Серия «Математика»
2011. Т. 4, № 2. С. 6—15

Онлайн-доступ к журналу:
http://isu.ru/izvestia

ИЗВЕСТИЯ
Иркутского
государственного
университета

УДК 519.85

Развитие методов оптимизации в работах В. П. Булатова *

О. В. Хамисов
Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева

Аннотация. Статья посвящена описанию основных результатов В. П. Булатова в области математического программирования.

Ключевые слова: методы отсеченй; чебышёвские точки; глобальная оптимизация; системы нелинейных уравнений.

1. Введение

Главной областью интересов Валерьяна Павловича Булатова являлись методы оптимизации и их приложения. За долгий период интенсивной работы с 1966 по 2010 годы им опубликовано большое количество статей и монографий по различным направлениям в оптимизации, начиная с линейного программирования и заканчивая игровыми задачами и оптимальным управлением. Вклад В. П. Булатова в теорию и методы оптимизации, естественно, не везде равнозначен. В статье представлены результаты, которые в первую очередь он сам считал главными. К этим результатам относятся методы погружения без вложения в выпуклом программировании, методы центрированных сечений в линейном и выпуклом программировании, методы отсечений в глобальной оптимизации. Проходит время и некоторые результаты В. П. Булатова, приобретают большую значимость, чем 30 или 40 лет назад. Это методы локального поиска в задачах "с дырой"[1] фактически являвшихся прообразом задач обратно-выпуклого программирования, методы внутренней аппроксимации в задаче глобальной минимизации вогнутой функции на выпуклом многограннике и методы нахождения всех решений систем

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 09–01–00307.

[1] Терминология В. П. Булатова

нелинейных уравнений. Кроме того, по образному выражению А. А. Колоколова, В. П. Булатов, оставаясь главным специалистом в глобальной оптимизации, "совершал набеги" в целочисленное программирование, оптимальное управление и в такие области исследования операций, как обратные задачи оптимизации и поиск равновесия по Нэшу.

В статье в сжатом виде описаны идеи (как самое ценное) В. П. Булатова, лежащие в основе тех или иных методов и алгоритмов. По мере возможности я постарался передать оценку Валерьяном Павловичем своих главных результатов, основываясь на нашем личном многолетнем общении, а также добавить к ним и ещё некоторые другие (важные уже с моей, субъективной точки зрения), незаслуженно забытые.

2. Выпуклое программирование

2.1. Метод опорного конуса

Рассмотрим задачу минимизации выпуклой функции на выпуклом многограннике. Одним из первых методов решения этой задачи был метод секущих плоскостей Келли [26]. Надграфик целевой функции представим в виде пересечения полупространств, образованных опорными к целевой функции аффинными функциями. Идея метода Келли, основанная на этом свойстве, состояла в сведении исходной задачи выпуклого программирования к последовательности задач линейного программирования. Основное применение этот метод находит в задачах с так называемым острым минимумом. От итерации к итерации в методе происходит накапливание линейных ограничений, что неэффективно с вычислительной точки зрения. В. П. Булатов был одним из первых, кто стал исследовать вопрос о возможном отбрасывании неактивных вспомогательных линейных ограничений с сохранением свойства сходимости. Подробное рассмотрение этой проблемы приведено в его кандидатской диссертации [2], защищённой 1967 году (см. также [1] и [3]). Аналогичные результаты были опубликованы Д. М. Топкисом в 1970 году [27]. В дальнейшем, исследование метода секущих плоскостей без вложения привело к разработке метода опорного конуса [4] и различных его модификаций, а в 1991 году его учеником, П. Т. Семенеем (ИСЭМ СО РАН) была защищена кандидатская диссертация, которая была посвящена не только исследованию одной из эффективных вычислительных схем метода опорного конуса, но и приложению этого метода в прикладных задачах энергетики.

2.2. Методы чебышёвских центров

Методы чебышёвских центров и симплексных погружений принадлежат к так называемому классу методов центрированных сечений. Неформально, такие методы можно представлять как обобщение метода деления отрезка пополам на многомерный случай. Середину отрезка заменяет центральная (в некотором смысле) точка выпуклого множества. Для выпуклого многогранника с непустой внутренностью

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \le b\},$$

где A – $m \times n$ матрица, $b \in \mathbb{R}^m$, центральную точку можно определить, решая вспомогательную задачу линейного программирования

$$x_{n+1} \to \min,$$

$$Ax - b \le ex_{n+1},$$

$e = (1, ..., 1)^T$ – вектор, состоящий из m единиц. Пусть x^0 – центральная точка, а f – выпуклая дифференцируемая функция, которую нужно минимизировать на множестве X. В силу выпуклости f, (отсекающее) полупространство

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \nabla f(x^0)^T(x - x^0) > 0\}$$

не содержит точки минимума x^*. Следовательно, далее можно рассматривать многогранник $X \setminus H$, найти его центральную точку и т. д. Итеративные процедуры, подобные данной, также были рассмотрены В. П. Булатовым в [2]. В дальнейшем, оставаясь в рамках такой конструкции, стали нормировать линейные ограничения, т. е. переходить от a^i к $\frac{a^i}{\|a^i\|}$, $a^i, i = 1, \ldots, m$ – строки матрицы A. В этом случае центральная точка называется чебышёвской и представляет собой центр шара максимального радиуса, вписанного в X.

Вычислительные процедуры, основанные на использовании чебышёвских точек, особенно эффективны в задачах минимизации «пологих» функций, связанных, например, с задачами стохастического программирования. Вместо евклидовой нормы можно использовать другие, что приводит, например, к вписыванию в X многомерного куба максимального объёма. Данная тематика подробно рассматривалась в кандидатской диссертации Т. И. Белых (БГУЭП), защищённой под руководством В. П. Булатова.

2.3. Метод симплексных погружений

Самым главным достижением в области методов выпуклого программирования Валерьян Павлович считал метод симплексных погружений [6]. Метод имеет интересную предысторию, нестандартную историю разработки и в высшей степени нетривиальную оценку сходимости, полученную Евгением Георгиевичем Анциферовым, результат, который остаётся не в полной мере оцененным и в настоящее время.

В 1980 году в одной из передач «Очевидное-невероятное» рассказывалось о революционном результате Л. Г. Хачияна, доказавшем полиномиальную разрешимость задач линейного программирования. В. П. Булатов, узнав об этом, пригласил Л.Г. Хачияна на очередную Байкальскую школу по методам оптимизации с пленарным докладом. Выступление Л. Г. Хачияна произвело сильное впечатление. Необходимо отметить, что в его работе использовался метод эллипсоидов. В этом методе допустимое множество погружается в эллипсоид минимального объёма, центр которого служит центральной точкой и отсекающее полупространство порождается плоскостью, проходящей через эту центральную точку, затем вся процедура повторяется снова. Сходимость метода гарантирует принцип сокращения объёмов локализующих эллипсоидов: усечённый эллипсоид можно погрузить в новый эллипсоид меньшего объёма. После школы трое сотрудников ИСЭМ СО РАН И. А. Александров, Е. Г. Анциферов и В.П. Булатов собрались в кабинете Валерьяна Павловича и стали обсуждать следующий вопрос: нельзя ли эллипсоиды заменить другим геометрическим объектом? Идея В. П. Булатова состояла в рассмотрении симплексов (центральная точка – центр тяжести вершин симплекса). Однако сначала попытались использовать параллелепипеды, что казалось естественным и очевидным, но обнаружился контрпример. Пусть $n = 2$. Если отсекающая полуплоскость генерируется диагональю прямоугольника, то оставшуюся после отсечения часть прямоугольника (треугольник) *нельзя* погрузить в другой прямоугольник (не обязательно параллельный осям координат), имеющий площадь меньшую, чем исходный, т.е. не соблюдается принцип сокращения объёма. Вернулись к симплексам, контрпримеров не обнаружилось. Разгорелся дух соперничества: кто первый построит процедуру погружения усечённого симплекса в симплекс меньшего объёма и получит соответствующую оценку сокращения объёмов, подобную той, что есть в методе эллипсоидов. С этим и разошлись по домам. На следующий день все трое решили эту задачу и получили необходимые оценки. Оценки И. А. Александрова и В. П. Булатова совпали, а вот оценка Е. Г. Анциферова была весьма нестандартной. Сравним все оценки. Оценка сокращения объёмов в методе эллипсоидов

$$q_e = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} < 1,$$

оценка сокращения объёмов в методе симплексных погружений, полученная И.А. Александровыи и В.П. Булатовым

$$q_s = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} < 1,$$

оценка Е.Г. Анциферова

$$q_s^* = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} < 1,$$

где k – число неотсечённых вершин симплекса ($2 \leq k \leq n$). При $k = 1$ сохранённая часть симплекса – симплекс и поэтому не требуется процедуры погружения. Нетрудно видеть, что $q_e < q_s$. А вот процедура погружения усечённого симплекса в симплекс минимального объёма построенная Е. Г. Анциферовым – конструкция более тонкая. Оценка q_s^* зависит от текущей геометрической ситуации, чем больше вершин отсекается, тем оценка лучше. При $k \leq \frac{n}{2}$ имеем $q_s^* \leq q_e$. Данное свойство послужило основой для разработки различных модификаций метода симплексных погружений. В 1995 году Е. В. Апекиной (ИСЭМ СО РАН) под руководством В. П. Булатова была защищена кандидатская диссертация, посвящённая модификации метода симплексных погружений с одновременным введением нескольких секущих плоскостей, основу которой составила оценка Е. Г. Анциферова.

В дальнейшем В. П. Булатов неоднократно возвращался к методам центрированных отсечений в выпуклом программировании и их модификациям [8], [10], [13], [15], [19]-[22].

3. Глобальная оптимизация

3.1. Методы отсечений

Методы отсечений – главная тема исследований В. П. Булатова в работах по оптимизации. В области глобальной оптимизации необходимо отметить его результаты, связанные с модификациями отсечений Х. Туя, используемыми в задаче глобальной минимизации вогнутой функции на выпуклом многограннике. Здесь В. П. Булатовым выдвинуты две идеи: отсечения второго порядка [23] и отсечения в $\mathbb{R}^{n+1}$ [9]. Хорошо известно, что с ростом размерности задачи отсечения в чистом виде становятся малоэффективными. Учитывая этот факт В. П. Булатов предложил объединить методы ветвей и границ с методами отсечений. Наша совместная статья [24] была одной из первых в этом направлении.

Применение отсечений в $\mathbb{R}^{n+1}$ не только в задачах вогнутого программирования, но и для более широкого класса задач потребовало введения нового класса функций. В 1984 году В. П. Булатов ввел в рассмотрение функции, имеющие вогнутую опорную миноранту в каждой точке допустимого множества. Исследование свойств таких функций и методов их глобальной минимизации стало темой моей кандидатской диссертации (см. также [18]), защищённой в 1993 году под руководством В. П. Булатова, а также и докторской, защищённой в 2010 году.

3.2. Методы локального поиска

В своей главной монографии [4] В. П. Булатов рассматривал так называемые «задачи с дырой». В таких задачах требуется минимизировать выпуклую функцию на множестве, заданном системой неравенств с выпуклыми и вогнутыми функциями в левых частях. Для нахождения локального оптимума была разработана методика, сводящая исходную задачу к последовательности задач выпуклого программирования. Идея, лежащая в основе предложенной методики состояла в следующем. На каждой итерации все выпуклые функции остаются без изменения, а вогнутые функции линеаризуются в текущей точке. Оптимальное решение получившейся задачи выпуклого программирования является следующим приближением к точке локального оптимума. В [4] исследуются соответствующие вопросы сходимости.

Данная методика затем нашла оригинальное воплощение в задаче нахождения корней системы нелинейных уравнений с выпуклыми функциями в левых частях [11], [12], [16]. Оригинальность идеи в упрощённом виде проиллюстрируем на следующем примере. Пусть требуется найти корень системы уравнений

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, i = 1, \dots, n,$$

$g_i(x)$ – выпуклые дифференцируемые функции. Найдём локальное решение x^* следующей задачи "с дырой"

$$\sum_{i=1}^{n} g_i(x) \to \min,$$

$$g_i(x) \geq 0, i = 1, \dots, n.$$

В силу необходимых условий оптимальности

$$\sum_{i=1}^{n} (1 - \lambda_i^*) \nabla g_i(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, n.$$

Если градиенты $\nabla g_i(x^*)$ линейно независимы, то $\lambda_i^* = 1$ и в силу условия дополняющей нежёсткости $g_i(x^*) = 0, i = \dots, n$, т.е. x^* – искомый корень. Развитию этих идей была посвящена кандидатская диссертация Т. И. Алексеевой (ИрГУПС), также защищённая под руководством В. П. Булатова.

3.3. Методы внутренней аппроксимации

Задача глобальной минимизации вогнутой функции на многограннике была одним из главных объектов исследования В. П. Булатова. На первый взгляд данная задача представляет собой весьма частный случай задачи глобальной оптимизации. Более того, известно, что глобальный минимум достигается в одной из вершин многогранника. Казалось бы и теоретического интереса такая задача не представляет. Возникают трудности практического решения таких задач. Число вершин растёт экспоненциально с ростом числа переменных. Перебор вершин лежит за пределами существующих вычислительных возможностей. Необходимость создания эффективного метода решения задачи вогнутого программирования заключается в том, что практически почти все задачи глобальной оптимизации либо представляют собой некоторые скрытые задачи вогнутого программирования, либо могут быть сведены к решению последовательности задач вогнутого программирования. Задача вогнутого программирования играет такую же роль в глобальной оптимизации, какую играет задача линейного программирования в выпуклом программировании. Эффективной (непереборной) методики решения задач вогнутого программирования с гарантированным доказательством глобальной оптимальности найденного решения не существует до сих пор. Перебор обойти не удаётся, но его можно существенно сократить, хотя бы для задач не очень большой размерности. В работах [5] и [7] В. П. Булатовым совместно с Л. И. Касинской (которая также защитила кандидатскую диссертацию под руководством В. П. Булатова) была описана методика нахождения глобального минимума вогнутой функции на многограннике, основанная на так называемой внутренней многогранной аппроксимации. Хорошо известно, что в точке глобального минимума множество уровня (или множество Лебега) целевой функции содержит допустимый многогранник. В методе внутренней аппроксимации множество уровня аппроксимируется многогранником изнутри, затем решается ряд вспомогательных задач линейного программирования, что приводит либо к улучшению текущего рекорда, либо к уточнению внутренней аппроксимации. Метод останавливается, когда внутренний многогранник содержит допустимый, что доказывает глобальную оптимальность текущего рекорда.

4. Заключение

Невозможно, даже и в более представительной статье детально описать главные результаты В. П. Булатова, полученные почти за 60 лет его исследовательской деятельности, связанной с развитием и приложениям методов оптимизации. Не упомянутыми остались его работы в области целочисленного программирования, теории игр, обратных задач оптимизации и оптимального управления. Помимо монографии [4], результаты этих исследований можно найти в статьях приведённых в списке литературы. Указаны не все кандидатские диссертации, защищённые под руководством В. П. Булатова. Мы упоминали в основном те диссертации, которые хорошо нам знакомы. Неоспорим один факт: работы Валерьяна Павловича Булатова оказали существенное влияние на развитие теории методов оптимизации и у нас в стране, и за рубежом; он впервые выдвинул ряд оригинальных идей, актуальность которых сохраняется и сейчас.

Список литературы

1. Булатов В. П. О некоторых методах аппроксимации для задач выпуклого программирования/ В. П. Булатов // Методы математического моделирования в энергетике. – Иркутск : СЭИ, 1966.
2. Булатов В. П. Метод аппроксимации при решении некоторых экстремальных задач : автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук / В. П. Булатов. – Томск : ТГУ, 1967.
3. Булатов В. П. Метод аппроксимации для решения некоторых задач математического программирования/ В. П. Булатов // Приклад. математика. – Иркутск : ИГУ, 1969. – С. 82–88.
4. Булатов В. П. Методы погружения в задачах оптимизации / В. П. Булатов. – Новосибирск : Наука, 1977.
5. Булатов В. П. Об одной интерпретации метода Х. Туя решения задач вогнутого программирования / В. П. Булатов, Л. И. Касинская // Приклад. математика. – Иркутск : СЭИ, 1978. – С. 206–208.
6. Булатов В. П. К методам центрированных сечений / И. А. Александров, Е. Г. Анциферов, В. П. Булатов // Тез. докл. конф. по мат. программированию. – Свердловск, 1981. – С. 72–73.
7. Булатов В. П. Некоторые методы минимизации вогнутой функции на выпуклом многограннике / В. П. Булатов, Л. И. Касинская // Методы оптимизации и их приложения. – Наука : Новосибирск, 1982. – С. 71–80.
8. Булатов В. П. Метод центров тяжести ортогональных симплексов для решения задачи выпуклого программирования / В. П. Булатов, И.О. Шепотько // Методы оптимизации и их приложения. – Иркутск : СЭИ, 1982. – С. 79–86.
9. Методы решения задач математического программирования и оптимального управления / Л. Т. Ащепков, Б. И. Белов, В. П. Булатов, О. В. Васильев, В. А. Срочко, Н. В. Тарасенко. – Наука : Новосибирск, 1984. – 233 с.
10. Булатов В. П. Алгоритм симплексных погружений в выпуклом программировании / Е. Г. Анциферов, В. П. Булатов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1984. – Т. 27, вып. 3. – С. 348–385.
11. Булатов В. П. Глобальная оптимизация и численные методы поиска всех решений систем нелинейных алгебраических уравнений / В. П. Булатов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2000. – Т. 40, вып. 3. – С. 348–355.

12. Булатов В. П. Вогнутое программирование и численные методы поиска вещественных решений нелинейных систем / В. П. Булатов, Т. И. Белых // Докл. РАН. – 2001. – Т. 376, № 2. – С. 171–174.
13. Булатов В. П. Об одном методе симплексных погружений в выпуклом программировании / Т. И. Белых, В. П. Булатов // Докл. РАН. – 2001. – Т. 376, № 3. – С. 315–317.
14. Булатов В. П. Обратные задачи математического программирования. Методы глобальной оптимизации / В. П. Булатов // Докл. РАН. – 2001. – Т. 376, № 4. – С. 461–464.
15. Булатов В. П. Об одном эффективном методе выпуклого программирования / В. П. Булатов, Н. И. Федурина // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. – 2004. – Т. 11, № 1. – С. 51–61.
16. Булатов В. П. Глобальная оптимизация и методы нахождения всех корней систем нелинейных алгебраических уравнений / В. П. Булатов, Т. И. Белых // Дискрет. анализ и исслед. операций. Сер. 2. – 2006. – Т. 13, № 1. – С. 3–9.
17. Булатов В. П. Численные методы решения многоэкстремальных задач, связанных с обратными задачами математического программирования / В. П. Булатов, Т. И. Белых // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 12. – С. 14–20.
18. Булатов В. П. Методы отсечений в E^{n+1} для решения задач глобальной оптимизации на одном классе функций / В. П. Булатов, О. В. Хамисов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2007. – Т. 47, вып. 11. – С. 1830–1842.
19. Булатов В. П. Методы чебышёвских точек выпуклых множеств и их приложения / Т. И. Белых, В. П. Булатов, Э. Н. Яськова // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2008. – Т. 48, вып. 1. – С. 18–32.
20. Булатов В. П. Метод ортогональных симплексов и его приложения в выпуклом программировании / В. П. Булатов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2008. – Т. 48, вып. 4. – С. 610–622.
21. Булатов В. П. Методы опорных конусов и симплексов в выпуклом программировании и их приложения в некоторых физико-химических системах / Т. И. Белых, В. П. Булатов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2008. – Т. 48, вып. 11. – С. 1952–1967.
22. Булатов В. П. Эффективные методы решения задач выпуклого программирования, использующие погружение допустимого множества в симплексы / В. П. Булатов, Т.И. Белых, Э. Н. Яськова // Дискрет. анализ и исслед. операций. – 2008. – Т. 15, № 3. – С. 3–10.
23. Bulatov V. P. Methods for solving multi-extremal problems (global search) / V. P. Bulatov // Annals of Operations Research. – 1990. – Vol. 25, N 1. – P. 253–277.
24. Bulatov V. P. The Branch and Bound Method with Cuts in E^{n+1} for Solving Concave Programming Problem / V. P. Bulatov, O. V. Khamisov // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – 1992. – Vol. 180. – P. 273–281.
25. Bulatov V. P. New Effective Methods of Mathematical Programming and Their Application to Energy Problems / V. P. Bulatov // Optimization in the Energy Industry. – 1992. – Vol. 180. – P. 273–281.
26. Kelley J. E. The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs / J. E. Kelley // SIAM J. Industrial and Applied Mathematics. – 1960. – Vol. 8. – P. 703–712.
27. Topkis D. M. Cutting plane methods without nested constraint set / D. M. Topkis // Operations Research. – 1970. – N 3.

O. V. Khamisov

Development optimization methods in investigations of V. P. Bulatov

Abstract. This paper is devoted to brief description of main results obtained by V. P. Bulatov in the field of mathematical programming.

Keywords: cutting planes; Tchebyshev points; global optimization; systems of nonlinear equations.

Хамисов Олег Валерьевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, Институт систем энергетики им. Л. А. Мелентьева СО РАН, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 130 тел.: (3952)428439 (khamisov@isem.sei.irk.ru)

Khamisov Oleg, Melentiev Energy Systems Institute, Lermontov St. 130, Irkutsk, 664033, Phone: (3952)428439 (khamisov@isem.sei.irk.ru)