом равенства (2.13) и $\theta_2(\lambda_n)/k_n = u(\pi,\lambda_n)$, получаем доказываемое равенство. □

3. Обратная задача

Рассмотрим теперь обратную задачу определения потенциала q и граничных условий (2.2) и (2.3), т. е. числа h и функции $\theta(\lambda)$ по спектральным характеристикам. При этом под спектральными характеристиками будем понимать собственные значения λ_n $(n=0,1,...)$, α_j $(j=1,...,p)$, $\beta_j,\bar{\beta}_j$ $(j=1,...,q)$ (т. е. полюса $m(\lambda)$) и соответствующие коэффициенты главных частей $m(\lambda)$ в этих точках: ρ_n, a_{jk}, b_{jk}. Обозначим $l=\sum\limits_{j=1}^{p} r_j + 2\sum\limits_{j=1}^{q} s_j$.

Теорема 3. *Простые вещественные собственные значения задачи (2.1–2.3) имеют следующую асимптотику:*

1) Если $\deg\theta_1 \le \deg\theta_2 = m$, *то*

$$\sqrt{\lambda_n} = n - m + l + \frac{c}{n} + \frac{\delta_n}{n}, \quad \{\delta_n\}\in l_2, \tag{3.1}$$

где

$$c=\frac{h+h_1-A_0}{\pi}, \quad h_1=\int_0^{\pi} q(\tau)d\tau, \quad A_0=\lim_{\lambda\to\infty}\theta(\lambda).$$

2) Если $\deg\theta_2 < \deg\theta_1 = m$, *то*

$$\sqrt{\lambda_n} = n - m + l + \frac{1}{2} + \frac{c}{n} + \frac{\delta_n}{n}, \quad \{\delta_n\}\in l_2, \tag{3.2}$$

где

$$c=\frac{h+h_1+A_1}{\pi}, \quad A_1=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda\theta_2(\lambda)}{\theta_1(\lambda)}.$$

Нормировочные коэффициенты $\rho_n=\gamma_n^{-1}$ *имеют асимптотику:*

$$\rho_n = \frac{2}{\pi} + \frac{\delta'_n}{n}, \quad \{\delta'_n\}\in l_2, \tag{3.3}$$

Доказательство. Обозначим $\lambda=s^2$.

1) Из известной асимптотики (см., например, [2], гл.I §2)

$$u(x,\lambda)=\cos sx + O(1/s), \quad u'(x,\lambda) = -s\sin sx + O(1)$$

получаем асимптотику $\omega(\lambda)$, нули которой являются собственными значениями задачи (2.1–2.3):

$$\omega(\lambda)=\theta_2(s^2)s\sin s\pi(1+O(1/s)).$$

Отсюда стандартным образом с применением теоремы Руше получаем асимптотику $s_n = n-m+l+O(1/n)$. Используя формулу (см. [2], лемма I.2.1)

$$u(x,\lambda)=\cos sx + \frac{h}{s}\sin sx + \frac{1}{s}\int_0^x \sin s(x-\tau)q(\tau)u(\tau,\lambda)d\tau, \tag{3.4}$$

получаем уточненную асимптотику $\omega(\lambda)$:

$$\omega(\lambda) = \sin s\pi \left(s\theta_2(s^2) + \frac{h+h_1}{s}\theta_1(s^2) + \theta_1(s^2)I_1(s) - \theta_2(s^2)I_2(s) \right) + \\ + \cos s\pi \left(\theta_1(s^2) - \theta_2(s^2)(h+h_1) - \frac{\theta_1(s^2)}{s}I_2(s) - \theta_2(s^2)I_1(s) \right), \quad (3.5)$$

где $I_1(s) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi q(t)\cos 2st dt + o(1/s)$, $I_2(s) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi q(t)\sin 2st dt + o(1/s)$.

Если $\deg\theta_1 \le \deg\theta_2$, то $\theta_1(\lambda)/\theta_2(\lambda) = A_0 + O(1/\lambda)$. Деля $\omega(\lambda)$ на $\theta_2(\lambda)$ и приравнивая к нулю, получаем:

$$\sin s\pi(s + o(1)) + \cos s\pi(A_0 - h - h_1 - I_1(s)) = 0,$$
$$\operatorname{tg} s\pi = \frac{h + h_1 - A_0}{s} - \frac{I_1(s)}{s},$$

откуда и следует асимптотическая формула (3.1).

Из формул (3.4) и (3.1) следует асимптотическая формула для собственных функций:

$$u(x,\lambda_n) = \cos(n-m+l)x + \frac{\beta(x)}{n}\sin(n-m+l)x + \frac{\varepsilon_n(x)}{n},$$

где $\beta(x) = -cx + h + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x q(\tau)d\tau$, $\quad \{\max\limits_{x\in[0,\pi]} |\varepsilon_n(x)|\} \in l_2$.

Отсюда получаем

$$\int_0^\pi u^2(x,\lambda_n)dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\mu_n}{n}, \quad \{\mu_n\} \in l_2. \quad (3.6)$$

При условии $\deg\theta_1 \le \deg\theta_2 \quad \theta'(\lambda) = O(1/\lambda^2)$, поэтому $\theta'(\lambda_n) = O(1/n^4)$. Учитывая ограниченность $u(\pi,\lambda_n)$, получаем формулу (3.3).

2) Пусть $\deg\theta_2 < \deg\theta_1$. Асимптотика $\omega(\lambda)$ в этом случае имеет вид $\omega(\lambda) = \theta_1(s^2)\cos s\pi(1 + O(1/s))$, откуда вытекает, что $s_n = n - m + l + 1/2 + O(1/n)$. Положим $\theta_2(\lambda)/\theta_1(\lambda) = A_1/\lambda + O(1/\lambda^2)$.

Приравнивая $\omega(\lambda)$ из формулы (3.5) к нулю, и деля обе части на $\theta_1(\lambda)$, получаем:

$$\sin s\pi \left(\frac{A_1 + h + h_1}{s} + \frac{I_1(s)}{s} \right) + \cos s\pi(1 + o(1/s)) = 0,$$
$$\operatorname{ctg} s\pi = -\frac{A_1 + h + h_1}{s} - \frac{I_1(s)}{s},$$

откуда следует асимптотическая формула (3.2).

В случае асимптотики собственных значений (3.2),

$$u(x,\lambda_n) = \cos(n-m+l+1/2)x + \frac{\beta(x)}{n}\sin(n-m+l+1/2)x + \frac{\varepsilon_n(x)}{n}$$

и также имеет место формула (3.6).

Однако, при условии $\deg\theta_1 > \deg\theta_2$, $\theta'(\lambda_n)$ может неограниченно возрастать. Поэтому для оценки второго слагаемого в формуле для γ_n, представим его в виде $\theta'(\lambda_n)/\theta(\lambda_n)\cdot u'(\pi,\lambda_n)u(\pi,\lambda_n)$. Заметим, что $\theta'(\lambda_n)/\theta(\lambda_n) = O(1/\lambda_n) = O(1/n^2)$.

Дифференцируя почленно (3.4) и используя асимптотику (3.2), получаем:

$$u'(x,\lambda_n) = -(n+m-l+1/2)\sin(n-m+l+1/2)x+ \\ +\beta(x)\cos(n-m+l+1/2)x+o(1).$$

Следовательно, $u'(\pi,\lambda_n)u(\pi,\lambda_n) = O(1)$ и формула (3.3) доказана. □

Лемма 1. $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} m(\lambda) = 0$ *и, следовательно, в представлении (2.10)* $P(\lambda)\equiv 0$.

Доказательство. Положим $s = it$, т. е. $\lambda = s^2 = -t^2$, и рассмотрим асимптотику $m(\lambda)$ при $t\to+\infty$, т. е. $\lambda\to-\infty$. Из формулы (3.4) получаем:

$$u(\pi,\lambda) = \frac{1}{2}e^{\pi t}(1+O(1/t)), \quad u'(\pi,\lambda) = \frac{1}{2}e^{\pi t}(t+h+h_1+O(1/t)).$$

Аналогично имеем:

$$u_2(\pi,\lambda) = \frac{e^{\pi t}}{2t}(1+O(1/t)), \quad u_2'(\pi,\lambda) = \frac{1}{2}e^{\pi t}(1+h_1+O(1/t)).$$

Отсюда при любом $\theta(\lambda)$ (как в случае $\deg\theta_1\le\deg\theta_2$, так и в случае $\deg\theta_1>\deg\theta_2$) имеем $m(\lambda) = O(1/t)$, т. е. $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} m(\lambda) = 0$. □

Далее будем для определенности считать, что $\deg\theta_1\le\deg\theta_2 = m$ (второй случай рассматривается аналогично).

Пусть задана последовательность пар чисел (λ_n,ρ_n) , удовлетворяющих соответственно условиям (3.1), (3.3). Тогда функция

$$a(x) := \sum_{n=m-l+1}^{\infty}(\rho_n\cos\sqrt{\lambda_n}x - \frac{2}{\pi}\cos(n-m+l)x) \tag{3.7}$$

принадлежит $W_2^1(0,2\pi)$ (см. [12], лемма 1.5.4).

Для упрощения записей в дальнейшем введем следующие обозначения:

$$L_{cc}(x,t) := \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=0}^{r_j-1}\frac{a_{j,k+1}}{k!}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}(cos\sqrt{\lambda}x\ cos\sqrt{\lambda}t)|_{\lambda=\alpha_j}+$$
$$+\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{s_j-1}\frac{1}{k!}\left[b_{j,k+1}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}(cos\sqrt{\lambda}x\ cos\sqrt{\lambda}t)|_{\lambda=\beta_j}+\right.$$
$$\left.+\bar{b}_{j,k+1}\frac{\partial^k}{\partial\lambda^k}(cos\sqrt{\lambda}x\ cos\sqrt{\lambda}t)|_{\lambda=\bar{\beta}_j}\right].$$

Аналогично L_{uc} (L_{uu}) будут использоваться для обозначения такого же выражения, в котором $\cos\sqrt{\lambda}x$ заменен на $u(x,\lambda)$ (соответственно, также и $\cos\sqrt{\lambda}t$ заменен на $u(t,\lambda)$).

Рассмотрим функцию

$$F(x,t) := \sum_{n=0}^{m-l}\rho_n cos\sqrt{\lambda_n}x\ cos\sqrt{\lambda_n}t - \frac{1}{\pi} - L_{cc}(x,t)+$$
$$+\sum_{n=m-l+1}^{\infty}\left(\rho_n cos\sqrt{\lambda_n}x\ cos\sqrt{\lambda_n}t - \frac{2}{\pi}cos(n-m+l)x\ cos(n-m+l)t\right). \tag{3.8}$$

Т. к. последнее слагаемое в формуле (3.8) имеет вид $(a(x+t)+a(x-t))/2$, то $F(x,t)$ непрерывна и $\frac{d}{dx}F(x,x) \in L_2(0,\pi)$.

Используя операторы преобразования ([2], [12]), можно записать равенства

$$u(x,\lambda) = cos\sqrt{\lambda}x + \int_0^x K(x,t)cos\sqrt{\lambda}t dt, \tag{3.9}$$

$$cos\sqrt{\lambda}x = u(x,\lambda) + \int_0^x H(x,t)u(t,\lambda)dt, \tag{3.10}$$

где $K(x,t)$ и $H(x,t)$ – вещественные непрерывные функции и

$$K(x,x) = h + \frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt. \tag{3.11}$$

Теорема 4. $\forall x \in (0,\pi]$ *ядро* $K(x,t)$ *удовлетворяет уравнению*

$$F(x,t) + K(x,t) + \int_0^x K(x,\tau)F(\tau,t)d\tau = 0, \quad 0 < t < x. \tag{3.12}$$

Доказательство. Введем следующие обозначения

$$C_N(x,t) := \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{N-m+l}\cos nx\cos nt, \tag{3.13}$$

$$\Phi_N(x,t) := \sum_{n=0}^{N} \rho_n u(x,\lambda_n) u(t,\lambda_n) - L_{uu}(x,t) - C_N(x,t), \tag{3.14}$$

$$F_N(x,t) := \sum_{n=0}^{N} \rho_n \cos\sqrt{\lambda_n}x \cos\sqrt{\lambda_n}t - L_{cc}(x,t) - C_N(x,t). \tag{3.15}$$

Тогда $\forall f \in L_2(0,\pi)$ в смысле сходимости почти всюду имеют место следующие равенства:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f(t) C_N(x,t)dt = f(x), \tag{3.16}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f(t) \Phi_N(x,t)dt = 0, \tag{3.17}$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f(t) F_N(x,t)dt = \int_0^\pi f(t) F(x,t)dt. \tag{3.18}$$

Из равенств (3.9) и (3.10) вытекают соответственно:

$$\sum_{n=0}^{N} \rho_n u(x,\lambda_n) \cos\sqrt{\lambda_n}t - L_{uc}(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \rho_n \cos\sqrt{\lambda_n}x \cos\sqrt{\lambda_n}t +$$
$$+ \sum_{n=0}^{N} \rho_n \cos\sqrt{\lambda_n}t \int_0^x K(x,\tau)\cos\sqrt{\lambda_n}\tau d\tau - L_{cc}(x,t) - \int_0^x K(x,\tau) L_{cc}(t,\tau)d\tau, \tag{3.19}$$

$$\sum_{n=0}^{N} \rho_n u(x,\lambda_n) \cos\sqrt{\lambda_n}t - L_{uc}(x,t) = \sum_{n=0}^{N} \rho_n u(x,\lambda_n) u(t,\lambda_n) +$$
$$+ \sum_{n=0}^{N} \rho_n u(x,\lambda_n) \int_0^t H(t,\tau) u(\tau,\lambda_n)d\tau - L_{uu}(x,t) - \int_0^x H(x,\tau) L_{uu}(t,\tau)d\tau. \tag{3.20}$$

Приравнивая правые части равенств (3.19) и (3.20), получаем

$$\Phi_N(x,t) = F_N(x,t) + \int_0^x K(x,\tau) F_N(t,\tau)d\tau + \int_0^x K(x,\tau) C_N(t,\tau)d\tau -$$
$$- \int_0^t \Phi_N(x,\tau) H(t,\tau)d\tau - \int_0^t C_N(x,\tau) H(t,\tau)d\tau. \tag{3.21}$$

Умножим обе части последнего равенства на $f(t)$, проинтегрируем по отрезку $[0,\pi]$ и перейдем к пределу при $N \to \infty$. Учитывая равенства

(3.16–3.18), а также:

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi(\int_0^x K(x,\tau)F_N(t,\tau)d\tau)f(t)dt=\int_0^\pi(\int_0^x K(x,\tau)F(t,\tau)d\tau)f(t)dt,$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi\left(\int_0^x K(x,\tau)C_N(t,\tau)d\tau\right)f(t)dt=\int_0^x K(x,\tau)f(\tau)d\tau,$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi\left(\int_0^t \Phi_N(x,\tau)H(t,\tau)d\tau\right)f(t)dt=$$
$$=\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi\left(\int_\tau^\pi f(t)H(t,\tau)d\tau\right)\Phi_N(x,\tau)d\tau=0,$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi\left(\int_0^t C_N(x,\tau)H(t,\tau)d\tau\right)f(t)dt=$$
$$=\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi\left(\int_\tau^\pi f(t)H(t,\tau)d\tau\right)C_N(x,\tau)d\tau=\int_x^\pi f(t)H(t,x)dt$$

и полагая $K(x,t)=H(x,t)=0$ при $x<t$, получим:

$$F(x,t)+\int_0^x K(x,\tau)F(t,\tau)d\tau+K(x,t)-H(t,x)=0.$$

Т. к. $t<x$, то $H(t,x)=0$ и равенство (3.12) доказано. □

Лемма 2. $\forall x\in(0,\pi]$ *уравнение (3.12) имеет единственное решение* $K(x,t)\in L^2(0,x)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что однородное уравнение

$$g(t)+\int_0^x F(\tau,t)g(\tau)d\tau=0 \tag{3.22}$$

имеет только тривиальное решение $g(t)\equiv 0$.

Пусть $g(t)$ – решение уравнения (3.22) и $g(t)=0$ при $t\in(x,\pi)$. Тогда

$$\int_0^x|g(t)|^2dt+\int_0^x\int_0^x F(\tau,t)g(\tau)\overline{g(t)}d\tau dt=0.$$

Учитывая равенство (3.8) и равенство Парсеваля, имеем:

$$\sum_{n=0}^\infty\rho_n|\tilde g_c(\lambda_n)|^2-\sum_{j=1}^p\sum_{k=0}^{r_j-1}\frac{a_{j,k+1}}{k!}(|\tilde g_c|^2)^{(k)}(\alpha_j)-$$
$$-\sum_{j=1}^q\sum_{k=0}^{s_j-1}\frac{1}{k!}\left[b_{j,k+1}(|\tilde g_c|^2)^{(k)}(\beta_j)+\bar b_{j,k+1}(|\tilde g_c|^2)^{(k)}(\bar\beta_j)\right]=0, \tag{3.23}$$

где использовано обозначение

$$\tilde{g}_c(\lambda) := \int_0^\pi g(t)cos\sqrt{\lambda}tdt.$$

В соответствии с равенством (3.10), $cos\sqrt{\lambda}t = (I + H)u(t,\lambda)$, где H обозначен соответствующий интегральный оператор с ядром $H(x,t)$. Поэтому $\tilde{g}_c(\lambda)$ представляет собой u-преобразование Фурье (в соответствии с формулой (2.7)) функции $(I + H^*)g$. Следовательно, в соответствии с равенством (2.12), имеем $||(I + H^*)g|| = 0$, т. е. $g = 0$. □

Теорема 5. *Пусть* $P(q,h,\theta)$ *и* $P(\tilde{q},\tilde{h},\tilde{\theta})$ *– две граничные задачи вида (2.1–2.3) и их спектральные характеристики совпадают:*

$$\lambda_n = \tilde{\lambda}_n,\ \rho_n = \tilde{\rho}_n\ (n = 0,1,...),$$
$$\alpha_j = \tilde{\alpha}_j,\ r_j = \tilde{r}_j,\ a_{jk} = \tilde{a}_{jk}\ (j = 1,...,p;\ k = 1,...,r_j),$$
$$\beta_j = \tilde{\beta}_j,\ s_j = \tilde{s}_j,\ b_{jk} = \tilde{b}_{jk}\ (j = 1,...,q;\ k = 1,...,s_j).$$

Тогда $q(x) = \tilde{q}(x)$ *почти всюду на* $(0,\pi),\ h = \tilde{h},\ \theta(\lambda) = \tilde{\theta}(\lambda)$.

Доказательство. Согласно формуле (3.8) $F(x,t) = \tilde{F}(x,t)$. Из уравнения (3.12) и леммы 2 получаем $K(x,t) = \tilde{K}(x,t)$. Из равенства (3.11) теперь следует, что $h = \tilde{h}$ и $q(x) = \tilde{q}(x)$ почти всюду на $(0,\pi)$. Следовательно, $u_2(x,\lambda) = \tilde{u}_2(x,\lambda)$, $u(x,\lambda) = \tilde{u}(x,\lambda)$. Из равенства (2.10) и леммы 1 следует, что $m(\lambda) = \tilde{m}(\lambda)$, а из равенства (2.8) получаем, что $\theta(\lambda) = \tilde{\theta}(\lambda)$. □

Список литературы

1. Крейн М. Г. О спектральной функции самосопряженного оператора в пространстве с индефинитной метрикой / М. Г. Крейн, Г. К. Лангер // Докл. АН СССР. – 1963. – Т. 152, № 1. – С. 39–49.
2. Левитан Б. М. Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака / Б. М. Левитан, И. С. Саргсян. – М. : Наука, 1988. – 432 с.
3. Руссаковский Е. М. Операторная трактовка граничной задачи со спектральным параметром, полиномиально входящим в граничные условия / Е. М. Руссаковский // Функц. анализ и его прил. – 1975. – Т. 9, вып. 4. – С. 91–92.
4. Руссаковский Е. М. Матричная задача Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях. Алгебраический и операторный аспекты / Е. М. Руссаковский // Тр. Моск. матем. общества. – 1996. – Т. 57. – С. 171–198.
5. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М. : Наука, 1977.
6. Чугунова М. В. Обратная задача на конечном интервале / М. В. Чугунова // Функц. анализ. – Ульяновск, 1994. – Вып. 35. – С. 113–122.
7. Чугунова М. В. Эффективные способы решения некоторых обратных задач / М. В. Чугунова // Функц. анализ. – Ульяновск, 1997. – Вып. 36. – С. 66–74.

8. Штраус А. В. О разложении по собственным функциям одной краевой задачи второго порядка на полуоси / А. В. Штраус // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1956 – Т. 20, № 6. – С. 783–792.
9. Штраус А. В. О спектральных функциях дифференциального оператора четного порядка / А. В. Штраус // Докл. АН СССР. – 1957. – Т. 115, № 1. – С. 67–70.
10. Эткин А. Е. О некоторых краевых задачах со спектральным параметром в краевых условиях / А. Е. Эткин // Функц. анализ. – Ульяновск, 1982. – Вып. 18. – С. 138–146.
11. Binding P. A. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville equations with eigenparameter dependent boundary conditions / P. A. Binding, P. J. Browne, B. A. Watson // J. London Math. Soc. – 2000. – Vol. 62 – P. 161–182.
12. Freiling G. Inverse Sturm–Liouville Problems and their Applications / G. Freiling, V. A. Yurko. – N. Y., 2001. – 305 p.
13. Gulijev N. J. Inverse eigenvalue problems for Sturm–Liouville equations with spectral parameter linearly contained in one of the boundary conditions / N. J. Gulijev // Inverse Problems. – 2005. – Vol. 21, N 4.
14. Krein M. G. Über einige Forsetzungsprobleme die eng mit der Theorie hermitescher Operatoren im Raume Π_κ zusammenhangen, II: Verallgemeinerte Resolventen, u-Resolventen und ganze Operatoren / M. G. Krein, H. Langer // J. Funct. Anal. – 1978. – Vol. 30, N 3. – P. 390–447.

A. E. Atkin, G. P. Atkina

A uniqueness theorem for Sturm–Liouville equations with a spectral parameter rationally contained in the boundary condition

Abstract. In this paper we consider regular boundary value problem for the Sturm-Liouville operator with the eigenvalue parameter rationally contained in the bounary condition. It is shown that the potential and the boundary conditions are uniquely reconstructs on the spectral characteristics.

Keywords: inverse boundary value problem; Sturm-Liouville operator; spectral parameter in boundary conditions; expansion in eigen- and adjoint functions.

Эткин Анатолий Ефимович, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт экономики и бизнеса, Ульяновский государственный университет, 432970, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42, тел.: (8422)426103 (aetkin@mail.ru)

Эткина Галина Петровна, ст. преподаватель, Институт экономики и бизнеса, Ульяновский государственный университет, 432970, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42, тел.: (8422)426103 (aetkin@mail.ru)

Atkin Anatoly, Ulyanovsk State University, 42, L. Tolstoy St., Ulyanovsk, 432970, docent, Phone: (8422)426103 (aetkin@mail.ru)

Atkina Galina, Ulyanovsk State University, 42, L. Tolstoy St., Ulyanovsk, 432970, senior teacher, Phone: (8422)426103 (aetkin@mail.ru)